Def.: $\overline{X}$ normierter VR, $T: \overline{X} \to \overline{X}$ linearer Operator.
$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von T, wenn $T - \lambda I$ nicht injektiv, oder (äquivalent dazu) wenn $x \in \overline{X} \setminus \{0\}$ existiert mit $Tx = \lambda x$.

Offensichtlich $\{\text{Eigenwerte von } T\} \underset{\not\supseteq \text{ im allgemeinen}}{\subseteq} \operatorname{spec} T$

Bew. (b)

$0 \notin \operatorname{spec} K \iff K - 0 \cdot I \ (= K)$ invertierbar

$\Rightarrow \overline{B_1(0)} = \underset{\text{stetig}}{K^{-1}}\big(\underbrace{K(\overline{B_1(0)})}_{\text{kompakt}}\big)$ kompakt

$\underset{\text{Satz 1.5}}{\Rightarrow} \dim \overline{X} < \infty$.

Bem.: $\lambda = 0$ ist der einzige Wert, für den $K - \lambda I$ im allg. kein Fredholmoperator ist. $\rightsquigarrow$ Sonderrolle von $\lambda = 0$

Bew. (c) $\lambda \neq 0 \Rightarrow$

$$K - \lambda I = -\lambda \, (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{invertierbar}}}{I} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kompakt}}}{\tfrac{1}{\lambda} K}) \qquad (*)$$

Also wg. Satz 5.3 Fredholm vom Index 0

Also $\dim \operatorname{Ker}(K-\lambda I) = \dim \operatorname{coker}(K-\lambda I)$,
d.h. $K-\lambda I$ genau dann injektiv, wenn surjektiv.

Bew. (d) $\lambda \neq 0$ $\qquad T := I - \frac{1}{\lambda} K$ $\qquad$ (siehe $*$)

$$\operatorname{Ker}(K-\lambda I)^n = \operatorname{Ker} T^n \qquad \text{(Faktor } -\lambda \text{ ändert nichts)}$$
$$\operatorname{Ran}(K-\lambda I)^n = \operatorname{Ran} T^n \qquad \text{— // —}$$

Wende Lemma 6.2 an auf T. Beachte: $T|_{V_\lambda}$ invertierbar
$\Leftrightarrow$ $K-\lambda I|_{V_\lambda}$ inv'bar $\Leftrightarrow$ $\lambda \notin \operatorname{Spec} K$
$\dim U_\lambda \geq 1$ folgt wg. (c) $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker}(K-\lambda I) \geq 1$.

Bew. (a) 2 Lemmas

Lemma 6.3 Sei X B-Raum, $T \in L(X,X)$. Dann gilt

$$\operatorname{spec} T \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Insbesondere $\operatorname{spec} T$ beschränkt.

Bew.: Sei $\lambda \neq 0$.

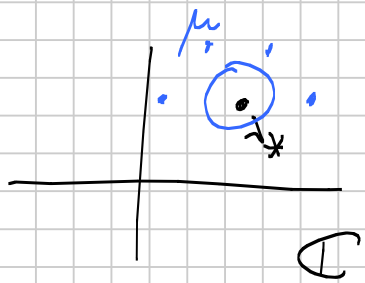
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inv'bar}}}{\lambda I} - T \text{ inv'bar} \underset{\text{Satz 5.1}}{\Leftarrow} \|T\| < \frac{1}{\|(\lambda I)^{-1}\|} = \frac{1}{\|\frac{1}{\lambda} I\|} = \frac{1}{\frac{1}{|\lambda|}} = |\lambda|$$

Lemma 6.4 X B-Raum, $K \in L(X,X)$ kompakt $\Rightarrow$ $\operatorname{spec} K$ besitzt keinen Häufungspunkt $\lambda_* \neq 0$.

Bew.: Sei $\lambda_* \neq 0$ HP von $\operatorname{spec} K$.

$\operatorname{spec} K$ abgeschlossen (wg. Prop. 6.1) $\Rightarrow$ $\lambda_* \in \operatorname{spec} K$

c) $\Rightarrow$ λ_* Eigenwert von K.



Beh.: $\exists\, \delta > 0$: $\mu \notin \operatorname{spec} K$ $\forall \mu \neq \lambda_*$, $|\mu - \lambda_*| < \delta$.
(Widerspruch zu λ_* HP von $\operatorname{spec} K$)

__Beweis der Beh.:__ (A) $\Rightarrow$ $\bar{X} = \underbrace{\mathrm{Ker}\,(K-\lambda_* I)^n}_{=:\,U} \oplus \underbrace{\mathrm{Ran}\,(K-\lambda_* I)^n}_{=:\,V}$

U, V invariant unter K.

$\dim U < \infty \Rightarrow \mathrm{spec}\, K|_U$ endlich

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0:\quad K-\mu I|_U$ inv'bar $\forall \mu \neq \lambda_*,\ |\mu-\lambda_*| < \delta_1$

(d) $\Rightarrow$ $K-\lambda_* I|_V$ invertierbar $\underset{\text{Satz 5.1}}{\Rightarrow}$ $K-\mu I|_V$ inv'bar $\forall \mu$ mit

$$|\mu-\lambda| < \frac{1}{\|((K-\lambda_* I)|_V)^{-1}\|} =: \delta_2$$

Also $K-\mu I$ inv'bar $\forall \mu \neq \lambda,\ |\mu-\lambda| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$\square$

__Bew. von (a), Fortsetzung.__

$\dim \bar{X} < \infty \Rightarrow \mathrm{spec}\, K = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(K-\lambda I) = 0\}$
(Nullstellen eines Polynoms n^{ten} Grades)

$\underset{\text{Fundamentalsatz d. Algebra}}{\Rightarrow}$ (i). (d.h. endliche, nichtleere Menge)

Sei also $\dim \bar{X} = \infty$. $\#\, \mathrm{spec}\, K < \infty \underset{(b)}{\Rightarrow}$ (i). (–" —)

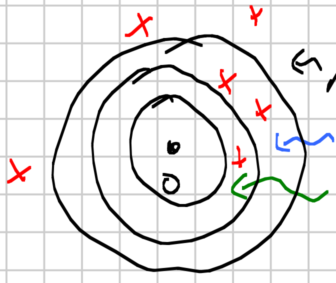
Sei also $\# \operatorname{spec} K = \infty$.

Lemma 6.3 $\Rightarrow$ spec K beschränkt

Lemma 6.4 $\Rightarrow$ —"— besitzt keinen HP $\lambda_* \neq 0$

$\Big\}$ (*)

Idee:



$A_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq 1\}$

$A_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 1 > |\lambda| \geq \frac{1}{2}\}$

$A_3 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} > |\lambda| \geq \frac{1}{3}\}$

etc

(*) $\Rightarrow$ $\operatorname{spec} K \cap A_1$ endlich (andernfalls würde wg. Satz von Bolzano-Weierstraß ein HP $\neq 0$ existieren)

$\operatorname{spec} K \cap A_2$ —"—

$\operatorname{spec} K \cap A_3$ —"—

etc.

Setze $\operatorname{spec} K \cap A_1 =: \{\lambda_1, \dots, \lambda_{r_1}\}$

—"— $\cap A_2 =: \{\lambda_{r_1+1}, \dots, \lambda_{r_2}\}$ etc.

Da $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, liegt jedes $\lambda \in \operatorname{spec} K \setminus \{0\}$ in genau einem A_j.
Also $\operatorname{spec} K \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$. Nach Def. der λ_j ist klar, daß $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$.

$=$

Interessantes Bsp: Eigenwerte eines Randwertproblems einer gewöhnlichen Dgl.

$$u' = \lambda u, \quad u \text{ } 2\pi\text{-periodisch} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

Funktionalanalytische Behandlung.

a) **Funktionenräume**

$$C^1_{per,0} := \left\{ u \in C^1([0,2\pi]) \;\middle|\; u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi),\ \int_0^{2\pi} u = 0 \right\}$$

$$\|u\|_{C^1_{per,0}} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

$$C_{per,0} := \{ u \in C([0,2\pi]) \mid u(0) = u(2\pi), \int_0^{2\pi} u = 0 \},$$

$$\|u\|_{C_{per,0}} := \|u\|_\infty .$$

b) <u>Differentialoperator</u> $L = \frac{d}{dx}$, d.h. $Lu = u'$

$L : C^1_{per,0} \to C_{per,0}$

(beachte: $u \in C^1_{per} \Rightarrow \int_0^{2\pi} Lu = \int_0^{2\pi} u' = u(2\pi) - u(0) \underset{\uparrow}{=} 0$)

u period.

L stetig, da $\underbrace{\|Lu\|_\infty}_{= \|Lu\|_{C_{per,0}}} = \|u'\|_\infty \leq \underbrace{\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty}_{= \|u\|_{C^1_{per,0}}}$

Problem: L nicht kompakt (Diff'op'en sind "nie" kompakt)

c) <u>Inverse = Integraloperator</u>

$Lu = f \Leftrightarrow u' = f$

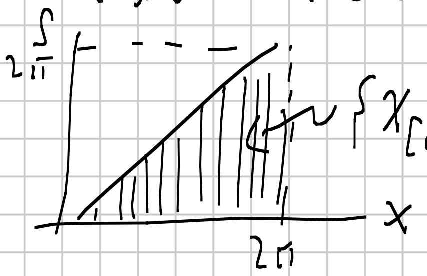
$\Leftrightarrow u$ = Stammfkt. von f mit Mittelwert 0

$$\Leftrightarrow\; u(x) = \int_0^x f(s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^x f(s)\,ds\,dx$$

$$\chi_{[0,x]}(s) := \begin{cases} 1 & s\in[0,x] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} \chi_{[0,x]}(s)\, f(s)\,ds$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} \underbrace{\chi_{[0,x]}(s)}_{=\chi_{[s,2\pi]}(x)}\,dx\Big) f(s)\,ds$$



$\{\chi_{[0,x]}(s)=1\}$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\Big(\chi_{[0,x]}(s) - \frac{2\pi - s}{2\pi}\Big)}_{=:k(x,s)} f(s)\,ds$$

Setze $(Kf)(x) := \int_0^{2\pi} k(x,s)\,f(s)\,ds$ (Integraloperator)

Es gilt: $\boxed{L^{-1} = K}$, $K: C_{per,0} \to C^1_{per,0}$

$\boxed{\text{Die Inverse des Diff'op's } L \text{ ist ein Int'op.}}$

d) <u>Kompaktheit</u> Fasse K als Operator von $C_{per,0} \circlearrowleft$ auf.

<u>Beh.</u>: $K: C_{per,0} \to C_{per,0}$ ist kompakt.

Lemma 6.5 Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Die Menge

$$A := \{ u \in C^1([a,b]) \mid \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty \leq R \}$$

ist rel. kompakt in $C([a,b])$.

Prinzip: Schranken an höhere Ableitungen liefern kompakte Mengen in Funktionenräumen.

(Bew.: Donnerstag.)

Bew. der Beh.: $K : C_{pw,0} \to C^1_{pw,0}$ stetig (da Inverse des stetigen Op's L → Satz 5.1)

$\Rightarrow$ $K\, B_1(0)$ beschränkte TM von $C^1_{pw,0}$

$\underset{\text{Lemma 6.5}}{\Rightarrow}$ — " — rel. kompakte TM von $C_{pw,0}$.

e) Spektrum von K

$\lambda \in \operatorname{spec} K \setminus \{0\}$ $\underset{\text{Thm 6.1}}{\Leftrightarrow}$ λ EW von K

$\Leftrightarrow$ $\exists f \neq 0 : \; Kf = \lambda f \;\Big|\; L \cdot, \frac{1}{\lambda}$.

$\Leftarrow$) $\quad \frac{1}{\lambda} f = Lf$

$\mu := \frac{1}{\lambda} \quad f' = \mu f \iff f(x) = C e^{\mu x}$

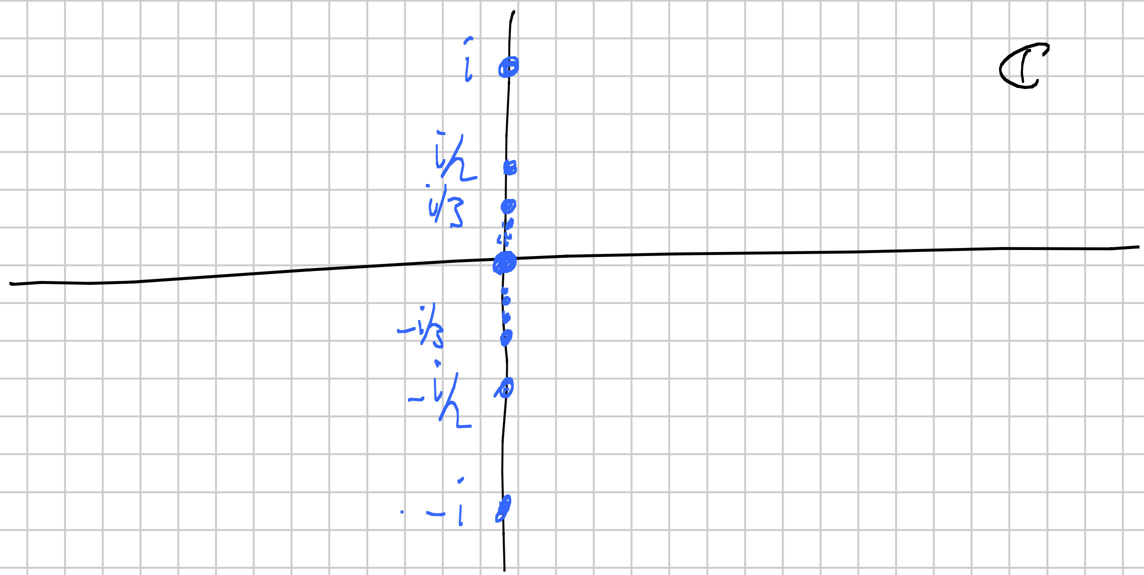
$f(0) = f(2\pi) \Rightarrow e^{\mu \cdot 2\pi} = e^{\mu \cdot 0} = 1$

$\Rightarrow \mu = ik, \ k \in \mathbb{Z}$

Also $f(x) = C e^{i\ell x}, \ \ell \in \mathbb{Z}$

$\int_0^{2\pi} f = 0 \Rightarrow k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (dh $\ell \neq 0$)

Also $\boxed{\operatorname{spec} K = \left\{ \frac{1}{ik} \right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \cup \{0\}}$



f) Die invarianten Unterräume $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Ker}\,(K-\lambda \underline{I})^n$, $\lambda \neq 0$

Beh.: $\operatorname{Ker}\,(K-\lambda \underline{I})^n = \operatorname{Ker}\,(K-\lambda \underline{I}) = \operatorname{Span}\, e^{\frac{1}{\lambda}x}$.

$\Rightarrow$

HA: $L = \frac{d^2}{dx^2}$.