Beweis von Satz 7.2 ((a) $Ax = b$ lösbar $\Rightarrow$ $b \perp \operatorname{Ker} A^*$,
(b) Falls $\operatorname{Ran} A$ abg., gilt „$\Leftrightarrow$")

Linke Seite $\Leftrightarrow$ $b \in \operatorname{Ran} A$, rechte Seite $\Leftrightarrow$ $b \in (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$;
also kann die Beh. formuliert werden als

(a) $\qquad \operatorname{Ran} A \subseteq (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$

(b) $\operatorname{Ran} A$ abg. $\Rightarrow$ — " — $=$ — " — .

<u>Beh. 1</u> $(\operatorname{Ran} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^*$

<u>Bew.</u> $y \perp \operatorname{Ran} A \Leftrightarrow \langle b, y\rangle = 0 \quad \forall b \in \operatorname{Ran} A$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\langle Ax, y\rangle}_{= \langle x, A^* y\rangle} = 0 \quad \forall x \in \bar{X}$$

$$\Leftrightarrow A^* y = 0, \text{ d.h. } y \in \operatorname{Ker} A^*.$$

Durch Bilden des orth. Komplements folgt

$$((\operatorname{Ran} A)^{\perp})^{\perp} = (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}. \qquad (*)$$

Trivialerweise gilt $\operatorname{Ran} A \subseteq ((\operatorname{Ran} A)^{\perp})^{\perp}$ (Vektoren in $\operatorname{Ran} A$ sind nach Def. von $(\operatorname{Ran} A)^{\perp}$ orthogonal zu allen Vektoren in $(\operatorname{Ran} A)^{\perp}$).

$\Rightarrow$ (a).

Falls $\operatorname{Ran} A$ abgeschlossen, gilt sogar $\operatorname{Ran} A = ((\operatorname{Ran} A)^{\perp})^{\perp}$ (siehe das folgende, auch an sich interessante Lemma) $\Rightarrow$ (b).

<u>Lemma 7.2</u> Sei $\mathfrak{X}$ Hilbertraum, $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{X}$ Unterraum. Dann gilt $\mathcal{U}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{U}}$.

<u>Beweis</u> „$\supseteq$" („einfache" Richtg):

Trivialerweise $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}^{\perp\perp}$ (Vektoren in $\mathcal{U}$ sind senkrecht zu den Vektoren in $\mathcal{U}^{\perp}$).

Aber $(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$ ist, wie das orth. Kompl. jedes UR's V, abg., dh. $\boxed{V^{\perp} = \overline{(V^{\perp})}}$

(denn $x_j \in V^{\perp}$, $x_j \to x$ $\Rightarrow$ $\langle v, x_j \rangle = 0 \;\forall v \in V$

$\Rightarrow$ $\langle v, x \rangle \underset{\uparrow \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ stetig}}{=} \lim_{j\to\infty} \langle v, x_j \rangle = 0 \;\forall v \in V$, dh. $x \in V^{\perp}$)

Also $\overline{U} \subseteq U^{\perp\perp}$.

„$\supseteq$" („schwierige" Richtung):

Es gilt $\boxed{\overline{U}^{\perp} = U^{\perp}}$ ($\subseteq$ trivial, da $\overline{U}^{\perp}$ das orth. Kompl. einer größeren Menge; $\supseteq$: falls $u_j \in U$, $u_j \to u$, $x \in U^{\perp}$, gilt $\langle u_j, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, x\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u_j, x\rangle = 0$.)

Also wg. Projektionssatz: $X = \overline{U} \oplus U^{\perp}$, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert eine eindeutige Darstellung

$$x = \underbrace{x_0}_{\in \overline{U}} + \underbrace{x^{\perp}}_{\in U^{\perp}}. \qquad (**)$$

Sei $x = x_0 + x^{\perp} \in U^{\perp\perp}$

$\Rightarrow \quad \langle x, v\rangle = 0 \quad \forall v \in U^{\perp}$

$\qquad \qquad \overset{\|}{\underbrace{\cancel{\langle x_0, v\rangle}}_{=0}} + \langle x^{\perp}, v\rangle$

$\Rightarrow \quad$ insbesondere $\langle x^{\perp}, x^{\perp}\rangle = 0$, d.h. $x^{\perp} = 0$

Einsetzen in $(**)$ $\Rightarrow$ $x = x_0 \in \overline{U}$.

Einsetzen der Aussage $U^{\perp\perp} = \overline{U}$ mit $U = \operatorname{Ran} A$ in die Gl. $(*)$ liefert die folgende kleine Verbesserung von Satz 7.2:

<u>Satz 7.3</u> Sei X Hilbertraum, $A \in L(X,X)$, dann gilt:

$$\overline{\operatorname{Ran} A} = (\operatorname{Ker} A^*)^{\perp}.$$

Diese Aussage kann als Kriterium für "Fast-Lösbarkeit" der Gl. $Ax = b$ interpretiert werden: Die Gl. ist genau dann "fast-lösbar", d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein b_ε mit $\|b_\varepsilon - b\| < \varepsilon$ sodaß $Ax = b_\varepsilon$ lösbar, wenn $b \perp \operatorname{Ker} A^*$.

2 Beispiele hierzu, das erste illustriert die Rolle von $\operatorname{Ker} A^*$, das zweite das – subtilere, aber in der Praxis wichtige – analytische Phänomen,

daß die Bed. Ran A abg. in Satz 7.2 (b) nicht weggelassen werden kann.

Bsp 3), letzte Stunde, Fortsetzung.

$X = \ell^2$

$S_+ =$ Rechtsshift

$S_+^* = S_-$ (Links —"—)

Betrachte die Gl. $\boxed{S_+ x = b.}$

$\operatorname{Ran} S_+ = \{(0, b_2, b_3, b_4, \dots)\}$

$\operatorname{Ker} S_+^* = \operatorname{Ker} S_- = \{(b_1, 0, 0, 0, \dots)\}$.

Offenbar $\operatorname{Ran} S_+ = (\operatorname{Ker} S_+^*)^\perp$, d.h. Gl. genau dann lösbar, wenn $b \perp \operatorname{Ker} S_+^*$

Bsp 4), letzte Stunde, Fortsetzung.

$\mathbb{X} = L^2([0,T])$

K = Lösungsop. des RWP's $\begin{cases} \frac{d}{dx} u = f \\ u(0) = 0 \end{cases}$ (dh Kf = Stammfkt. mit $u(0)=0$)

K^* = — " — $\begin{cases} -\frac{d}{dx} u = f \\ u(T) = 0 \end{cases}$ (dh $K^*f = -$(Stammfkt. m. $u(T)=0$))

$\operatorname{Ker} K^* = \{0\}$ (denn $K^*f =: u = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dx} u = f = 0$)

Also $(\operatorname{Ker} K^*)^\perp = \mathbb{X}$

Aber $\operatorname{Ran} K \subsetneqq \mathbb{X}$, z.B. da $\operatorname{Ran} K \subseteq C^{\frac{1}{2}}([0,T])$, siehe VL 20

(d.h. die Elemente von $\operatorname{Ran} K$ haben höhere Regularität als allgemeine Elemente von $\mathbb{X}$; typisches Phänomen bei Lösungsoperatoren gew. oder partieller Dgl'en)

Aus Satz 7.3 folgt aber $\overline{\operatorname{Ran} K} = \mathbb{X}$.

(Dies könnte man auch direkt zeigen, z.B. indem man bemerkt, daß $\operatorname{Ran} K \supset \{u \in C^1([0,T]) \mid u(0) = 0\} \supset C_0^\infty((0,T))$, und das nichttriviale aber bekannte Dichtheitsresultat

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$, siehe z.B. VL "PDE's" von B. Schmidt, zitiert.)

Der Begriff der Adjungierten führt auf interessante Teilmengen von $L(X,X)$.

<u>Def.</u> (Selbstadjungierte, schiefsymmetrische, unitäre und normale Operatoren)
Sei X Hilbertraum, $A \in L(X,X)$. A heißt

(a) <u>selbstadjungiert</u> (oder hermitesch oder symmetrisch), wenn $A^* = A$ (oder, äquivalent dazu, $\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle \ \forall x,y \in X$)

(b) <u>schiefsymmetrisch</u> (oder schiefhermitesch), wenn $A^* = -A$ (oder, äquivalent dazu, $\langle Ax,y\rangle = -\langle x,Ay\rangle \ \forall x,y \in X$)

(c) <u>unitär</u>, wenn $A^*A = AA^* = I$

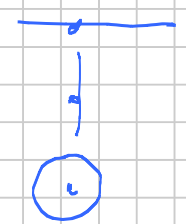
(d) <u>normal</u>, wenn $A^*A = AA^*$.

<u>Bsp'e:</u> 1) A selbstadj. oder schiefsymm. oder unitär $\Rightarrow$ A normal

2) S_+ nicht normal, da $S_+^* S_+ = S_- S_+ = I$, $S_+ S_+^* (x_1,x_2,x_3,..) = (0,x_2,x_3,\dots)$

Proposition 7.2 Sei X Hilbertraum, $A \in L(X,X)$.

A	selbstadj.	$\Rightarrow \operatorname{Spec} A \subseteq \mathbb{R}$
	schiefsymm.	$i\mathbb{R}$
	unitär	$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z \rvert = 1\}$



Bew. (selbstadj.): Sei $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$. z.z.: $A - \lambda I$ invertierbar.

Beh. 1 $\overline{\operatorname{Ran}(A-\lambda)} = X$

Bew: $\qquad$ —"— $\underset{\text{Satz 7.3}}{=} \operatorname{Ker}(A-\lambda)^* \underset{\text{Prop. 7.1}}{=} \operatorname{Ker}(A-\bar\lambda)$

$= \{x \in X \mid x \text{ Eigenvektor von } A \text{ mit EW } \bar\lambda\}$

$\underset{\text{Prop. 6.1 a)}}{=} \{0\}$

Prop. 6.1 a): EWe selbstadj. Op'en sind reell

Beh. 2 $\operatorname{Ran}(A-\lambda)$ abgeschlossen

__Bew.__ Es gilt $(A-\lambda)x = (A-a)x - ibx$

$\Rightarrow \|(A-\lambda)x\|^2 = \|(A-a)x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{\cancel{\langle (A-a)x, ibx\rangle}}_{=0} + b^2\|x\|^2 \geq b^2\|x\|^2 \quad \forall x \in \bar{X}$ (*).

Also:

$y_j = (A-\lambda)x_j$ konvergent (gegen $y \in \bar{X}$)

$\Leftrightarrow$ — " — Cauchy

$\Rightarrow$ x_j Cauchy

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ — " — konvergent (gegen $x \in \bar{X}$)

$\underset{A \text{ stetig}}{\Rightarrow}$ $(A-\lambda)x_j \to (A-\lambda)x$.

Folglich $y = (A-\lambda)x$, dh. $y \in \mathrm{Ran}\,(A-\lambda)$.

$\left.\begin{array}{l} \text{Beh. 1 \& 2} \Rightarrow A-\lambda I \text{ surjektiv.} \\ \text{Beh. 1 (mit } \bar{\lambda} \text{ statt } \lambda) \Rightarrow A-\lambda I \text{ injektiv.} \end{array}\right\} \Rightarrow A-\lambda I$ invertierbar.