<u>Wdh:</u> RWP einer gew. Dgl, Eigenwerte $u' = \lambda u$, u per.

$C^1_{per,0}$ = periodische stetig diff'b. Fkt'en m. MW 0

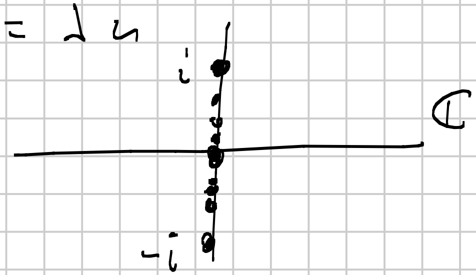
$C_{per,0}$ = — " — stetige — " —

$L = \frac{d}{dx} : C^1_{per,0} \to C_{per,0}$ stetiger lin. Op. zwischen B-Räumen

$L^{-1} = K$ Integraloperator, kompakt, also Spektraltheorie kompakter Operatoren (Satz 6.1) anwendbar

Insbesondere Spektrum "quantisiert", d.h. höchstens abzählbar; für die meisten $\lambda \in \mathbb{C}$ existieren keine Lsg'en $\neq 0$ der Gl. $Ku = \lambda u$

$$\operatorname{spec} K = \left\{ \frac{1}{ik} \right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \cup \{0\}$$



f) <u>Die invarianten UR'e $\lim_{n\to\infty} (K - \lambda I)^n$, $\lambda \in \operatorname{spec} K \setminus \{0\}$</u>

<u>Beh.</u> $\operatorname{Ker} (K - \lambda I)^n = \operatorname{Ker} (K - \lambda I) = \operatorname{span} \{ e^{\frac{1}{\lambda} x} \}$

$\lambda = 1/ik$: e^{ikx}

Bew. Betrachte $\operatorname{Ker}(K-\lambda I)^2$.

$$(K-\lambda I)^2 u = 0 \qquad \Big|\ L^2\cdot \qquad [L = K^{-1}]$$

$$\Leftrightarrow\ (I-\lambda L)^2 u = 0 \qquad \Big|\ \tfrac{1}{\lambda^2}\cdot$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\tfrac{1}{\lambda}I - L\right)^2 u = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(L - \tfrac{1}{\lambda}I\right)^2 u = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\tfrac{d}{dx} - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 u = 0$$

$L = \frac{d}{dx}$

$$\Leftrightarrow\ u'' - \tfrac{2}{\lambda}u' + \tfrac{1}{\lambda^2}u = 0$$

(DGl. 2ter Ordnung, nicht 1ter Ordn.)

Theorie gew. Dgl'en: $\quad u \in \operatorname{Span}\{e^{z_1 x}, e^{z_2 x}\}$

(wg. per. RB'en; falls $z_1 = z_2$, ist $x e^{z_1 x}$ Lsg der Dgl., aber keine per. RB)

$z_{1/2} \in \mathbb{C}$ Lsg. der charakteristischen Gl.

$$z^2 - \tfrac{2}{\lambda}z + \tfrac{1}{\lambda^2} = 0$$

$$\left[\ z^2 + pz + q = 0 \qquad z_{1/2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\ \right]$$

$$z_{1/2} = \tfrac{1}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \tfrac{1}{\lambda^2}} = \tfrac{1}{\lambda}$$

Also $z = \frac{1}{\lambda}$ einzige Lsg.

$\Rightarrow \boxed{u(x) = C e^{\frac{1}{\lambda}x}}$

Also $\left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{\lambda}\right) u = 0$, d.h. $u \in \operatorname{Ker}\left(L - \frac{1}{\lambda}I\right) = \operatorname{Ker}(K - \lambda I)$

Also $\operatorname{Ker}(K-\lambda I)^n = \operatorname{Ker}(K - \lambda I) = \operatorname{Span}\{e^{\frac{1}{\lambda}x}\}$.

$=$

g) Wir wissen $0 \in \operatorname{spec} K$, aber ist 0 ein Eigenwert?

$$Ku = 0 \quad \Big| \; L\cdot$$

$$\Rightarrow \quad u = 0$$

Also Nein. Also kann $K : C_{per,0} \to C_{per,0}$ nicht surjektiv sein.

Genauer: $K : C_{per,0} \underset{\text{bijektiv}}{\xrightarrow{\sim}} C^1_{per,0}$,

also $\operatorname{Ran} K = C^1_{per,0} \subsetneq C_{per,0}$

nicht alle stetigen Fkt'en sind stetig diffb.!

Besonderheit: $\operatorname{Ran} K$ liegt dicht in $C_{per,0}$

(z.B. da Polynome dicht in $C_{per,0}$).

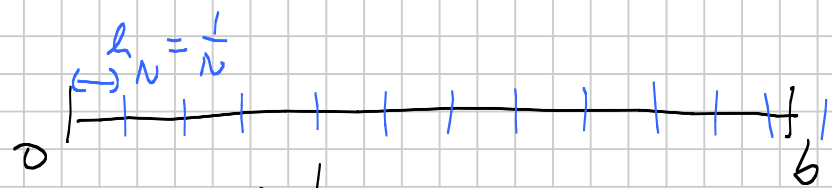
$\Leftarrow$

<u>Beweis von Lemma 6.5</u> ($\{u \in C^1([a,b]) \mid \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty \leq R\}$ ist relativ kompakte TM von $C([a,b])$)

[vgl.: $\{u \in C([a,b]) \mid \|u\|_\infty \leq R\}$: nicht relativ kpkt, da $\dim C([a,b]) = \infty$]

OBdA $a = 0$.

Idee: Diskretisierung



d.h. betrachte $u|_{h_N \cdot \mathbb{Z} \cap [0,b]} = u|_{\{0, h_N, 2h_N, \dots, d(N) \cdot h_N\}}$

Satz von Bolzano-Weierstrass:

$$\{u : \{0, h_N, 2h_N, \dots, d(N) h_N\} \to \mathbb{C} \mid \|u\|_\infty \leq R\} \text{ rel. kompakt}$$

Sei $\{u^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ Folge in $C^1([a,b])$ mit $\|u^\nu\|_\infty + \|(u^\nu)'\|_\infty \leq R$.

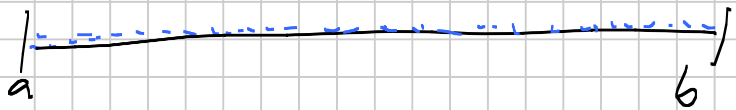
Wähle Teilfolge $u^{\nu_1^{(1)}}, u^{\nu_2^{(1)}}, u^{\nu_3^{(1)}} \dots$ sodaß $u|_{h_1 \mathbb{Z} \cap [a,b]} \to u^*|_{h_1 \mathbb{Z} \cap [a,b]}$

Weitere TF $u^{\nu_1^{(2)}}, u^{\nu_2^{(2)}}, u^{\nu_3^{(2)}} \dots$ sodaß $u|_{h_2 \mathbb{Z} \cap [a,b]} \to u^*|_{h_2 \mathbb{Z} \cap [a,b]}$

Weitere TF $u^{\nu_1^{(3)}}, u^{\nu_2^{(3)}}, u^{\nu_3^{(3)}} \dots$ sodaß $u\big|_{h_3\mathbb{Z}\cap[a,b]} \to u^*\big|_{h_3\mathbb{Z}\cap[a,b]}$

etc.

Diagonalfolge $u^{\nu_1^{(1)}}, u^{\nu_2^{(2)}}, u^{\nu_3^{(3)}}, \dots$ erfüllt $u\big|_{\underbrace{\bigcup_{N\in\mathbb{N}} h_N\mathbb{Z}\cap[a,b]}_{=\mathbb{Q}\cap[a,b]}} \to u^*\big|_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ pkt.weise



Beh: $u^* : \mathbb{Q}\cap[a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. $\qquad \mu_j := u^{\nu_j^{(j)}}$

Bew: $$|u^\nu(x) - u^\nu(y)| = \left| \int_x^y (u^\nu)' \right|$$
$$\leq |x-y| \, \|(u^\nu)'\|_\infty$$
$$\underset{\text{Vor. an } u^\nu}{\leq} |x-y| \, R \qquad \Big| \; x,y \in \mathbb{Q}\cap[a,b], \; \nu = \nu_j^{(j)} \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad |u^*(x) - u^*(y)| \leq |x-y| \, R. \qquad (*)$$

Also $u^* : \mathbb{Q}\cap[a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Also u^* stetig, auf einer dichten Teilmenge von $[a,b]$ definierte Fkt. $\Rightarrow$ besitzt eindeutige stetige Fortsetzung auf $[a,b]$.

Noch 7.7.: $\quad \| u^{\nu_n^{(n)}} - u_* \|_\infty \to 0$

Sei $\mu_n := \nu_n^{(n)}$. Sei $\varepsilon > 0$.

(0) Wähle $h = \frac{1}{M}$ mit $h < \frac{\varepsilon}{3R}$

(1) Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup\limits_{x \in h\mathbb{Z} \cap [a,b]} |u^{\mu_n}(x) - u_*(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \mu_n \geq N$

(2) Zu $x \in [a,b]$, $x \notin h\mathbb{Z}$ wähle $y \in h\mathbb{Z} \cap [a,b]$ sodass $|x-y| < \frac{\varepsilon}{3R}$ (**)

Schranke aus Vor.

$$\text{Also } |u^{\mu_n}(x) - u_*(x)| = |\underbrace{u^{\mu_n}(x) - u^{\mu_n}(y)} + \underbrace{u^{\mu_n}(y) - u_*(y)} + \underbrace{u_*(y) - u_*(x)}|$$

$$\leq |u^{\mu_n}(x) - u^{\mu_n}(y)| + |u^{\mu_n}(y) - u_*(y)| + |u_*(y) - u_*(x)|$$

$$\underset{(*)}{\leq} R|x-y| + \frac{\varepsilon}{3} + R|x-y|$$

$$\underset{\substack{(**)\\(\text{Wahl v. } y)}}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall \mu_n \geq N$$

$$\underset{\sup_x}{\Rightarrow} \quad \| u^{\mu_n} - u_* \|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall \mu_n \geq N.$$

Verallgemeinerung: <u>Satz von Arzela-Ascoli</u>:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt, $A \subseteq (C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$. Es gelte

(i) $\exists M > 0: \quad \|f\|_\infty \leq M \quad \forall f \in A$ (gleichmäßige Beschränktheit)

(ii) $\forall x_0 \in \Omega, \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall |x - x_0| < \delta, \; \forall f \in A$.
(gleichgradige Stetigkeit)

Dann A relativ kompakt in $C(\Omega)$.

(δ darf zwar vom "Fußpunkt" x_0, aber nicht von der Fkt. f abhängen)

(Unsere Abschätzung $|u^{(\nu)}(x) - u^{(\nu)}(y)| \leq |x-y| \cdot R$ zeigt: (ii) gültig mit $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$.)