Wdh: $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\ell^p = \{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \underbrace{\mathbb{K}}_{\mathbb{R} \text{ od. } \mathbb{C}}, \|a\|_p < \infty \}$$

(Notw. Bed. für $a \in \ell^p$: a Nullfolge dh $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.)

Plan: 1) $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm

2) ℓ^p ist ein Banachraum

zu 1). Hilfssatz (Young'sche Ungleichung)

$a, b, p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}$ (Y)

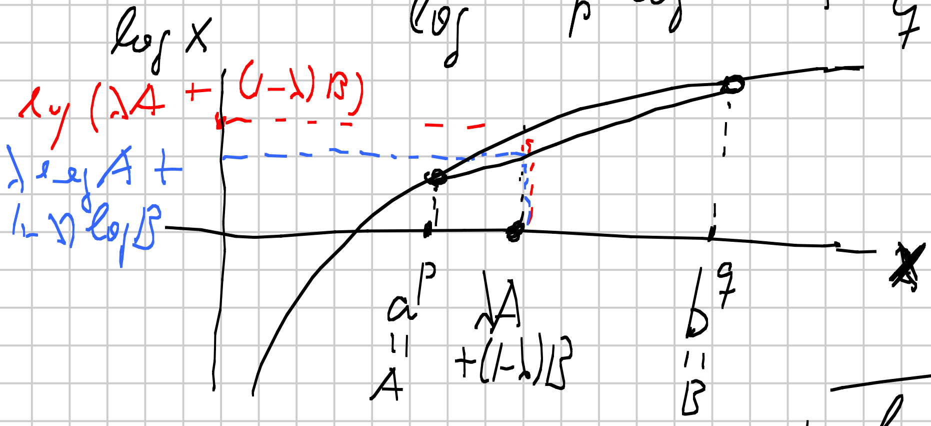
Bem: $p = q = 2 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ✓ $\quad ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$\Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ✓

Bem.: $p = \frac{3}{2}$, $q = 3$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ $\quad ab \le \frac{2}{3} a^{3/2} + \frac{1}{3} b^3$

<u>Bew:</u> $(\bar{?}) \iff (a^p)^{1/p} \cdot (b^q)^{1/q} \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

$\overset{\iff}{\log} \quad \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \le \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$



log ist konkav, d.h. für alle $A, B \in (0,\infty)$, für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\boxed{\log(\lambda A + (1-\lambda)B) \ge \lambda \log A + (1-\lambda) \log B}$$

Kriterium für konkav: $f : [a,b]$ konkav (konvex) wenn $f'' \le 0$ $(f'' \ge 0)$

Nachprüfen für log: $\log''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ auf $(0,\infty)$

Anwenden mit $A = a^p$, $B = b^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $1-\lambda = 1 - \frac{1}{p} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{q}$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q.$$

Notation: Für zwei Folgen $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ bezeichnet ab die Folge mit Komponenten $(ab)_n = a_n b_n$.

(komponentenweise Multiplikation).

Lemma 1.1 (Hölder'sche Ungleichung für Folgen)

Sei $1 \leq p \leq \infty$, und sei q die Lsg. der Gl. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Für $a \in \ell^p$, $b \in \ell^q$ gilt $ab \in \ell^1$, und

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

Konvention: $q = \infty$ falls $p = 1$, $q = 1$ falls $p = \infty$.

Bem.: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n, 0, 0, \dots)$ $\qquad p = q = 2$

$$\|ab\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow \quad \left| \sum_{j=1} a_j b_j \right| \leq$ — // ——

Cauchy-Schwarz-Ungl. im $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$).

(Eleganter) Beweis $\quad A := \|a\|_p, \quad B := \|b\|_q,$
OBdA beide > 0.

$$\frac{|a_n|}{A} \cdot \frac{|b_n|}{B} \underset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{p}\left(\frac{|a_n|}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|b_n|}{B}\right)^q .$$

$\Rightarrow$ Summiere über n

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|b_n|}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p} \underbrace{\frac{\sum_n |a_n|^p}{A^p}}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\frac{\sum_n |b_n|^q}{B^q}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Korollar 1.1 (Minkowski'sche Ungl. f. Folgen)

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p \quad \forall a,b \in \ell^p .$$

(Dreiecksungl. für die p-Norm)

<u>Bew</u>: $\| a+b \|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \, |a_n + b_n|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \underbrace{|a_n + b_n|^{p-1}}_{=: (|a+b|^{p-1})_n \text{ (nützliche Notation)}} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \, |a_n + b_n|^{p-1} .$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|a\|_p \, \| |a+b|^{p-1} \|_q + \|b\|_p \, \| |a+b|^{p-1} \|_q \quad (*) .$$

mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Hilfssatz ("Herausziehen von Exponenten aus p-Norm")

$$\| |c|^r \|_p = \left(\sum_n |c_n|^{r \cdot p} \right)^{1/p} = \left[\left(\sum_n |c_n|^{rp} \right)^{\frac{1}{rp}} \right]^r$$

$$= \| |c| \|_{rp}^{r}$$

Also $\| \, |a+b|^{p-1} \|_q = \| \, |a+b| \, \|_{q\cdot(p-1)}^{p-1} = \|a+b\|_p^{p-1}$

"Wunder": $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}$

$\Rightarrow q \cdot (p-1) = p$

Einsetzen in (*)

$\Rightarrow \|a+b\|_p^{\cancel{p}\,1} \leq \left(\|a\|_p + \|b\|_p\right) \cancel{\|a+b\|_p^{p-1}}$

$=$

Satz 1.1 ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ ist ein Banachraum

Bew.: Normierter VR: – Dreiecksungl. ✓ (Minkowskische Ungl.)

– Homogenität: $\lambda \in \mathbb{K}$, $a = (a_n) \in \ell^p$

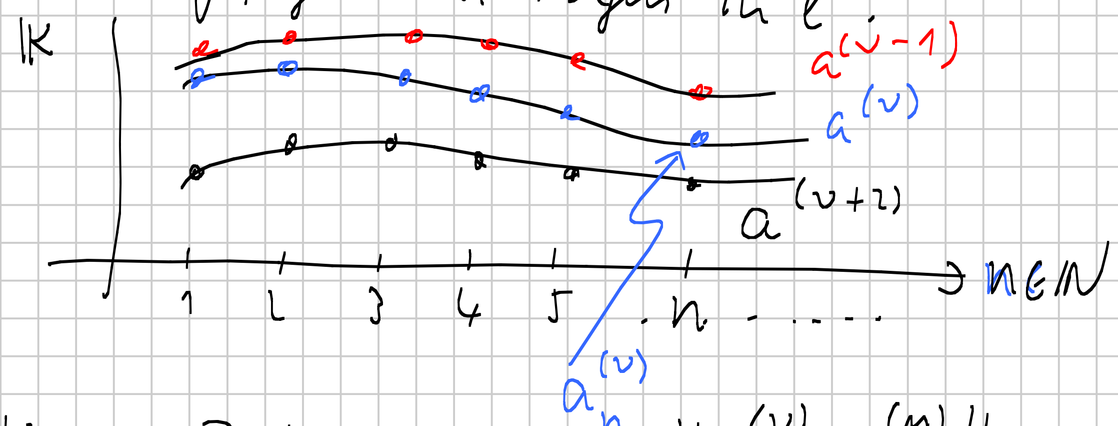
$\Rightarrow \|\lambda a\|_p = \left(\sum_n |\lambda a_n|^p\right)^{1/p}$

$= \left(|\lambda|^p \sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|a\|_p$ ✓

– Positivität: $\|a\| = \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p} = 0$

$\Rightarrow$ alle $a_n = 0$, d.h. $a = 0$. ✓

Vollständigkeit: z.z.: Sei $a^{(\nu)} := (a_n^{(\nu)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge von Folgen in ℓ^p.



d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ sodass $\|a^{(\nu)} - a^{(\mu)}\|_p < \varepsilon\ \forall \mu,\nu \geq N$.

z.z. $\exists\, a \in \ell^p : \|a^{(\nu)} - a\|_p \to 0\ (\nu \to \infty)$.

Idee: "vorderer Teil" der Folge $\approx$ Folge im $\mathbb{R}^d$

"hinterer Teil" —"— klein

Schritt 1: Jede Komponentenfolge $a_n^{(\nu)}$, n fest, ist konvergent gegen ein $a_n \in \mathbb{K}$ wenn $\nu \to \infty$.

(= punktweise Konvergenz, wenn Folgen als Fkt'en $a: \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ aufgefaßt werden)

<u>Bew:</u> $$|a_n^{(\nu)} - a_n^{(\mu)}| = \left(|a_n^{(\nu)} - a_n^{(\mu)}|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j^{(\nu)} - a_j^{(\mu)}|^p\right)^{1/p} = \|a^{(\nu)} - a^{(\mu)}\|_p < \varepsilon$$
$$\forall \mu, \nu \geq N$$

Also $\{a_n^{(\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, n fest, Cauchyfolge in $\mathbb{K}$

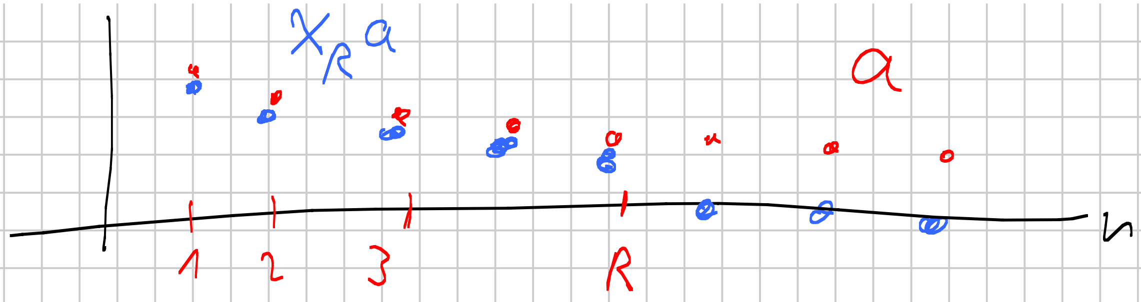
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ <u>vollständig</u> (← Analysis 1) $\Rightarrow$ konvergent.

<u>Kandidat</u> für ℓ^p-Grenzwert der $a^{(\nu)}$: $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

z.z.: $a \in \ell^p$, $\|a^{(\nu)} - a\|_p \to 0$ $(\nu \to \infty)$.

Betrachte den "vorderen Teil" der Folgen $a^{(\nu)}$ und a:

$$(\chi_R)_n := \begin{cases} 1 & n \leq R \\ 0 & n > R \end{cases}, \quad \chi_R a^{(\nu)}, \quad \chi_R a$$



$$(\chi_R a)_n = \begin{cases} a_n & n \le R \\ 0 & n > R. \end{cases}$$

Für $\nu, M \geq N$:

$$\|\chi_R a^{(\nu)} - \chi_R a\|_p \le \|\chi_R a^{(\nu)} - \chi_R a^{(M)}\|_p + \|\chi_R a^{(M)} - \chi_R a\|_p$$

$$\le \|a^{(\nu)} - a^{(M)}\|_p + \text{——} \,//\, \text{——}$$

$$< \varepsilon + \text{—} \,//\, \text{——}$$

Aber $\|\chi_R a^{(M)} - \chi_R a\|_p^p = \sum_{n=1}^{R} |a_n^{(M)} - a_n|^p \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$ wegen komponentenweiser Konv (Schritt 1).

Also $\exists M$ sodaß $\|\chi_R a^{(M)} - \chi_R a\|_p < \varepsilon$

$\Rightarrow$ (i) $\|\chi_R a^{(\nu)} - \chi_R a\|_p < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \forall \nu \geq N, \forall R$

(ii) $\|\chi_R a\|_p \leq \|\chi_R a^{(N)}\|_p + \|\chi_R a - \chi_R a^{(N)}\|$

$\leq \|a^{(N)}\|_p + 2\varepsilon \qquad \forall R$

$R \to \infty$ in (ii):

$$\|\chi_R a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{R} |a_n|^p\right)^{1/p} \leq \|a^{(N)}\|_p + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \leq \text{———} \, // \, \text{———} < \infty$$

dh $a \in \ell^p$

$R \to \infty$ in (i):

$$\|\chi_R (a^{(\nu)} - a)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{R} |a_n^{(\nu)} - a_n|^p\right)^{1/p} < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \|a^{(\nu)} - a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(\nu)} - a_n|^p\right)^{1/p} \leq 2\varepsilon. \quad \forall \nu \geq N$$

d.h. $\|a^{(\nu)} - a\|_p \to 0 \qquad (\nu \to \infty)$.

=