[Wdh.: $\underline{X}$ vollst. metr. Raum $\Rightarrow$ $\underline{X} \neq$ abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen]

Satz 4.2 (Satz von der offenen Abbildung)

$T : \underline{X} \to \underline{Y}$ stetige lineare surjektive Abb. zwischen Banachräumen $\Rightarrow$ T offen, d.h. die Bilder offener Mengen sind offen.

Bew. von Satz 4.1 (Satz v. d. beschränkten Inversen) via Satz 4.2:

T zusätzlich injektiv, $\mathcal{U}$ offene Menge in $\underline{X}$

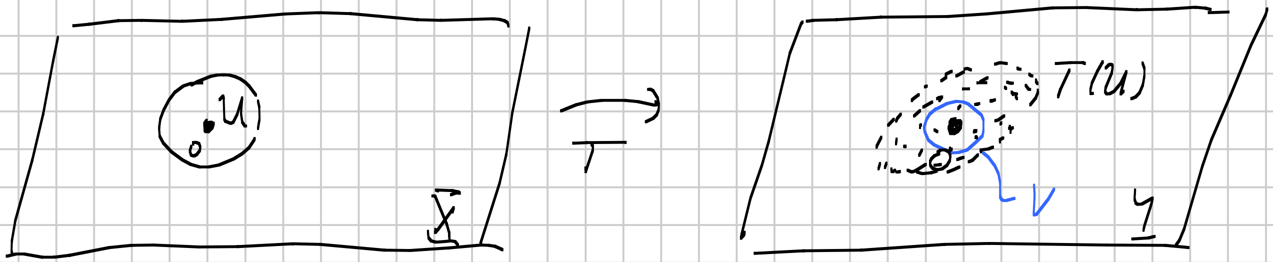
$f := T^{-1}$ z.z.$^{*)}$: $f^{-1}(\mathcal{U}) =$ Urbild von $\mathcal{U} = \{ y \in \underline{Y} \mid f(y) \in \mathcal{U} \}$ offen

Bew: $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{ y \in \underline{Y} \mid T^{-1}y \in \mathcal{U} \} = \{ y \in \underline{Y} \mid y \in T\mathcal{U} \} = T\mathcal{U}$,
also offen wg. Satz 4.2.

[$^{*)}$ f stetig zwischen metr. Räumen $\Leftrightarrow$ Urbilder offener Mengen offen]

Bew. von Satz 4.2

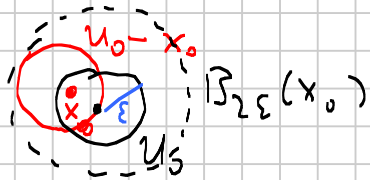
Schritt 1: $\forall$ Kugeln $\mathcal{U}$ um 0 in $\overline{X}$ existiert eine Kugel V um 0 in $\overline{Y}$ mit $\overline{T(\mathcal{U})} \supseteq V$.



Bew: $\mathcal{U} = B_{2\varepsilon}(0) = \{x \in \overline{X} \mid \|x\| < 2\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

$\mathcal{U}_0 = B_\varepsilon(0)$

Triviale aber nützliche Eigenschaft: $\forall x_0 \in \mathcal{U}_0$: $\mathcal{U}_0 - x_0 \subseteq B_{2\varepsilon}(0)$ (*).



Nicht trivialer Schritt: $x \in \overline{X}$ beliebig

$\Rightarrow \quad x/n \to 0 \quad (n \to \infty)$

$\Rightarrow \exists n: \ x/n \in U_0 \quad \left(\text{wähle } n > \frac{\|x\|}{\varepsilon}\right)$

$\Leftrightarrow \exists n: \ x \in n U_0$

$\Rightarrow \quad X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n U_0 .$

$\Rightarrow \quad Y \underset{T \text{ surjekt}}{=} \operatorname{Ran} T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(n U_0)$

Y vollst. metr. Raum $\underset{\substack{\text{Baire'scher Kategoriensatz} \\ \text{(Satz 4.1)}}}{\Longrightarrow}$ nicht alle $T(nU_0)$ sind nirgends dicht

$\Rightarrow$ mindestens ein $T(nU_0)$ ist nicht nirgends dicht, d.h.

$\overline{T(nU_0)} \supseteq V_0$, V_0 offen, nicht leer

Rest des Argumentes: Benutze Linearität von T

$$\overline{T(U_0)} \underset{T \text{ linear}}{=} \frac{1}{n} \overline{T(n U_0)} \supseteq \frac{1}{n} V_0$$

Wähle $y_0 = Tx_0$, $x_0 \in \mathcal{U}_0$, $y_0 \in \frac{1}{n} V_0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n} V_0 - y_0$ offene Menge in $\mathfrak{Y}$, enthält 0

$\Rightarrow$ $\overline{T(\mathcal{U}_0 - x_0)} = \overline{T(\mathcal{U}_0)} - Tx_0 = \overline{T(\mathcal{U}_0)} - y_0 \supseteq \frac{1}{n} V_0 - y_0$

offene Menge, die Null enthält

$\Rightarrow$ — " — enthält Kugel $B_\delta(0)$ um 0 in $\mathfrak{Y}$.

$\Rightarrow$ $\overline{T(B_{2\varepsilon}(0))} \underset{\uparrow}{\supseteq} \overline{T(\mathcal{U}_0 - x_0)}$ enth. Kugel — " — .

da $\mathcal{U}_0 - x_0 \subseteq B_{2\varepsilon}(0)$ wg. $(*)$

<u>Bem</u>: Vollst. von $\mathfrak{Y}$, aber nicht von $\mathfrak{X}$, wurde benutzt.

<u>Schritt 2</u>: Das Bild jeder Kugel um 0 in $\mathfrak{X}$ enthält eine Kugel um 0 in $\mathfrak{Y}$.

Bew.: Notation: B_ε := Kugel um 0 vom Rad. ε in X

B'_η := ——— // ——— η in Y

$B_{2\varepsilon_0}$ beliebige Kugel um 0 in X

Betrachte B_{ε_i}, $\quad \varepsilon_i = 2^{-i}\varepsilon_0$

Schritt 1 $\Rightarrow$ $\exists\, \eta_i \to 0$ sodaß $\overline{T(B_{\varepsilon_i})} \supseteq B'_{\eta_i}$
$(\eta_i > 0)$

Sei $y \in B'_{\eta_0}$. Beh.:

(**) $\quad \exists\, x \in B_{2\varepsilon_0}$ sodaß $Tx = y$.

[$\Rightarrow$ $\quad T(B_{2\varepsilon_0}) \supseteq B'_{\eta_0}$.]

$y \in \overline{T(B_{\varepsilon_0})} \Rightarrow \exists\, x_0 \in B_{\varepsilon_0}$ sodaß $\|y - Tx_0\| < \eta_1$

$\Rightarrow y - Tx_0 \in B'_{\eta_1}$

$\Rightarrow y - Tx_0 \in \overline{T(B_{\varepsilon_1})} \Rightarrow \exists\, x_1 \in B_{\varepsilon_1}$ sodaß $\|y - (Tx_0 + Tx_1)\| < \eta_2$

etc.

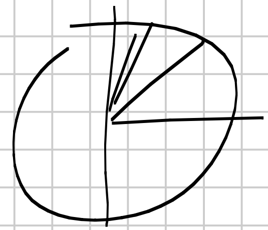
$\Rightarrow$ $\exists$ $x_i \in B_{\varepsilon_i}$ sodaß $\boxed{(***) \ \left\| y - T \sum_{i=0}^{n} x_i \right\| < \eta_{n+1}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

$\left\{ \sum_{i=0}^{n} x_i \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge, denn

$$\left\| \sum_{i=0}^{m} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \right\| \underset{m>n}{=} \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \le \sum_{i=m+1}^{n} \underbrace{\|x_i\|}_{\le \varepsilon_0 \cdot 2^{-i}} = \varepsilon_0 \cdot 2^{-m} \to 0 \ (m \to \infty)$$

X vollst. $\Rightarrow$ $\exists$ $x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$

T stetig $\Rightarrow$ $Tx = \lim_{n \to \infty} T \sum_{i=0}^{n} x_i$



Andererseits $\lim_{n \to \infty} T \sum_{i=0}^{n} x_i = y$, wg. $(***)$

Also $Tx = 0$. Schließlich $\|x\| \le \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\|x_i\|}_{\le \varepsilon_0 \cdot 2^{-i}} \le \varepsilon_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}}_{=2} = 2\varepsilon_0$

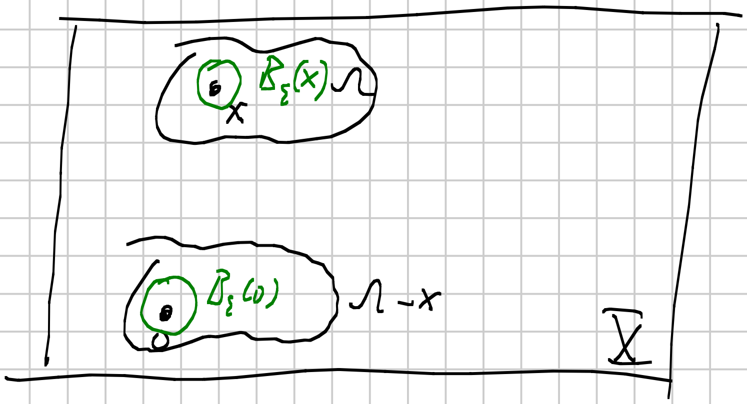
d.h. $x \in B_{2\varepsilon}(0)$.

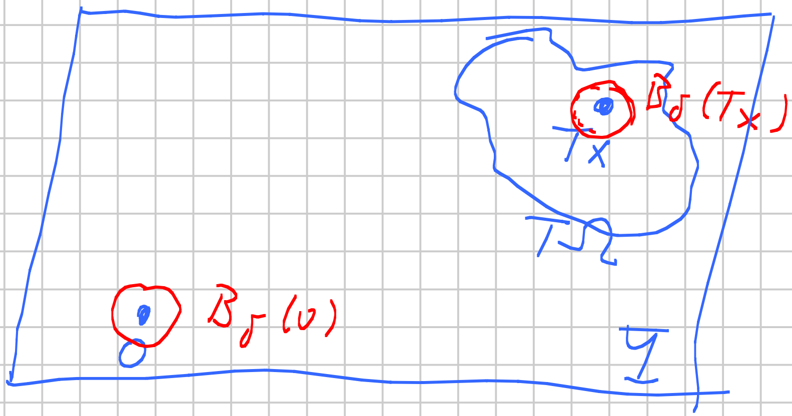
Also $T(B_{2\varepsilon}(0)) \supseteq B_{\eta_0}$.

<u>Bem</u>: Diesmal Vollst. von X (aber nicht von Y) benutzt.

Schritt 3 $\Omega \subseteq X$ offen $\Rightarrow$ $T(\Omega) \subseteq Y$ offen.

Sei $x \in \Omega$. z.z.: $\exists$ Kugel $B_\delta(Tx)$ mit $T(\Omega) \supseteq B_\delta(Tx)$.





Ω offen $\Rightarrow$ $\exists$ Kugel $B_\varepsilon(x)$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$

$\Rightarrow B_\varepsilon(0) \subseteq \Omega - x$

Schritt 2 $\Rightarrow T(B_\varepsilon(0)) \supseteq B_\delta(0)$

$\Rightarrow T(\Omega) \underset{T \text{ lin.}}{=} T(\Omega - x) + Tx \supseteq B_\delta(0) + Tx$

$= B_\delta(Tx)$

Also $T(\Omega)$ offen, QED.

Wichtiges Bsp. zu Satz 4.1

$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = d = \{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n \}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \text{ d.h. } (Ta)_n = \frac{1}{n} a_n$$

T stetig, linear, invertierbar $\qquad$ ($\|a\| = \sup_j |a_j|$ oder $(\sum_j |a_j|^2)^{1/2}$)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \text{ d.h. } (T^{-1}a)_n = n\, a_n$$

Aber T^{-1} unstetig, siehe §3:

$$T^{-1} \underbrace{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1/n \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}}_{=: e^{(n)}} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow n \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow n \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$e^{(n)} \to 0$, da $\|e^{(n)}\| = \frac{1}{n}$, aber $T^{-1} e^{(n)} \not\to T0 = 0$, da $\|T^{-1} e^{(n)}\| = 1$

Kein Wid. zu Satz 4.1, da d kein B-Raum.
Zeigt aber, daß die Ann. X, Y Banachräume nicht weggelassen werden kann.

2 Interpretationen von Satz 4.1

"Reine Mathematikerin":

Will Struktureigenschaften von Abbildungen zwischen B-Räumen verstehen.

$\boxed{\text{Die analytische Eigenschaft der Stetigkeit einer lin. Abb. bleibt unter der rein algebraischen Operation der Inversenbildung erhalten.}}$

$L(X,X)$ = VR der stetig. lin. Abb. von X nach X ist invariant unter Inversenbildung.

"Angewandter Mathematiker":

Will lineare (oD) Gl'en lösen, $\quad Tu = f \quad (*)$

f gegeben, u gesucht, T z.B. partieller Diff. operator wie $-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
"Daten" "Lösung"

Aus Existenz und Eindeutigkeit einer Lsg folgt automatisch die stetige Abhängigkeit von den Daten.

[Exist. einer Lsg $\forall f$ $\Leftrightarrow$ T surj.

Eind. —"— $\Leftrightarrow$ T inj.

Stetige Abh. von Daten: $\lim_{j \to \infty} f_j = f \Rightarrow \lim_{j\to\infty} u_j = u$]

Lsg von (*) für f_j

$u_j = T^{-1} f_j$, T^{-1} "Lösungsoperator"

Also stetige Abh. von Daten $\Leftrightarrow$ T^{-1} stetig