§ 4 Der Satz von der offenen Abbildung

Hauptziel dieses Paragraphen: Beweis von

Satz 4.1 (Satz v. d. beschränkten Inversen)

Seien X, Y Banachräume und $T: X \to Y$ ein stetiger, linearer und bijektiver Operator.
Dann ist die Umkehrabbildung $T^{-1}: Y \to X$ stetig

Def 4.1 Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums X heißt nirgends dicht, falls $\bar{A}$ keine nichtleere offene Menge enthält.

Als Vorbereitung zum Beweis von Satz 4.1 folgendes

Lemma 4.1 (Bairescher Kategoriensatz)
Ein vollständiger metrischer Raum ist keine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen.

Terminologie

~~Mengen~~ Teilmengen $A \subset X$ mit einer Darstellung

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad , A_n \text{ nirgends dicht, heißen}$$

auch "von erster Kategorie", solche ohne diese Eigenschaft "von zweiter Kategorie".

Lemma 4.1 sagt dann, dass vollst. metr. Räume von ~~erster Kategor~~ zweiter Kategorie sind.

Beweis von Lemma 4.1

Angenommen, X darstellbar als Vereinigung nirgends dichter Mengen, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

O.B.d.A. wähle M_n abgeschlossen, ~~$\bar{A}_n$~~ $M_n = \overline{M_n}$

(M_n nirgends dicht, $M_n = \overline{M_n}$ $\Rightarrow$ M_n enthält keine nichtleere offene Menge.)

$(M_1)^c$ ist offen (da M_1 abgeschlossen),

und $\overline{((M_1)^c)} = X$ [ansonsten gäbe es $x \in X$ und $\varepsilon > 0$

~~mit $\operatorname{dist}(x, (M_1)^c) > \varepsilon$, also~~

mit $B_\varepsilon(x) \cap \overline{((M_1)^c)} = \emptyset$, d.h.

$$B_\varepsilon(x) \subset \left(\overline{((M_1)^c)}\right)^c$$

$$\subset ((M_1)^c)^c \qquad \left(A \subset \bar{A} \text{ n. Def.} \Rightarrow (\bar{A})^c \subset (A)^c \left(\subset \overline{(A^c)}\right) \right)$$

$$= M_1,$$

im Widerspruch zu M_1 nirgends dicht.]

Da also $(M_1)^c$ ~~dicht~~ offen und dicht

enthält sie eine abgeschlossene

~~enthält sie abgeschl.~~ Kugel $S_1 = \{x \mid d(x, x_1) \leq r_1\}$ ~~deren~~ deren Zentrum jedem Punkt aus X bel. nahe kommt.

o.b.d.A. $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$

- Mit dem gleichen Arg. finde $S_2 = \{x \mid d(x_2, x) \leq r_2\} \subset (M_2)^c$ mit $0 < r_2 < (\frac{1}{2})^2$ und $S_2 \subset S_1$, usw.

Dies führt auf Folge $\{S_n\}$ von abgeschl. Kugeln mit $0 < r_n < (\frac{1}{2})^n$, $S_{n+1} \subseteq S_n$, $\underbrace{S_n \cap M_n = \emptyset}$ (da Teilmengen der Komplemente)

- Folge der Mittelpunkte $\{x_n\}$ ist CF, ξ
da $d(x_n, x_m) \leq r_n < (\frac{1}{2})^n$ für $m > n$ $(x_m \in S_n)$

- X vollst. $\Rightarrow$ $x_\infty := \lim x_n$ existiert.

Wegen $d(x_n, x_\infty) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, x_\infty)$

$$\le r_n + d(x_m, x_\infty) \xrightarrow[m \to \infty]{} r_n$$

gilt $x_\infty \in S_n$ für alle n.

Also $x_\infty \notin M_n \quad \forall\, n$ ($S_n \subset (M_n)^c$ nach Konstruktion)

$$\Rightarrow x_\infty \notin \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X\right) \quad ↯ \text{ zu } x_\infty \in X$$

$\square$

Bem.: X keine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen

$\Leftrightarrow$ Jeder abzählbare Durchschnitt offener dichter Mengen ist dicht

Bew.: „$\Rightarrow$" $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n} \neq X$ (O_n offen, dicht) $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ x \in X$

mit $B_\varepsilon(x) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right) = \emptyset$

also $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n)^c$

$(O_n)^c$ nirgends dicht, siehe obiger Beweis.

Bemerkung

(Kein vollst. metrischer Raum ist abz. Ver.
nirgends dichter Mengen (Lemma 4.1))

$\Leftrightarrow$

(In ~~jedem~~ einem vollst. metr. Raum X ist jeder abz.
Durchschnitt offener dichter Mengen wieder dicht)

(Bew.: • $A = \overline{A}$, nirgends dicht $\Rightarrow$ A^c offen , dicht

• $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$)

Korollar 4.1

Es gibt stetige Fkt. auf ~~[0,1]~~ $[0,1]$, die an keiner Stelle ~~diffbar sind~~ differenzierbar sind.

Bew.:

~~Idee: ... Bew.~~

~~Betrachte~~ Zu $n \in \mathbb{N}$ ~~betrachte~~ betrachte

$$O_n = \left\{ f \in C[0,1] : \sup_{0<|h|\leq \frac{1}{n}} \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n \ \forall\, t \in [0,1] \right\}$$

(d.h. Diff. Quotienten bleiben von n ~~weg beschränkt~~ weg beschränkt)

(~~Def. ...~~: Setze f außerhalb von $[0,1]$ konstant stetig fort.

Werden zeigen: O_n offen und dicht $\forall n$. $\Rightarrow O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$

~~Satz~~ (Lemma 4.1. & Bem.) ~~$\bigcap_{n=1} O_n$ dicht~~,

dicht, und jedes $f \in O$ ist nirgends diffbar. (Folge der Diff. quot. divergiert)

i) <u>O_n offen</u> Sei $f \in O_n$. Zu $t \in [0,1]$

wähle δ_t mit $\sup_{0<|h|\leq\frac{1}{n}} \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n + \delta_t$
(klein genug)

(möglich, da ">" vorausgesetzt)

~~f stetig, daher ex. h_t mit $0<|h_t| \leq \frac{1}{n}$~~

- Nach Def. des Supremums ex. also ein h_t, $0<|h_t| \leq \frac{1}{n}$

mit $$\left| \frac{f(t+h_t)-f(t)}{h_t} \right| > \delta_t$$

- Da f stetig ist, ~~gilt~~ gilt auch für $s \in U_t$ (hinreichend kleine Umgebung von t) noch

$$\left| \frac{f(s+h_t)-f(s)}{h_t} \right| > n+\delta_t$$

- $[0,1]$ ~~ist~~ kompakt ($\Leftrightarrow$ beschr. & abgeschl. in $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ ~~ist~~ wird durch <u>endlich</u> viele $U_{t_1}, \ldots, U_{t_r}$ überdeckt.

Setze $\delta := \min\{\delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_r}\}$ (d.h. obige Argumentation bei allen t_i)

$$h := \min\{|h_{t_1}|, \ldots, |h_{t_r}|\}$$

Dann gilt für $s \in U_{t_i}$

$$\left| \frac{f(s+h_{t_i})-f(s)}{|h_{t_i}|} \right| > n + \delta$$

ohne Index

Sei ~~Wähle~~ nun $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} h \delta$ und ~~in~~ $g \in C[0,1]$

mit $\|g-f\|_\infty < \varepsilon$.

<u>Bed.:</u> $g \in O_n$, und damit O_n offen

<u>Denn:</u>

$$\left| \frac{g(t+h_{t_i})-g(t)}{h_{t_i}} \right| \geq \underbrace{\left| \frac{f(t+h_{t_i})-f(t)}{h_{t_i}} \right|}_{> n+\delta} - 2\frac{\|f-g\|_\infty}{|h_{t_i}|} \quad (\triangle\text{-Ungl.})$$

$$> n+\delta - \frac{2}{|h_{t_i}|}\varepsilon$$

$$> n+\delta - \frac{2}{|h|}\varepsilon$$

$$> n \quad (\text{nach Wahl von } \varepsilon)$$

also gilt $g \in O_n$.

$|y_m(t+h)-y_m(t)|$

$|(x_m(t+h)-x_m(t)) + p(t+h)-p(t)|$

$\le |x_m(t+h)-x_m(t)| + |p(t+h)-p(t)|$

(ii) O_m dicht

Sei $O \subset C[0,1]$ eine bel. offene Menge

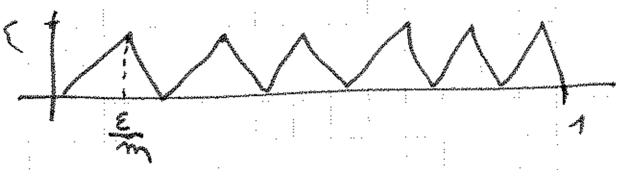
z.z. $O \cap O_m \neq \emptyset$.

Da die Polynome dicht in $C[0,1]$ liegen (HS),

$\exists$ ein Polynom $p \in O$ und ein $\varepsilon > 0$, ~~daß~~

mit $(\|f-p\|_\infty \le \varepsilon \Rightarrow f \in O)$ (O offen)

Sei y_m Sägezahnfkt, die $[0,1]$ auf $[0,\varepsilon]$ abbildet, mit Steigung m



Dann gilt $f_m := p + y_m \in O$. ($\|f_m - p\|_\infty = \|y_m\|_\infty = \varepsilon$)

Sei o.B.d.A $\varepsilon < 1$

Für $m > n + \|p'\|_\infty$ gilt für alle $t \in [0,1]$, ~~mit~~

$0 < |h| \leq \frac{1}{m}$, ~~da~~

$$\left| \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right| \geq \left| \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \right| - \underbrace{\left| \frac{p(t+h) - p(t)}{h} \right|}_{\substack{\leq \|p'\|_\infty \\ \text{wegen Mittelwert-} \\ \text{satz}}}$$

(folgt aus Δ-Ungl.)

$$\geq \left| \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \right| - \|p'\|_\infty$$

$m > n + \|p'\|_\infty \Rightarrow m > n \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

$\varepsilon < 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{m} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

~~Auf~~ Für $0 < h \leq \frac{\varepsilon}{m}$ gilt $\frac{y_m(0+h) - y_m(0)}{h} = \frac{m \cdot h}{h}$

$= m$

und wegen $\frac{\varepsilon}{m} < \frac{1}{n}$ folgt

$$\sup_{0 < |h| \leq 1/m} \left| \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \right| \geq m$$

insgesamt also

$$\sup_{0<|h|\le\frac{1}{n}} \left| \frac{f_m(t+h)-f_m(t)}{h} \right| \geq m - \|p'\|_\infty$$

$$> n \quad (\text{nach Wahl von } m)$$

also ist $f_m \in O_n$, insgesamt $f_m \in O_n \cap O$ und

damit $O_n \cap O \neq \emptyset$, also liegt O_n dicht in $C([0,1])$

$\boxtimes$