Allg. Wdh.

$L(X,Y)$ stetige lineare Operatoren von X nach Y

normierte VR^e

$T \in L(X,Y)$ kompakt, wenn T beschr. Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet

$T \in L(X,X)$ selbstadjungiert, wenn $\mathbb{X}$ Hilbertraum und $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{X}$.

<u>Satz 6.2 (2)</u> $\mathbb{X}$ separabler Hilbertraum, $T \in L(\mathbb{X},\mathbb{X})$ kompakt und selbstadjungiert $\Rightarrow$ $\exists$ ONB von $\mathbb{X}$ bestehend aus Eigenvektoren von T.

$\mathbb{X}$ separabel $\Leftrightarrow$ $\exists$ abzählbare dichte Teilmenge
z.B. ℓ^2, $L^2(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$ separabel.

$=$

Def. Sei $\mathfrak{X}$ $\mathbb{K}$-Hilbertraum, $\dim \mathfrak{X} = \infty$. Eine Menge $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{X}$ heißt

(a) <u>orthonormal</u>, wenn $\langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k\ell} \quad \forall k, \ell$

(b) <u>Basis</u> von $\mathfrak{X}$, wenn zu jedem $x \in \mathfrak{X}$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{K}$ existieren sodass $x = \lim\limits_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \quad (*)$

Orthonormalbasis $:=$ orthonormale Basis

<u>Tatsache</u>: Die Entwicklungskoeffizienten α_j in (b) sind im Falle einer ON-Basis gegeben durch

$$\alpha_j = \langle x, e_j \rangle,$$

insbesondere sind sie eindeutig.

<u>Bew.</u>:
$$\langle x, e_k \rangle \underset{(*)}{=} \left\langle \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j, e_k \right\rangle \underset{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ stetig}}{=} \lim_{N \to \infty} \underbrace{\left\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j, e_k \right\rangle}_{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle}$$

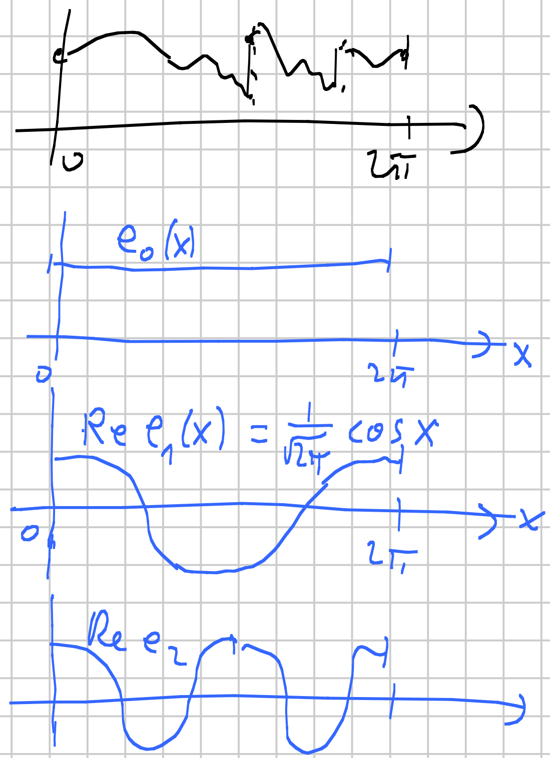
$$\overset{ON}{=} \lim_{N\to\infty} \begin{cases} \alpha_k, & N \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \alpha_k.$$

Anwendung: Funktionalanalytische Sichtweise von Fourier-Reihen.

$X = L^2((0,2\pi])$

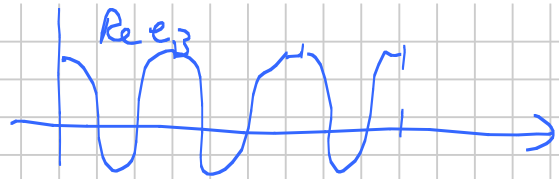
$e_k(x) := \dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z}$



(Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bewirkt, daß die e_k normiert:

$\|e_k\|^2 = \int_0^{2\pi} |e_k(x)|^2 \, dx$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \, dx = 1$)



Satz 6.4 (Fourier-Reihen-Entwicklung) Die $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sind eine ONB von $L^2([0,2\pi])$. D.h. für jedes $f \in L^2([0,2\pi])$ gilt

$$(*) \qquad f = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\langle f, e_k\rangle}_{\in\mathbb{C}}\, e_k .$$

Der Limes bedeutet Konvergenz in $L^2([0,2\pi])$, d.h.

$$\Big\| f - \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k\rangle e_k \Big\|_{L^2} \to 0 \qquad (N\to\infty).$$

=

Explizit: $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ (Skalarprodukt auf L^2)

$$\langle f, e_k\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx}_{=:\hat{f}_k}$$

$=: \hat{f}_k$ k-ter Fourierkoeffizient von f

$$\sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k\rangle e_k(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k\, e^{ikx}$$

Übl. Schreibweise von $(*)$: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k\, e^{ikx}.}$ Fourier-Entwicklg. von f.

Bew. der Fourier-Entw. mithilfe des Spektralsatzes für kompakte selbstadj. Operatoren

Prinzip: Finde kompakten selbstadj. Operator, dessen Eigenvektoren gerade die $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sind.

Schritt 1 Operator, dessen E-vektoren die $\{e_k\}$ sind

VL 17: $L = \frac{d}{dx}$ $\qquad L: C^1_{per,0} \to C_{per,0}$ per. Fkt'en mit Mittelwert 0

Inverse: $L^{-1} = K$, Kf = Stammfkt. von f mit MW 0

Explizit: $(Kf)(x) = \int_0^x f(s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^x f(s)\,ds\right)dx$ $\quad (**)$

VL 17: K aufgefasst als Operator $C_{per,0} \circlearrowleft$ ist kompakt

E-Werte $= \left\{\frac{1}{ik}\right\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, E-Vektoren $= \left\{e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$

Problem: K nicht selbstadj., $C_{per,0}$ kein Hilbertraum

Schritt 2 <u>Hilbertraum, auf dem K wohldefiniert ist</u>

$\underline{X} = L_0^2([0,2\pi]) = \{ f \in L^2([0,2\pi]) \mid \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0 \}$

$(**)$ wohldefiniert für $f \in L_0^2$, für jedes $x \in [0,2\pi]$.

<u>Beh</u>: $Kf \in L_0^2 \quad \forall f \in L_0^2$

<u>Bew</u>: Kf ist sogar stetig, denn

$$|Kf(x) - Kf(y)| = \left| \int_0^x f(s)\,ds - \int_0^y f(s)\,ds \right|$$

$$\underset{\text{OBdA } x<y}{=} \left| -\int_x^y 1 \cdot f(s)\,ds \right|$$

$$\underset{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\int_x^y 1^2\,ds}}_{=\sqrt{|x-y|}} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_x^y |f(s)|^2\,ds}}_{\leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,ds} = \|f\|_{L^2}}$$

$\int_0^{2\pi} (Kf)(y)\,dy = 0$ klar nach Def. von K.

Schritt 3 **Selbe Eigenvektoren trotz größeren Raumes** (Regularitätsargument)

Wir wissen: E-Vektoren von K auf $C_{per,0}$ sind genau die $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$

Aber auf dem größeren Raum $L^2_0 \supsetneq C_{per,0}$ könnte K weitere E-Vektoren besitzen.

Nicht möglich, denn: Wg. Schritt 2 ist $K(L^2_0) \subseteq C_{per,0}$. Also

$$u \in L^2_0, \quad Ku = \lambda u \quad (\lambda \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{\lambda} Ku \in C_{per,0}$$

[und damit sogar $u \in C^1_{per,0}$, wegen $K = L^{-1}$, $L: C^1_{per,0} \to C_{per,0}$]

(Eigenfunktionen haben "höhere Regularität" als allg. Fkt'en im H-Raum X. Typisches Phänomen bei Diff.- oder Int.-Operatoren.)

Schritt 4 **Kompaktheit**

VL 17 $\Rightarrow$ K kpkt auf $C_{per,0}$, z.z. kompakt auf L^2_0.

Def. (hölderstetige Fkt'en) Sei $\alpha \in (0,1)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$C^\alpha(K) := \left\{ u \in C(K) \;\middle|\; \sup_{x,y\in K,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

Norm: $\|u\|_\alpha := \|u\|_\infty +$ ——//——

<u>Lemma 6.9</u> $\{ u \in C^\alpha([a,b]) \mid \|u\|_\alpha \leq R \}$ ist relativ kompakte TM von $C([a,b])$.

<u>Bew.</u>: Genau wie L 6.5 für C^1. Einziger Unterschied: Für Fkt'en mit $\|u\|_\alpha \leq R$ gilt

$$| u(x) - u(y) | \leq |x-y|^\alpha R \quad \forall x,y$$

(statt $| u(x) - u(y) | \leq |x-y| R$ für Fkt'en mit $\|u\|_{C^1} \leq R$).

<u>Beh.</u> $K : L^2_0 \circlearrowleft$ kompakt

<u>Bew.</u> z.z. f_j beschr. Folge in L^2_0 $\Rightarrow$ Kf_j besitzt konv. TF in L^2_0.

f_j beschr. in L^2_0 $\underset{\text{Schritt 2}}{\Rightarrow}$ Kf_j beschr. Folge in $C^\alpha([0,2\pi])$, $\alpha = \frac{1}{2}$

$\underset{\text{L 6.9}}{\Rightarrow}$ —//— hat konv. TF in $C([0,2\pi])$

$\Rightarrow$ —//——————— $L^2_0([0,2\pi])$,

da $\|f_j - f\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f_j - f|^2} \leq \sqrt{2\pi}\, \|f_j - f\|_\infty$

Schritt 5 Selbstadjungiertheit

T selbstadj. $\underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle f, Tg \rangle = \langle Tf, g \rangle \quad \forall f, g$

Seien zunächst $f, g \in C_{per,0}$.

Sei $u := Kf$, $v := Kg$, d.h. $\boxed{f = Lu, \quad g = Lv}$.

$$\langle f, Kg \rangle = \langle Lu, \cancel{K}\cancel{L}v \rangle = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{dx} u\right) \overline{v}$$

|| partielle Integration

$$-\langle Kf, g \rangle = -\langle \cancel{K}\cancel{L}u, Lv \rangle = -\int_0^{2\pi} u \overline{\left(\frac{d}{dx} v\right)}.$$

Die Gl. $\langle f, Kg \rangle = -\langle Kf, g \rangle$ gilt auch für $f, g \in L_0^2$, da $C_{per,0}$ dicht in L_0^2 (siehe Maßtheorie) und $\langle \cdot, \cdot \rangle$, K stetig.

Eliminiere das Minuszeichen mit dem folgenden Trick:

$\boxed{\text{Betrachte } iK}$ $\quad (i = \sqrt{-1})$

$$\langle f, iKg \rangle = \overline{i} \langle f, Kg \rangle = \underbrace{-\overline{i}}_{i} \langle Kf, g \rangle = \langle iKf, g \rangle$$

$\Rightarrow iK$ selbstadj., selbe Eigenfkt'en.

Schritt 6 **Abstrakte Theorie anwenden**

Satz 6.2 für $iK \Rightarrow \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ ONB von $L^2_0([0,2\pi])$

Schritt 7 **Mittelwertbedingung abschaffen**

$$f\in L^2([0,2\pi]) \Rightarrow f = \underbrace{(f-\langle f\rangle)}_{\in L^2_0} + \underbrace{\langle f\rangle}_{\in \mathrm{Span}\{1\} = \mathrm{Span}\{e_0\}}, \qquad \langle f\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \quad \text{MW von } f$$

Also $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ONB von $L^2([0,2\pi])$.

Zusammenfassung: Aus Sicht der FA ist die Darstellbarkeit von Fkt'en als Fourierreihen "nichts Besonderes". Fkt'en können als Reihe bzgl. der Eigenfkt'en eines beliebigen kompakten selbstadj. Op's dargestellt werden. Fourierreihen entsprechen der Wahl $\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^{-1}$.