[7.12.09]

Korollar 5.3 Seien X, Y Banachräume und $T: X \to Y$ ein Fredholmop. mit $\operatorname{Ind}(T) = 0$

Dann gilt:

$$T \text{ injektiv} \iff T \text{ surjektiv}$$

d.h. falls $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, hat die Gleichung $Tx = y$ $\forall y \in Y$ eine eindeutige Lösung x

Für Fredholmop. mit Index 0 gilt also:

[Aus ~~Existenz~~ Eindeutigkeit folgt automatisch Existenz.]

Eine Klasse von Fredholmop. vom Index 0

Def. Sei X Banachraum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt Kompakt, wenn jede Folge $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset A$ einen Häufungspunkt $x \in A$ besitzt, und relativ Kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Def. Seien X, Y Banach. Ein linearer Operator ~~heißt kompakt wenn~~

$T: X \to Y$ heißt kompakt, wenn T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet oder (äquivalent dazu), wenn $T(B_1(0))$ relativ kompakt ist. ($B_1(0) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$).

Bsp. 1) Sei $X = Y$, $\dim X = \infty$

Dann ist $T = I$ nicht kompakt (Grund: $\overline{B_1(0)}$ kompakt $\Leftrightarrow \dim X < \infty$).

2) $X = Y = \ell^2(\mathbb{N})$.

$T = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots)$ mit $\lim_{j\to\infty} t_j = 0$

ist kompakt.

Satz

Satz 5.3 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ B-Räume, $A \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ invertierbar, $K \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ kpkt

$\Rightarrow$ $T := A - K$ Fredholm mit Index 0

Bew.: OBdA $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$, $A = I$

(anderenfalls betrachte $\tilde{T} = A^{-1}T = I - A^{-1}K \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$;
beachte $A^{-1}K$ kompakt, da die Bilder kompakter
Mengen unter stetigen Abb'en wieder kpkt sind)

Schritt 1 $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$;

Schritt 2 $\operatorname{Ran} T$ abgeschlossen;

Schritt 3 $\dim \operatorname{coker} T < \infty$;

Beweisidee: Wäre $\operatorname{coker} T$ zu "groß", wäre $\operatorname{Ran} K$ zu "groß"

<u>Schritt 1</u> $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$

Angenommen, $\dim \operatorname{Ker} T = \infty$.

Als Urbild von $\{0\}$ unter stetiger Abb. T ist $\operatorname{Ker} T$ abgeschlossen, also selbst wieder Banach.

~~Auf~~ Im $\operatorname{Ker} T$ gilt $Tx = 0$, also

$$Kx = x \quad \text{, also } \underbrace{K B_1(0)}_{\substack{\text{relativ} \\ \text{kompakt,} \\ \text{da } K \text{ kompakt}}} = \underbrace{B_1(0)}_{\substack{\text{nicht kompakt} \\ \text{wg. } \dim \operatorname{Ker} T = \infty}} \quad \lightning$$

<u>Schritt 2</u>

$\operatorname{Ran}(I-K)$ abgeschlossen:

Sei $y_j \in (I-K)$, $y_j \xrightarrow[j\to\infty]{} y$. Z.z.: $y \in \operatorname{Ran} T$

Wähle $x_j \in X$ mit $Tx_j = y_j = x_j - Kx_j$. $(*)$

<u>1 Fall</u>
$\{x_j\}$ beschränkt

Da K kompakt ist, gilt für eine Teilfolge (gleiche Indizierung) $Kx_j \xrightarrow[j\to\infty]{} z$

also wegen $(*)$ ~~und~~ $x_j \to x := y+z$

und insgesamt ~~lim T~~

$$(I-K)x \underset{\substack{I,K\\ \text{stetig}}}{=} \lim_{j\to\infty} (I-K)x_j = \lim_{j\to\infty} y_j = y,$$

d.h. $y \in \operatorname{Ran} T$.

2. Fall

(x_j) unbeschränkt.

Setze $\alpha_n := \operatorname{dist}(x_n, \operatorname{Ker} T)$ und wähle

$w_n \in \operatorname{Ker} T$ mit

$\alpha_n \leq \|x_n - w_n\| \leq (1+\frac{1}{n})\alpha_n$ (möglich nach Def. von dist als inf)

Es gilt $T(x_n - w_n) = Tx_n$

- Falls α_n beschränkt ist, wende 1 Fall auf $\tilde{x}_n := x_n - w_n$ an.

Falls $\alpha_n \to \infty$ ~~(... nicht möglich)~~,

setze $z_n := \dfrac{x_n - w_n}{\|x_n - w_n\|}$

es gilt $\|z_n\| = 1$ und $Tz_n = \dfrac{Tx_n}{\|x_n - w_n\|}$, da $w_n \in \operatorname{Ker} T$.

Weiter ist $\|Tz_n\| = \dfrac{\|Tx_n\|}{\|x_n - w_n\|} = \dfrac{\|y_n\|}{\|x_n - w_n\|}$

$\leq \dfrac{C}{\|x_n - w_n\|}$ für ein C, da y_n konvergent nach Voraussetzung

$\leq \dfrac{C}{\alpha_n}$ nach Wahl der w_n

$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Also $Tz_n = z_n - Kz_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $(**)$

Da $\|z_n\| = 1$ und K kompakt existiert Teilfolge mit $Kz_n \xrightarrow[n \to \infty]{} w_0$, also wegen $(**)$

auch $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} w_0$, und wegen Stetigkeit von T und I auch $(I-K)\, w_0 = 0$, d.h. $w_0 \in \operatorname{Ker} T$

Andererseits gilt

$$\|\underbrace{(x_n - w_n)}_{\in \operatorname{Ran} T} - \underbrace{w_0 \, \|x_n - w_n\|}_{\in \operatorname{Ran} T}\| \geq \alpha_n$$

$$= \|(z_n - w_0)\, \|x_n - w_n\|\,\|$$

$$= \|z_n - w_0\| \, \|x_n - w_n\| \leq \|z_n - w_0\| \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \alpha_n ,$$

also (Division durch α_n) (~~[illegible]~~ $\forall \alpha_n \neq 0$)

$$1 \leq \underbrace{\|z_n - w_0\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)}_{\leq 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 , \lightning$$

$\Rightarrow$ α_n kann nicht beschränkt gewesen sein,

~~und~~ also kann nur 1. Fall auftreten, und

für diesen haben wir $y_j \to y$, $y_j \in \operatorname{Ran} T \Rightarrow y \in \operatorname{Ran} T$

~~gerade~~ bereits gezeigt.

Schritt 3

Zusatzannahme zur Beweisvereinfachung: X Hilbertraum

(Allg. Bew.: z.B. Werner, Satz VI.2.1 (b))

$$\operatorname{coker} T = X / \operatorname{Ran} T \underset{\uparrow}{\cong} (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$$

Ran T abg., also $[x] \mapsto P^{\perp} x$ Iso, siehe Übungen

Ann.: $\dim (\operatorname{Ran} T)^{\perp} = \infty$

Wähle ON Folge $\{e_1, e_2, e_3, \dots\} \subset (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$, dann

- $\|e_i - e_j\| = \sqrt{\langle e_i - e_j, e_i - e_j\rangle} = \sqrt{1-0-0+1} = \sqrt{2} \quad (i \neq j)$
- $e_i - e_j \in (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$

Projektionssatz $\Rightarrow$ $\|z\| = \operatorname{dist}(z, \operatorname{Ran} T) \quad \forall z \in (\operatorname{Ran} T)^{\perp}$

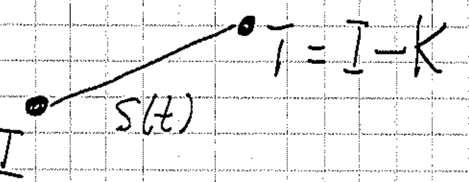
Also $\boxed{\sqrt{2} = \|e_i - e_j\| = \operatorname{dist}(e_i - e_j; \operatorname{Ran} T) \leq \|(e_i - e_j) - T(e_i - e_j)\| = \|Ke_i - Ke_j\|}$ $(i \neq j)$

Also $\{Ke_1, Ke_2, \dots\}$ nicht rel. kompakt, obwohl Bild der beschränkten Menge $\{e_1, e_2, \dots\}$. $\lightning$ zu K kompakt

Schritt 4 $\quad \mathrm{ind}(T) = 0$

Betrachte die Abb. $S : [0,1] \longrightarrow L(\underline{X}, \underline{Y})$

$$S(t) = \underline{I} - tK$$

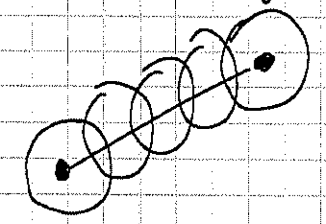


Schritt 1–3 $\Rightarrow$ $S(t)$ Fredholm $\forall t$

Satz 5.2 $\Rightarrow$ $\forall t \; \exists \delta > 0 : \; B_\delta(S(t)) \subset \tilde{F}(\underline{X}, \underline{X}), \; \mathrm{ind}\big|_{B_\delta(S(t))} \equiv \text{const}$

$\mathcal{S} := \{ S(t) \mid t \in [0,1] \}$ (als Bild der kompakten Menge $[0,1]$ unter der stetigen Abb. S) kompakt

$\Rightarrow$ die Überdeckung $\{ B_\delta(S(t)) \}_{t \in [0,1]}$ von $\mathcal{S}$ besitzt eine endl. Teilüberdeckung $B_\delta(S(t_1)), \ldots, B_\delta(S(t_N))$



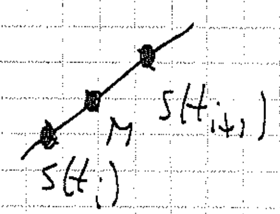
OBdA $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$. Es gilt $B_\delta(S(t_{i+1})) \cap B_\delta(S(t_i)) \neq \emptyset$

(andernfalls wäre der Mittelpkt der Strecke $[S(t_i), S(t_{i+1})]$,

$M := \underbrace{\frac{S(t_i) + S(t_{i+1})}{2}} = S\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)$, nicht in beiden Kugeln,

also z.B. $\notin B_\delta(S(t_i))$, d.h.

$$\| S(t_i) - M \| = \left\| \frac{S(t_i) - S(t_{i+1})}{2} \right\| \geq \delta$$



$$\Rightarrow \| S(t_{i+1}) - M \| = \| - \text{—}'' \text{—} \| \geq \delta$$

$\Rightarrow \quad M \notin B_\delta(S(t_{i+1})) \cap B_\delta(S(t_i))$, $\lightning$ zur Überdeckungseigenschaft der $B_\delta(S(t_i))$)

Also $\mathrm{ind}\big|_{B_\delta(S(t_1)) \cup \ldots \cup B_\delta(S(t_N))} \equiv \text{const}$

Insbesondere $\underbrace{\mathrm{ind}(S(0))}_{= I} = \underbrace{\mathrm{ind}(S(1))}_{= I - K}$

<u>Bem.</u> Das Argument in Schritt 4 zeigt: $S : [0, T] \to \mathcal{F}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ stetig (d.h. S stetiger Weg in der Menge d. Fredholm op'en)

$\Rightarrow \quad \mathrm{ind}(S(t)) \equiv \text{const}$.

Korollar 5.4 Sei X Banachraum, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $K \in L(X,X)$ kompakt

$\Rightarrow K - \lambda I \in \mathcal{F}(X,X)$, $\operatorname{ind}(K - \lambda I) = 0$

Bem.: Die Operatoren $T - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ spielen eine wichtige Rolle: $\rightarrow$ § 6

---

§ 6 Das Spektrum

Def. Sei X Banachraum, $T \in L(X,X)$.

$\operatorname{spec} T := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ nicht bijektiv}\}$ (Spektrum von T)

$\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \{\operatorname{spec} T\}$ (Resolventenmenge von T)

Proposition 6.1

(i) $\rho(T)$ ist offen

(ii) $\operatorname{spec} T$ ist abgeschlossen.

Bew.:

- (ii) folgt aus (i)

- (i) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Satz 4.1 $\Rightarrow (T-\lambda_0 I)^{-1} \in L(X,X)$.

  Satz 5.1:

  Falls $\| S-(T-\lambda_0 I)\| < \dfrac{1}{\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|}$ gilt,

  ist S ebenfalls invertierbar. Wähle $S = T-\lambda I$,

  $|\lambda-\lambda_0| < \dfrac{1}{\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|}$.

  Dann ist $\| S-(T-\lambda_0 I)\| = \| -(\lambda-\lambda_0) I\| = |\lambda-\lambda_0| \underbrace{\|I\|}_{=1}$

  $< \dfrac{1}{\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|}$,

  d.h. $S = T-\lambda I$ stetig invertierbar und daher

  $\lambda \in \rho(T)$.