Reformulierung von Satz 5.1: Seien X, Y Banachräume. Die Menge der invertierbaren Operatoren in $L(X, Y)$ ist eine offene Teilmenge von $L(X, Y)$.

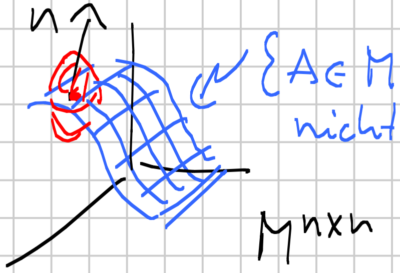
Fragen über $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong M^{n\times n}$:

① Enthält die Menge der nicht-invertierbaren Matrizen ebenfalls eine offene Menge?

② Gibt es "mehr" invertierbare oder "mehr" nicht-inv'bare Matrizen?

③ Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig gewählte Matrix inv'bar?

zu ①:



$\{A \in M^{n\times n} \mid \det A = 0\} =: N$

nicht invertierbare Matrizen

Hyperfläche der Codim. 1

$A \in \mathcal{N} \Rightarrow A + \varepsilon \vec{n}$, ε klein, $\varepsilon \neq 0$, $\notin \mathcal{N}$

Also <u>Nein.</u>

(2) : "mehr" invertierbar

(3) : z.B. Gaußverteilte Komponenten: invertierbar mit Wahrscheinlichkeit 1. ($\{\det A = 0\}$ hat Maß 0)

Weitere Eigenschaft: (4) Menge der invertierbaren Matrizen liegt <u>dicht</u> in $M^{n\times n}$, d.h. $\forall A \in M^{n\times n}$ $\exists$ A_j, invertierbar, mit $\|A_j - A\| \to 0$.

=

(1) im Unendlichdimensionalen: Enthält $\{T \in L(X,Y) \mid T \text{ nicht inv'bar}\}$ eine offene Menge?

(4) liegt die Menge $\{T \in L(X,Y) \mid T \text{ inv'bar}\}$ dicht in $L(X,Y)$?

Definition des Index (Maß für Nichtinvertierbarkeit)

Def.: (Quotient von Vektorräumen, Wdh. aus Lin. Alg.)

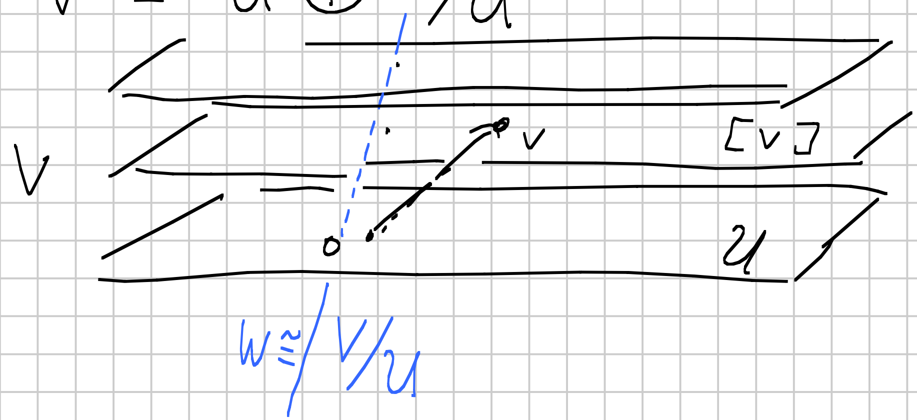
V VR, U Unterraum.

$[v] := \{ v + u \mid u \in U \}$ Äquivalenzklasse von $v \in V$ bzgl. U

$\{ [v] \mid v \in V \} =: V/U$ Menge d. Äquivalenzklassen

$[v] + [v'] := [v + v']$ (Add. = Add. v. Repräs.)

$V \cong U \oplus V/U$



W Komplement von $\mathcal{U}$ (d.h. $V = \mathcal{U} \oplus W$, d.h. zu jedem $v \in V$ $\exists!\, u \in \mathcal{U}$, $\exists!\, w \in W$ sodaß $v = u + w$) $\Rightarrow$ $W \cong V/\mathcal{U}$.

<u>Def.</u> Sei $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ linearer Operator zwischen Vektorräumen. Der Quotientenvektorraum

$$\mathfrak{Y}/\operatorname{Ran} T =: \operatorname{coker} T$$

heißt Co-Kern von T.

Zwei Zahlen $\in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, die das Ausmaß der Nichtinvertierbarkeit von T "messen":

$\dim \operatorname{Ker} T$ $\longleftrightarrow$ Ausmaß d. Nicht-injektivität

$\dim \operatorname{Coker} T$ $\longleftrightarrow$ —"— surjektivität

T invertierbar $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Coker} T = 0$

__Def.__ Seien $\bar{X}, \bar{Y}$ Banachräume, $T \in L(\bar{X}, \bar{Y})$. T heißt __Fredholmoperator__, wenn

(i) $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$

(ii) $\dim \operatorname{Coker} T < \infty$.

Die Zahl

$$\dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T =: \operatorname{ind}(T) \in \mathbb{Z}$$

heißt __Fredholm-Index__ (oder Index) von T. Die Menge der Fredholmoperatoren wird mit $\mathcal{F}(\bar{X}, \bar{Y})$ bezeichnet.

__Satz 5.2__ Seien $\bar{X}, \bar{Y}$ Banachräume. (i) Für alle $T \in \mathcal{F}(\bar{X}, \bar{Y})$ existiert $\delta > 0$ sodaß $S \in \mathcal{F}(\bar{X}, \bar{Y})$ für alle $S \in L(X, Y)$ mit $\|T - S\| < \delta$. D.h. $\mathcal{F}(\bar{X}, \bar{Y})$ ist offene Teilmenge von $L(\bar{X}, \bar{Y})$.

(ii) Der Index $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(\bar{X}, \bar{Y}) \to \mathbb{Z}$ ist lokal konstant, d.h. $\forall T \in \mathcal{F}(\bar{X}, \bar{Y})\ \exists \delta > 0$:

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(S) \quad \forall S \in L(X, Y) \text{ mit } \|T - S\| < \delta.$$

__Beispiele__ $\quad X = Y = \ell^2 = \left\{ (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \;\middle|\; a_j \in \mathbb{K}, \left(\sum_j |a_j|^2\right)^{1/2} < \infty \right\}$

1) __Rechtsshift__ (vgl. §2):

$$S^+(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$\dim \operatorname{Ker} S^+ = 0$

$$\operatorname{Ran} S^+ = \left\{ (b_1, b_2, b_3, \dots) \in \ell^2 \;\middle|\; b_1 = 0 \right\}$$

$$\operatorname{Coker} S^+ = \ell^2 / \operatorname{Ran} S^+ \cong \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, \dots)\}$$

$\dim \operatorname{Coker} S^+ = \underline{1}$

$\operatorname{ind}(S^+) = \dim \operatorname{Ker} S^+ - \dim \operatorname{Coker} S^+ = \underline{-1}$

2) __Linksshift__ (vgl. §2):

$$S^-(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$$

$$\operatorname{Ker} S^- = \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, \dots)\}$$

$\dim \operatorname{Ker} S^- = \underline{1}$

$\operatorname{Ran} S^- = \ell^2$, denn zu $b = (b_1, b_2, \dots) \in \ell^2$ ist

$S^-(0, b_1, b_2, \dots) = b$.

$\operatorname{Coker} S^- = \{0\}$

$\dim \operatorname{Coker} S^- = 0$

$\operatorname{ind}(S^-) = +1$

3) $\operatorname{ind}((S^+)^n) = -n$ n-facher Rechtsshift

$\operatorname{ind}((S^-)^n) = n$ —"— Linksshift

4) $A_t(a_1, a_2, a_3, \dots) = (ta_1, a_2, a_3, \dots) \quad t \in \mathbb{R}$

(a) $A_0(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_2, a_3, \dots)$

$\dim \ker A_0 = 1 \quad (\ker A_0 = \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, \dots)\})$

$\dim \operatorname{Coker} A_0 = 1 \quad (\operatorname{Coker} A_0 \cong \operatorname{Span}\{(1, 0, 0, \dots)\})$

$\operatorname{ind}(A_0) = 1 - 1 = 0$

(b) $A_t, t \neq 0$:

A_t invertierbar, $(A_t)^{-1} = A_{1/t}$

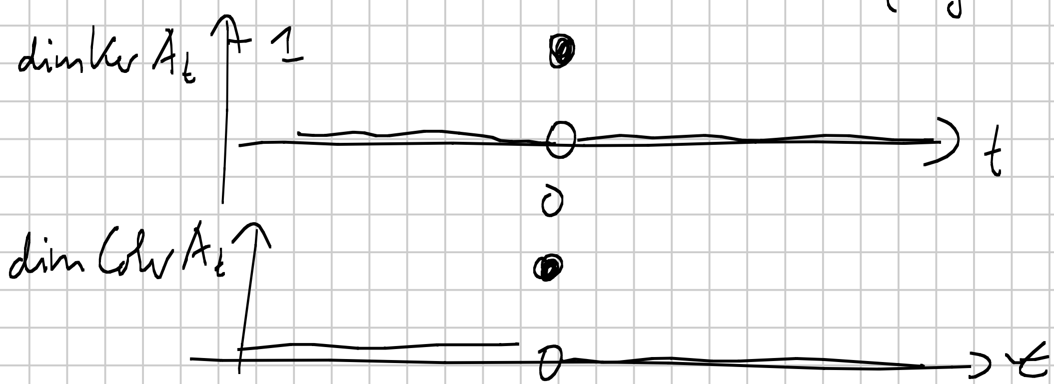
d.h. $(A_t)^{-1}(a_1, a_2, a_3, \ldots) = \left(\frac{1}{t} a_1, a_2, a_3, \ldots\right)$

$\dim \operatorname{Ker} A_t = 0$

$\dim \operatorname{Coker} A_t = 0$

$\operatorname{ind}(A_0) = 0 - 0 = 0$

D.h. weder $\dim \operatorname{Ker} A_t$
noch $\dim \operatorname{Coker} A_t$
sind auf einer Umg. von A_0 konstant,
aber der Index ist dort (wg. Satz 5.2) konstant.



5) T invertierbar $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Coker} T = 0$

$$\underset{\text{i.a.}}{\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}} \quad \operatorname{ind}(T) = 0.$$

(siehe A_0)

<u>Korollar 5.1</u> In $L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $\mathbb{X}=\mathbb{Y}=\ell^2$, existiert eine offene Menge nicht-invertierbarer Operatoren (!)

<u>Bew:</u> Wähle $T \in \mathcal{F}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ mit $\operatorname{ind}(T) \neq 0$ (z.B. $T = S^+$). Satz 5.2 $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0: \forall S \in B_\delta(T) = \{ S \in L(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \mid \|T-S\| < \delta \}$ gilt $S \in \mathcal{F}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ mit $\operatorname{ind}(S) \neq 0$. Insbes. alle $S \in B_\delta(T)$ nicht invertierbar.

<u>Korollar 5.2</u> Die Menge der invertierbaren Op'en in $L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, $\mathbb{X}=\mathbb{Y}=\ell^2$, liegt nicht dicht in $L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

<u>Bew.:</u> Klar wg. Kor. 5.1.