Ziel: Beweis von Satz 5.2

Hilfsmittel: Quotienten von VR^{en};
Direkte Summen von VR^{en};
Erhalt von Invertierbarkeit unter kleinen Störungen (Satz 5.1).

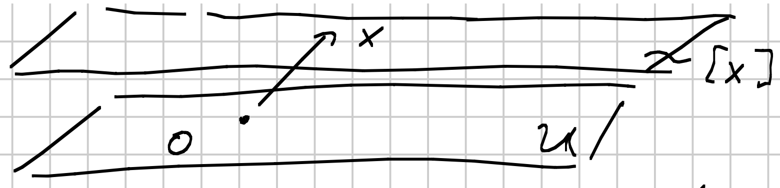
Lemma 5.2 (Vollständigkeit von Quotientenvektorräumen)

Sei X B-Raum, U abgeschlossener Unterraum
$\Rightarrow X/U$ versehen mit der Norm $\|[x]\| := \inf_{u \in U} \|x+u\|$
ist B-Raum.

Bew.: (i) Beweis der Normeigenschaft:

Wdh.: $x \in X \Rightarrow [x] := \{x+u \mid u \in U\}$

Homog.: $\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| = \inf_{u \in U} \|\lambda x + u\|$



$$\overset{\text{OBdA } \lambda \neq 0}{=} \inf_{u \in U} \| \lambda (x + \underbrace{\tfrac{1}{\lambda} u}_{=: u' \in U}) \|$$

$$= \inf_{u' \in U} \| \lambda (x + u') \|$$

$$\underset{\text{Homog. d. Norm. auf } X}{=} \lambda \underbrace{\inf_{u' \in U} \| x + u' \|}_{= \| [x] \|}$$

Dreiecksungl.: analog

Positivität: z.z.: $\| [x] \| = 0 \implies [x] = 0$

$$\| [x] \| = 0 \implies \inf_{u \in U} \| x + u \| = 0$$

$$\underset{u' = -u}{\implies} \inf_{u' \in U} \| x - u' \| = 0$$

$$\implies \exists\, u_j' \in U : \| x - u_j' \| \to 0$$

d.h. $u_j' \to x$.

$\Rightarrow \quad x \in \overline{\mathcal{U}}$

$\mathcal{U}$ abgeschlossen $\Rightarrow \quad x \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \quad [x] = [0] = 0_{\underline{X}/\mathcal{U}}$.

(ii): $\underline{X}/\mathcal{U}$ vollständig: Siehe z.B. Werner, Satz I.3.2.
Spezialfall: $\underline{X}$ Hilbertraum: Siehe Übungen.

Lemma 5.3 $\underline{X}, \underline{Y}$ B-Räume, $T \in L(\underline{X}, \underline{Y})$, $\dim(\operatorname{Coker} T)$ $(= \dim \underline{Y}/\operatorname{Ran} T) < \infty$
$\Rightarrow \operatorname{Ran} T$ abgeschlossen.

[D.h. unter den Vor'en von Satz 5.2 ist $\operatorname{Ran} T$ B-Raum.]

Bew.: Sei $n := \dim \operatorname{Coker} T$.
Wähle Basis $[y_1], \dots, [y_n]$ in $\operatorname{Coker} T$, $y_1, \dots, y_n \in \underline{Y}$.

Fall 1: T injektiv

Hilfsoperator: $\hat{T} : X \times \mathbb{K}^n \longrightarrow Y$

$$\hat{T}(x, \alpha) := Tx + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

$\hat{T}$ linear und stetig (Norm auf $X \times \mathbb{K}^n$: $\|(x,\alpha)\| := \|x\| + \|\alpha\|$)

$$\|\hat{T}(x,\alpha)\| \leq \|Tx\| + \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \, \|y_i\|$$

$$\leq \|T\| \, \|x\| + \sqrt{\sum_{i=1}^n \|y_i\|^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}}_{= \|\alpha\|}$$

$$\leq \max\left\{\|T\|, \sqrt{\sum_{i=1}^n \|y_i\|^2}\right\} \underbrace{(\|x\| + \|\alpha\|)}_{= \|(x,\alpha)\|}$$

Beh. 1: $\hat{T}$ injektiv

Bew: $\hat{T}(x, \alpha) = 0$

$$\Rightarrow Tx + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 0_{Y/\operatorname{Ran} T} = [\hat{T}(\alpha, x)] = \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [y_i]$$

$\Rightarrow$ (da $[y_1], \dots, [y_n]$ Basis von coker T)

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad Tx = 0$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad x = 0$$

T inj. nach Ann.

<u>Beh. 2</u>: $\hat{T}$ surjektiv

<u>Bew</u>: Ist $y \in \overline{Y}$, so gibt es $\alpha_i \in \mathbb{K}$ mit

$$[y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [y_i] \qquad (\text{da } [y_1], \dots, [y_n] \text{ Basis}).$$

$$\Rightarrow \left[y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right] = 0$$

$$\Rightarrow y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in \operatorname{Ran} T, \text{ d.h. } = Tx \text{ für ein } x \in \overline{X}$$

$$\Leftrightarrow y = Tx + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \underset{\text{Def. von } \hat{T}}{=} \hat{T}(x, \alpha).$$

Satz v. d. beschränkten Inversen (Satz 4.1) $\Rightarrow \hat{T}^{-1}$ stetig.

Also $\operatorname{Ran} T$ = Urbild unter $\hat{T}^{-1}$ der abg. Menge $\overline{X} \times \{0\}$

(= Bild unter $\hat{T}$ der abg. Menge $\overline{X} \times \{0\}$)

Also $\operatorname{Ran} T$ (als Urbild einer abg. Menge unter einer stetigen Fkt.) abg.

<u>Fall 2:</u> T nicht injektiv

<u>Idee:</u> "Mache T injektiv" durch Verkleinerung des Def.-Ber.

Sei $\hat{X} := \overline{X} / \operatorname{Ker} T$

$\operatorname{Ker} T$ endlichdim., also abgeschlossen $\overset{\text{Lemma 5.2}}{\Rightarrow}$ $\hat{X}$ Banachraum

<u>Beh.:</u> Der folgende Operator ist injektiv:

$$\hat{T}[x] := Tx$$

$$\hat{T} : \overline{X} / \operatorname{Ker} T \longrightarrow \overline{Y}$$

$\hat{T}$ wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $x \in [x]$:

$$x' \in [x] \implies x' - x \in \operatorname{Ker} T$$

$$\implies Tx' \overset{T \text{ lin.}}{=} Tx + \underbrace{T(x'-x)}_{=0}$$

<u>Bew., daß $\hat{T}$ inj.:</u>

$$\hat{T}[x] = 0 \implies Tx = 0$$

$$\implies x \in \operatorname{Ker} T$$

$$\implies [x] = [0] = 0_{\hat{X}}$$

<u>Beh.</u>: $\hat{T}$ stetig

<u>Bew.</u>: Sei $x \in X$. Wdh: $\|[x]\| = \inf_{u \in \operatorname{Ker} T} \|x + u\|$.

Wähle Folge $u_j \in \operatorname{Ker} T$ mit $\|x + u_j\| \to$ —//— .

$$\|\hat{T}[x]\| = \|\hat{T}[x + u_j]\| \leq \|T(x + u_j)\|$$

$$\leq \|T\| \, \|x + u_j\|$$

$$\overset{j\to\infty}{\Rightarrow} \|\hat{T}[x]\| \leq \|T\| \underbrace{\inf_{u \in \operatorname{Ker} T} \|x + u\|}_{= \|[x]\|}.$$

<u>Beh.</u>: $\operatorname{Ran} \hat{T} = \operatorname{Ran} T$.

Klar wg. $\hat{T}[x] = Tx \quad \forall x \in X$.

Wende Fall 1 an auf $\hat{T} : X/_{\operatorname{Ker} T} \to Y$.

$=$

<u>Lemma 5.4</u> (Existenz abgeschlossener Komplemente)

Sei X B-Raum, U endlichdim. UR $\Rightarrow \exists$ abgeschlossenes Komplement von U.

<u>Def.</u> (siehe Lin. Alg.) X VR, U UR. Ein UR W heißt <u>Komplement</u> von U, Schreibweise: $X = U \oplus W$, wenn zu jedem $x \in X$ eindeutige $u \in U$, $w \in W$ existieren mit $x = u + w$.

Bem.: ⚠ Vor. "U endlichdim." kann nicht durch "U abgeschlossen" ersetzt werden. z.B.:

- c_0 (Nullfolgen) hat kein abg. Kompl. in ℓ^∞ (beschr. Folgen)
- $C([0,1])$ (stetige Fkt'en) —— // —— in $L^\infty([0,1])$.

Bew. von Satz 5.2: Idee: "Mache T bijektiv"

$\operatorname{Ker} T$ endlichdim. $\overset{\text{L 5.4}}{\Longrightarrow}$ $\exists V$ abg. UR von $\bar{X}$ mit $\boxed{\bar{X} = V \oplus \operatorname{Ker} T}$

$\boxed{\underline{Y} = W \oplus \operatorname{Ran} T}$, $\operatorname{Ran} T$ abg. nach L 5.3, $W = \operatorname{Span}\{y_1, \dots, y_n\}$ wie im Bew. von L 5.3

zu $S \in L(X,Y)$ sei

$$\tilde{S} : V \times W \longrightarrow \underline{Y}$$
$$\tilde{S}(v, w) := Sv + w$$

$\tilde{S}$ lin. und stetig

$\tilde{T}$ bijektiv

Satz 5.1 $\Rightarrow$ $\tilde{S}$ bijektiv falls $\|\tilde{S} - \tilde{T}\|$ klein.

Aber $(\tilde{S} - \tilde{T})(v,w) = (Sv + \cancel{w}) - (Tv + \cancel{w})$

$= (S - T)v$

$\Rightarrow \|\tilde{S} - \tilde{T}\| = \|S - T\|$

Also $\tilde{S}$ bijektiv falls $\|S - T\|$ klein.

Also (weg. Konstruktion von $\tilde{S}$) S Fredholm.

$\Rightarrow$ (i).