Bisher gezeigte Aussagen im Zshg mit dem Baire'schen Kategoriensatz (Lemma 4.1):

- Satz v. d. beschränkten Inversen
- —"— offen Abb.

Weitere Aussagen (heute):

- Satz v. Banach–Steinhaus (ptweise vs. glm. Beschränktheit von Folgen linearer Operatoren)
- Satz vom abgeschlossenen Graphen (Charakterisierung v. Stetigkeit eines lin. Op.)

<u>Def.</u>: Seien $\underline{X}$, $\underline{Y}$ normierte VR^e, $\underline{I}$ eine Indexmenge, $T_i \in L(\underline{X}, \underline{Y})$ $\forall i \in \underline{I}$. Die T_i heißen

(a) <u>punktweise beschränkt</u>, wenn $\sup_{i \in \underline{I}} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in \underline{X}$

(b) <u>gleichmäßig beschränkt</u>, —"— $\sup_{i \in \underline{I}} \|T_i\|_{L(X,Y)} < \infty$.

Bsp: $X = Y = d = \{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{K}$, alle bis auf endlich viele $a_n = 0 \}$, Supremumsnorm

(a) $T_i = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & & 0 \\ & & i & \\ 0 & & & 0 \ddots \end{pmatrix}$ $\leftarrow i$, d.h. $(T_i a)_n = \begin{cases} i\, a_n & n = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\uparrow$
i

$T_i a = (0, \dots, 0, i a_i, 0, \dots)$

a hat nur endl. viele von Null verschiedene Glieder

$\Rightarrow \exists N_a \in \mathbb{N}: \quad a_n = 0$ für alle $n > N_a$.

$\Rightarrow \quad T_i a = 0$ für alle $i \geq N_a$.

$\Rightarrow \quad \sup_{i\in\mathbb{N}} \|T_i a\| = \max_{1 \leq i \leq N_a} |i a_i| < \infty$

d.h. T_i punktweise beschr.

(b) $\|T_i\|_{L(d,d)} = i$, da $\dfrac{\|T_i e_i\|}{\|e_i\|} = \cancel{1}\, i$, $e_i := (0, \dots, \underset{\uparrow\, i\text{-te Stelle}}{i}, 0, \dots)$

Also T_i nicht glm. beschr.

Satz 4.3 (Satz v. Banach-Steinhaus)

Sei $\mathbb{X}$ Banachraum, $\mathbb{Y}$ normierter VR, I eine Indexmenge, $T_i \in L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ $\forall i \in I$. Falls T_i punktweise beschränkt, ist T_i automatisch gleichmäßig beschränkt. (!)

[Bsp zeigt: Vor., daß $\mathbb{X}$ vollständig, kann nicht weggelassen werden.]

Beweis Idee: Benutze $\mathbb{X} \neq$ abzählb. Vereinig. nirgends dichter Mengen

Nach Vor.: $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in \mathbb{X} \qquad (*)$

z.z.: $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(X,Y)} < \infty$

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{X} \;\middle|\; \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq n \right\} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(*) \Rightarrow \quad \mathbb{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n .$$

E_n abgeschlossen, denn sei $\{x_\nu\}$ eine Folge mit

$x_\nu \in E_n$, $x_\nu \longrightarrow x$ $\overset{T_i \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $T_i x_\nu \to T_i x \quad \forall i$

$\underset{\|\cdot\| \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $\|T_i x_\nu\| \longrightarrow \|T_i x\| \quad \forall i$

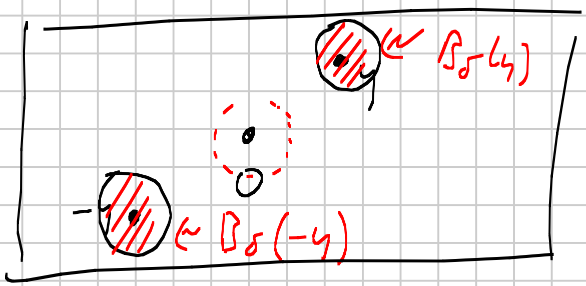
$$\Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i x\| = \sup_{i \in I} \lim_{\nu \to \infty} \underbrace{\|T_i x_\nu\|}_{\le n, \text{ da } x_\nu \in E_n} \le n.$$

Also $x \in E_n$.

$X \neq$ abz. Vereinig. nirgends dichter Mengen (wg. Baire, Lemma 4.1)

$\Rightarrow \exists E_n$ mit E_n nicht nirgends dicht, d.h. $\overline{E_n} \supseteq B_\delta(y)$, $\delta > 0$.

E_n abg. $\Rightarrow$ $\boxed{E_n \supseteq B_\delta(y)}$, $\delta > 0$.



Aber auch $-B_\delta(y) \subseteq E_n$

da $\|T_i(-x)\| = \|T_i x\|$

also $x \in E_n \Rightarrow -x \in E_n$.

Sei $u \in B_\delta(0)$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(u+y)}_{\substack{\in -B_\delta(y) \\ \subseteq E_n}} + \underbrace{(u-y)}_{\substack{\in B_\delta(y) \\ \subseteq E_n}}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \|T_i u\| \leq \frac{1}{2} \underbrace{\|T_i(u+y)\|}_{\leq n} + \frac{1}{2} \underbrace{\|T_i(u-y)\|}_{\leq n} \leq n$$

d.h. $u \in E_n$.

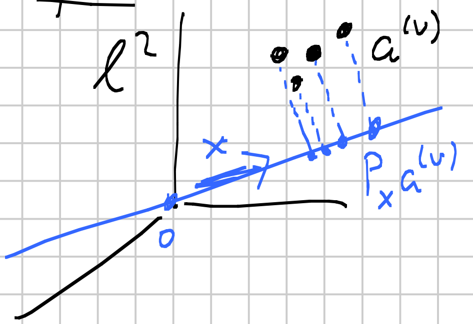
Also:
$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(X,Y)} \underset{\substack{\text{Def. d.} \\ \text{Operatornorm}}}{=} \sup_{i \in I} \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T_i u\|}{\|u\|}$$

$$= \quad -\!\!/\!/\!\!- \quad \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\| = \delta/2}} \quad -\!\!/\!/\!\!-$$

$$\|u\| = \delta/2 \Rightarrow u \in E_n \;\nearrow\; \leq \quad \sup_{i \in I} \sup_{u \in X, \|u\| = \delta/2} \frac{n}{\delta/2} = \frac{n}{\delta/2}.$$

Also T_i glm. beschränkt.

Bsp: $a^{(\nu)} \in \ell^2$ beliebige Folge



$P_x a^{(\nu)}$ Projektionen von $a^{(\nu)}$ auf den 1D Unterraum $\operatorname{Span}\{x\}$, $x \in \ell^2$, $\|x\| = 1$.

D.h. $P_x a^{(\nu)} = \langle a^{(\nu)}, x \rangle x$

(Siehe Proj.satz, § 3.)

Beh.: Falls $\underbrace{P_x a^{(\nu)} \text{ beschr.}}$ $\forall x \in \ell^2$, $\|x\| = 1$, ist $a^{(\nu)}$ beschr.

$\Leftrightarrow \|P_x a^{(\nu)}\| = |\langle a^{(\nu)}, x \rangle| \cdot 1$ beschr.

$\Leftrightarrow \langle a^{(\nu)}, x \rangle$ beschr.

Bew.: $T_\nu(x) := \langle a^{(\nu)}, x \rangle$ $\qquad T_\nu \in L(\ell^2, \mathbb{K})$

Punktweise beschränkt, da

$\|T_\nu x\|_{\mathbb{K}} = |\langle a^{(\nu)}, x \rangle|$, also beschr. n.V.

Also nach Banach-Steinhaus glm. beschr., d.h.

$$\sup_v \|T_v\|_{L(\ell^2,\mathbb{K})} < \infty$$

Ausrechnen, was $\|T_v\|_{L(\ell^2,\mathbb{K})}$ ist:

$$\|T_v\|_{L(\ell^2,\mathbb{K})} = \sup_{x\in\ell^2\setminus\{0\}} \frac{\|T_v x\|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_{\ell^2}}$$

$$= \sup_{x\in\ell^2\setminus\{0\}} \frac{|\langle a^{(v)}, x\rangle|}{\|x\|}$$

$$= \frac{|\langle a^{(v)}, a^{(v)}\rangle|}{\|a^{(v)}\|} = \|a^{(v)}\|.$$

Inneres Produkt
$\langle a, y\rangle$ maximal bzgl. $\|y\|=1$
wenn $y \parallel a$

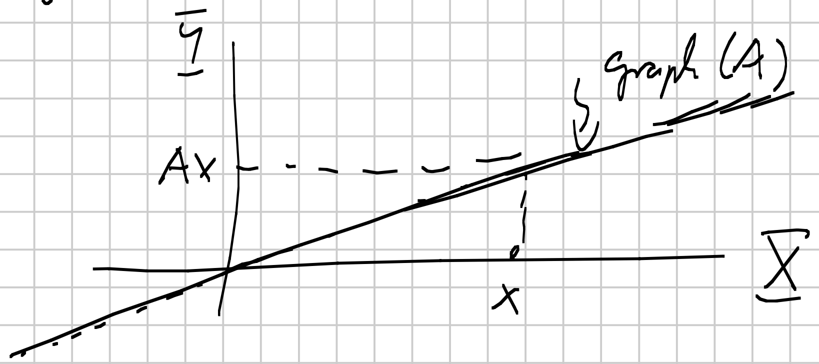
$=$

__Satz 4.4__ (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

X, Y Banachräume, $A: X \to Y$ linearer Operator,

$$\operatorname{graph}(A) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = Ax\}$$

abgeschlossen (als Teilmenge von $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$) $\Rightarrow$ A stetig.



Bew. und Erläuterungen: Siehe Lösungen. [Direktes Korollar aus Satz v. d. offenen Abb.]

§ 5 Invertierbarkeit

Wie untersucht ich, ob eine lineare Abb. T invertierbar ist, d.h. ob die Gl. $Tx = y$ für alle rechten Seiten y eine eind. Lsg besitzt?

Drei Methoden

1. Störungstheorie (perturbation theory)
   T liegt nahe an einem bereits als invertierbar bekannten Operator
2. Variationsmethoden
   Nur im Hilbertraum
3. Index-Theorie
   Schwieriger; Aussagen auch für nicht inv. Op'en

1 Störungstheorie

Satz 5.1 $\underline{X}, \underline{Y}$ Banachräume, $T \in L(\underline{X}, \underline{Y})$ invertierbar
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : S \in L(\underline{X}, \underline{Y})$ invertierbar $\forall \|T - S\|_{L(X,Y)} < \delta$.

Bew: mithilfe von

Lemma 5.1 (Banach'scher Fixpunktsatz)
$\underline{X}$ Banachr., $f : \underline{X} \to \underline{X}$ beliebige (nicht notwendig lineare) Abbildung, $\exists \gamma \in (0,1)$:

$$\|f(x) - f(x')\| \le \gamma \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in \underline{X}$$

$\Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt $x_* \in \underline{X}$
(d.h. $f(x_*) = x_*$).

Bew: siehe Analysis 2.

Bew. von Satz 5.1

S invertierbar

$\Leftrightarrow \quad \forall y \in Y \ \exists$ genau ein $x \in X$: $\quad Sx = y$

$\Leftrightarrow \quad -S$ invertierbar

$\Leftrightarrow \quad \forall y \in Y \ \exists$ genau ein $x \in X$; $\quad -Sx = y$

(nämlich $x = -$ die Lsg. von $Sx = y$)

$\overset{+Tx}{\Leftrightarrow}$ ——— // ——— $\quad (T - S)x = y + Tx$

$\overset{T^{-1}}{\Leftrightarrow}$ ——— // ——— $\quad (I - T^{-1}S)x - T^{-1}y = x$

$\Leftrightarrow$ ——— // ——— $\quad x$ Fixpkt von

$f_y(x) := (I - T^{-1}S)x - T^{-1}y$

$$\|f_y(x) - f_y(x')\| = \|(I - T^{-1}S)(x - x')\|$$

$$\leq \underbrace{\|I - T^{-1}S\|_{L(X,X)}} \quad \|x - x'\|$$

$$\|T^{-1}(T-S)\|_{L(X,X)}$$

$$\leq \underbrace{\|T^{-1}\|}_{<\infty \text{ nach Satz 4.1}} \|T-S\| \leq \gamma < 1 \quad \text{falls } \|T-S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} =: \delta$$

Also S inv. nach B. FPS