Wdh: $T \in L(X,X)$

$$\operatorname{spec} T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ nicht inj. oder nicht surjektiv}\}$$

Die Einsicht, daß spec T (wie oben definiert) das korrekte ∞-dim. Analogon des Begriffs des Eigenwertes einer Matrix ist, ist eine der wichtigsten Einsichten der Mathematik des 20. Jh.

<u>Tatsache:</u> Für $\dim X < \infty$ gilt

$$T - \lambda I \text{ inj.} \iff T - \lambda I \text{ surj.},$$

folglich $\operatorname{spec} T$ = Menge der Eigenwerte von $T = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists v \neq 0 : Tv = \lambda v\}$

<u>Bsp für $X = \ell_2 =$</u> $\{a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid (\sum_j |a_j|^2)^{1/2} < \infty\}$:

$T = S^+$ Rechtsshift

$$T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

0 kein Eigenwert von T, da $Ta = 0 \cdot a \Rightarrow a = 0$

$0 \in \operatorname{spec} T$, da T nicht surjektiv

Das Spektrum eines kompakten Operators.

Fragen: 1) Ist das Spektrum "groß" oder "klein", d.h. ist $T - \lambda I$ für "typische" λ invertierbar oder nicht?

2) Was ist die Beziehung zwischen $\operatorname{spec} T$ und den Eigenwerten von T?

3) Was kann man aus $\operatorname{spec} T$ über "Normalformen" von T lernen?

Zu 3). Für $T = n \times n$ Matrix gilt: $\operatorname{spec} T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$
$\Rightarrow \exists\, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$, $p_1 + \dots + p_r = n$, sodass
in einer geeigneten Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ des $\mathbb{C}^n$

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & 0 \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B_r} \end{pmatrix}, \quad B_j : \ p_r \times p_r \text{ Matrizen},$$

$$B_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}}_{\text{diagonaler Anteil}} + \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_{m_j} \end{pmatrix}}_{\text{nilpotenter Anteil}},$$

A_k von der Form (0), $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ...

Folgerung: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert einer $n \times n$ Matrix T, dann $\exists$ Unterräume $\mathcal{U}, V$ sodass

- $\mathcal{U} \neq \{0\}$, $\mathbb{C}^n = \mathcal{U} \oplus V$
- $\mathcal{U}$ und V invariant unter T, d.h. $T(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, $T(V) \subseteq V$
- $(T - \lambda I)^j |_{\mathcal{U}} = 0$, j hinreichend groß (d.h. $T - \lambda I |_{\mathcal{U}}$ ist nilpotent)
- $T - \lambda I |_V$ ist invertierbar, d.h. $\lambda \notin \operatorname{spec} T|_V$

Bsp: $T = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right) \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T|_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{in Basis} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T|_V = \lambda_2 I$$

$$T - \lambda_1 I|_U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T - \lambda_1 I)^2|_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$T - \lambda_1 I|_V = \lambda_2 I - \lambda_1 I|_V = (\lambda_2 - \lambda_1)\, I|_V \text{ invertierbar.}$$

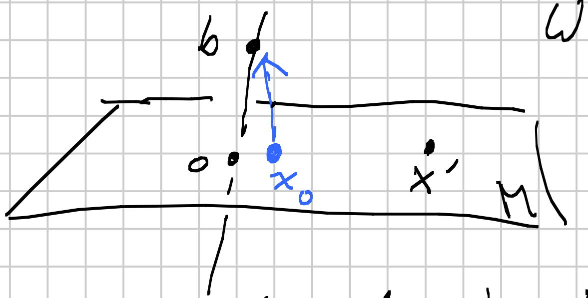
"Moral": Jeder Eigenwert λ ist assoziiert mit einer Zerlegung von $\mathbb{C}^n$ in 2 invariante UR'e. Auf dem ersten ist $T - \lambda I$ nilpotent, auf dem zweiten ist $T - \lambda I$ invertierbar

Ziel: geeignete Verallg. auf $\dim \mathfrak{X} = \infty$.
Möglich für eine recht große Klasse von Operatoren (kompakte Operatoren).

<u>Lemma 6.1</u> $\mathfrak{X}$ B-Raum, $T = I - K$, $K \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, $M \subsetneq L$ abgeschlossene Unterräume, $T(L) \subseteq M$

$\Rightarrow \exists\, a \in L \setminus M$ sodaß $\|a\| = 1$, $\|Ka - Kx\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall x \in M$.

<u>Bew.</u> $\exists\, b \in L \setminus M$ sodaß $\|b\| = 1$, $\operatorname{dist}(b, M) =: \alpha \geq \frac{1}{2}$ (wg. Satz vom fast orth. Element, Satz 1.5).



Wähle $x_0 \in M$ mit $\alpha \leq \operatorname{dist}(b, x_0) \leq 2\alpha$

$$a := \frac{b - x_0}{\|b - x_0\|} \Rightarrow \|a\| = 1$$

a hat die verlangten Eigenschaften, da $\forall x' \in M$:

$$\|x' - a\| = \underbrace{\frac{1}{\|b - x_0\|}}_{\geq \frac{1}{2\alpha}} \underbrace{\big\| x' \cdot \|b - x_0\| - (b - x_0) \big\|}_{\geq \alpha, \text{ da } x' \text{ und } x_0 \in M} \geq \frac{1}{2}$$

Setze $x' = x - Tx + Ta$ $\quad$ ($\in M$, da $x, a \in L$, also $Tx, Ta \in M$, wg. $T(L) \subseteq M$)

$$\Rightarrow \| x - a - \underbrace{(Tx - Ta)}_{= (x-a) - K(x-a)} \| \geq \frac{1}{2}$$

$$\| x - a - (Tx - Ta) \| = \| Kx - Ka \|$$

<u>Lemma 6.2</u> Sei $\overline{X}$ B-Raum, $T = I - K$, $K \in L(\overline{X}, \overline{X})$ kompakt.

Sei $\mathcal{U}_n := \operatorname{Ker}(T^n)$

$\quad V_n := \operatorname{Ran}(T^n)$

Dann gilt:

(i) $\dim \mathcal{U}_n < \infty$, $\quad \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_3 \subseteq \ldots$

$\quad \operatorname{codim} V_n < \infty$, $\quad V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \ldots$

(ii) $\exists$ kleinstes $n \in \mathbb{N}$ sodass $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_{n+1} = \ldots$ $\quad$ (!)

(iii) n wie in (ii) $\Rightarrow \overline{X} = \mathcal{U}_n \oplus V_n$ (d.h. $\mathcal{U}_n, V_n$ sind komplementäre UR'e), und $T|_{V_n} \to V_n$ invertierbar.

<u>Bew.</u>: (i) $T^n = (I - K)^n$

$$\underset{\text{binom. Formel}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-K)^k \, I^{n-k}$$

$$= \underset{k=0}{I} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-K)^k}_{\text{kompakt}}$$

Also T^n (= invertierbar + kompakt) Fredholm vom Index 0 (wg. Satz 5.3).

Also $U_n := \operatorname{Ker} T^n$ endlich dim., $V_n = \operatorname{Ran} T^n$ von endl. Codim.

(ii) Falls nicht, ist $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \dots$.

Lemma 6.1 $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_{n+1} \in U_{n+1} \setminus U_n$ mit $\|x_{n+1}\| = 1$,

$$\|K(x) - K(x_{n+1})\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in U_n \qquad (*)$$

(Vor. des Lemmas erfüllt, denn

<u>Beh.</u>: $T(U_{n+1}) \subseteq U_n$

<u>Bew</u>: $x \in U_{n+1} \Rightarrow T^{n+1} x = 0$

$$\Rightarrow \quad Tx \in \operatorname{Ker} T^n = \mathcal{U}_n. \qquad \Big(\overset{\shortparallel}{T^n (Tx)} \Big)$$

Setze $x = x_m$ in $(*)$, $m \leq n$

$$\Rightarrow \quad \| K(x_m) - K(x_{n+1}) \| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n$$

Widerspruch zur Kompaktheit von K, da wg. Kompaktheit das Bild der beschr. Menge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rel. kompakt sein müßte.

(iii): Satz 5.3 $\Rightarrow$ $\operatorname{ind}(T^m) = 0 \quad \forall m$

Also $\quad \dim \mathcal{U}_m = \operatorname{codim} V_m \quad \forall m$

(Insbes. wird die Folge $\{V_n\}$ ebenfalls konstant genau bei n.)

Reicht z.z.: $\mathcal{U}_n \cap V_n = \{0\}$, dann folgt $X = \mathcal{U}_n \oplus V_n$.

Setze $\mathcal{U} := \mathcal{U}_n$, $V := V_n$.

<u>Beh.:</u> $\quad \mathcal{U} \cap V = \{0\}$

Bew: Sei $x \in \mathcal{U} \cap V$,

$x \in \mathcal{U} \Rightarrow T^n x = 0$; $x \in V \Rightarrow \exists y \in \underline{X}: T^n y = x$

$$\Rightarrow T^{2n} y = T^n x = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{U}_{2n} \underset{(ii)}{=} \mathcal{U}_n$$

$$\Rightarrow \underset{\underset{x.}{\parallel}}{T^n y} = 0$$

Noch z.z.: $T: V \to V$ invertierbar.

Bew: $T(V) = T(V_n) \subseteq V_{n+1} \underset{(ii)}{=} V_n = V$

d.h. T bildet V in sich selbst ab

$T|_V$ Fredh. vom Index 0, also reicht es z.z.:

$T|_V$ injektiv (!)

Sei $x \in V$, $Tx = 0$. z.z.: $x = 0$.

$\exists y \in \underline{X}: T^n y = x$

$$\Rightarrow T^{n+1} y = Tx = 0 \Rightarrow y \in \underset{\underset{\ker T^{n+1}}{\parallel}}{\mathcal{U}_{n+1}} \underset{(ii)}{=} \mathcal{U}_n$$

$$\Rightarrow T^n y = 0$$

$\overset{!}{\times}$

Satz 6.1 (Das Spektrum eines kompakten Operators)

Sei X B-Raum, $K \in L(X,X)$ kompakt, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) Es gilt genau eine der folgenden Alternativen:

(i) $\operatorname{spec} K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ für n verschiedene $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\operatorname{spec} K = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{0\}$ für verschiedene $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_j \to 0$ $(j \to \infty)$

(b) Für $\dim X = \infty$ gilt $0 \in \operatorname{spec} K$

(c) $\lambda \in \operatorname{spec} K \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda$ Eigenwert von K,
aber für $\dim X = \infty$ im allg. $\lambda = 0$ kein Eigenwert

(d) $\lambda \in \operatorname{spec} K \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\, n(\lambda) \in \mathbb{N}$ sodaß

$$X = \underbrace{\operatorname{Ker}(K - \lambda I)^n}_{=: U_\lambda} \oplus \underbrace{\operatorname{Ran}(K - \lambda I)^n}_{=: V_\lambda},$$

$\dim U_\lambda < \infty$, $K(U_\lambda) \subseteq U_\lambda$, $K(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$, $\lambda \notin \operatorname{spec} K|_{V_\lambda}$.