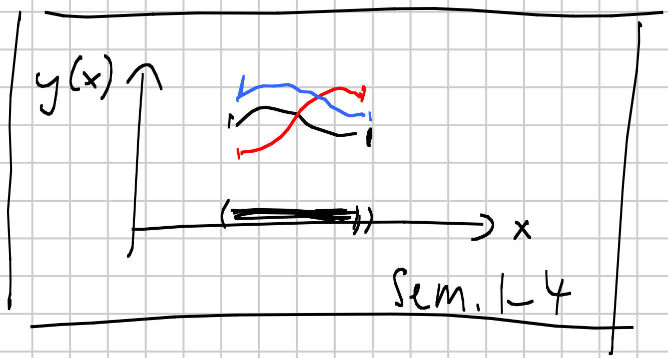
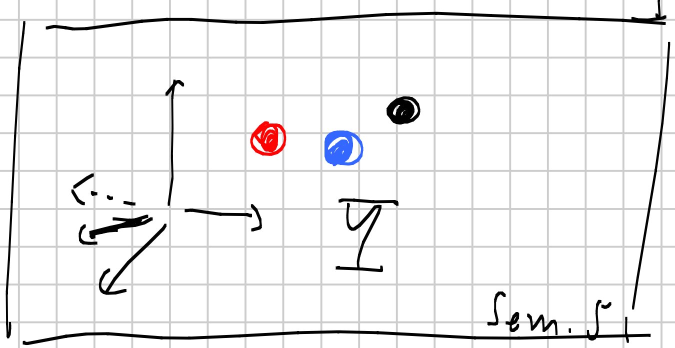
Funktionalanalysis

G. Friesecke
WS 09/10
4V + 2Ü, 8 CP

Grundidee der FA

Fasse Funktionen $y : \Omega \to \mathbb{R}$ als Punkte in einem geeigneten unendlich-dim. normierten Vektorraum $\mathcal{Y}$ auf.





Fasse gewöhnliche Dgl'en, partielle Dgl'en, Integralgl'en für Funktionen als Gl'en der Form

(1) $$F(y) = b$$

auf, wobei F eine Abbildung zwischen ∞-dim. normierten Vektorräumen ist. Entwickele eine systematische Theorie solcher Abbildungen, die grundlegende nichttriviale Fragen wie

- Existenz
- Eindeutigkeit
- stetige Abh. von Daten

unter möglichst allgemeinen und "natürlichen" Vor'en beantwortet.

<u>Fokus d. VL</u>: Lineare Probleme

(2) $$Ay = b,$$

A lineare Abb. zwischen ∞-dim. normierten VR^{en}.
Systematische Theorie solcher Abb'en.

<u>Methoden</u>: Lin. Alg. + Analysis + neue Ideen

<u>Bsp:</u> $\underline{Y} = \{ y : [0,1] \to \mathbb{R} \mid y$ 2mal stetig diff'bar $\}$

$\underline{Z} = \{$ ——"—— $\mid y$ stetig $\}$

$A : \underline{Y} \to \underline{Z}$ (lineare Abb. zwischen 2 ∞dim. VR^{en})

$$(Ay)(x) = y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x)$$

(a_1, a_0 gegebene stetige Fkt'en).

(2) $\iff$ $y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ gew. Dgl.

$\boxed{\text{Lösen von (2)} \iff \text{gew. Dgl. lösen}}$

<u>Literatur:</u>

- Online-Tablet-Skript (reicht für Klausur)
- Werner, FA, Springer (Beweise gut lesbar, nicht so konzeptuell)
- Alt, Lineare FA, —"— (gut für PDGl'en)
- Dieudonné, Grundzüge d. mod. Analysis, 9 Bände (konzeptuell)
- Hirzebruch, Scharlau: Einf. in die FA (elegant)

- K. Yosida, Functional analysis, Springer (umfassend)
- M. Reed, B. Simon, Methods of modern math. physics, 4 Bände (gut f. Quantenmechanik)

§1 Normierte Vektorräume

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, X Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Def. 1.1 Eine Abb. $n : X \to [0,\infty)$ heißt Norm, falls

(a) Homogenität $\quad n(\lambda x) = |\lambda|\, n(x) \quad \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(b) Dreiecksungl. $\quad n(x+y) \leq n(x) + n(y) \quad \forall x,y \in X$

(c) Positivität $\quad n(x) \geq 0$, „$=$“ $\Leftrightarrow x = 0$.

Schreibweise: $n(x) = \|x\|$. Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt normierter VR. (Ist aus dem Zusammenhang klar, welche Norm gemeint ist, spricht man von X selbst als normiertem VR.)

Def. 1.2 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter VR. Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $x_j \in X$, heißt

(a) <u>konvergent gegen $x \in \mathfrak{X}$</u>, Schreibweise: $x_j \to x$ oder $\lim_{j\to\infty} x_j = x$, wenn

$$\underbrace{\| x_j - x \|}_{\in \mathbb{R}} \to 0 \qquad (j \to \infty).$$

(b) <u>konvergent</u>, wenn $x \in \mathfrak{X}$ existiert sodass $x_j \to x$

(c) <u>Cauchyfolge</u>, wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert sodass

$$\|x_j - x_k\| < \varepsilon \qquad \forall j,k \geq N.$$

<u>Def. 1.3</u> Ein normierter VR $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$, in dem jede Cauchyfolge konvergent ist, heißt <u>vollständig</u>. Ein vollständiger normierter VR heißt <u>Banachraum</u>*).

*) Stefan Banach

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$ unendlich viele Komponenten

Bsp'e: $\mathbb{R}^n$; Folgenräume $(\approx \mathbb{R}^\infty)$; Funktionenräume

1. $\mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. Folgenräume

2(a) $d = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{K},\ a_n \neq 0$ nur für endlich viele $n \}$

2(b) $c_0 = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \to 0 \}$ Nullfolgen

2(c) $c = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)$ konvergent$\}$ konv. Folgen

2(d) $\ell^\infty = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup_n |a_n| < \infty \}$ beschränkte Folgen,

jeweils versehen mit der Supremumsnorm

$$\|(a_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

(Norm, da
$$\begin{aligned}\|(a_n)+(b_n)\|_\infty &= \sup_n |a_n+b_n| \\ &\le \sup_n (|a_n|+|b_n|) \\ &\le \sup_n |a_n| + \sup_n |b_n| \\ &= \|(a_n)\|_\infty + \|(b_n)\|_\infty.)\end{aligned}$$

3. Die Folgenräume ℓ^p $(1 \le p < \infty)$.

$$\ell^p = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; a_n \in \mathbb{K},\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

$$\|(a_n)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Diesmal nicht klar, ob ℓ^p VR bzw. ob $\|\cdot\|_p$ Norm.

Beweis, daß ℓ^p VR: Seien $(a_n), (b_n) \in \ell^p$, z.z.: $(a_n)+(b_n) \in \ell^p$, d.h. $\sum_n |a_n+b_n|^p < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p \le \sum_n (|a_n|+|b_n|)^p$$

$$\leq \sum_n \left(2 \max\{|a_n|, |b_n|\}\right)^p$$

$$= 2^p \sum_n \max\{|a_n|^p, |b_n|^p\}$$

$$\leq 2^p \sum_n \left(|a_n|^p + |b_n|^p\right) < \infty .$$

nächste Stunde: Bew., daß $\|\cdot\|_p$ Norm.
Insbesondere z.z.: $\|(a_n) + (b_n)\|_p \leq \|(a_n)\|_p + \|(b_n)\|_p$
(Minkowski'sche Ungl.)