Spektraltheorie Linearer Operatoren *

MA 5036

Domenico P.L. Castrigiano †

*Vorlesungsskript SS 2011 erstellt von M. de Benito Delgado

†Zentrum Mathematik TU München

Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1 Banachalgebren

Grundlegende Definitionen und Sätze

(1) Algebra, Banachalgebra, Ideal. Eine Menge A heißt eine **Algebra** über $\mathbb{C}$, wenn A ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer innerer Multiplikation $A \times A \to A, (x, y) \mapsto xy$ ist, die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $x\,(yz) = (xy)\,z =: xyz$ *Asoziativität.*

(b) $(x + y)\,z = xz + yz,\ x\,(y + z) = xy + xz$ *Distributivität bezüglich der Addition.*

(c) $\alpha\,(xy) = (\alpha x)\,y = x\,(\alpha y)$ *Distributivität bezüglich der Multiplikation mit Skalaren.*

A heißt **kommutativ**, wenn

(d) $xy = yx$.

A heißt eine Algebra mit **Eins**, wenn ein $e \in A$ existiert, so dass

(e) $ex = xe = x$.

Die Eins ist eindeutig, denn $e = ee' = e'$. Falls A eine Banachalgebra ohne Eins ist, läßt sich eine Eins adjungieren.

A wird eine **Banachalgebra** genannt, wenn A ein Banachraum ist mit

(f) $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ *Submultiplikativität der Norm*

und

(g) $\|e\| = 1$,

falls eine Eins vorhanden ist.

Weiter heißt $J \subset A$ ein **Ideal** in A, wenn J ein Untervektorraum mit $xy \in J$, $yx \in J$ für alle $x \in J$, $y \in A$ ist. $\{0\}$ und J sind stets Ideale. J heißt **eigentlich**, wenn $J \neq A$. Ein eigentliches Ideal J heißt **maximal**, wenn für jedes eigentliche Ideal J' mit $J \subset J'$ folgt, dass $J' = J$.

In einer Algebra A mit Eins heißt ein Element $x \in A$ **invertierbar**, wenn ein $y \in A$ existiert mit $xy = yx = e$. Dieses Element ist eindeutig, denn aus $xy' = y'x = e$ folgt $y = ey = (y'x)\,y = y'\,(xy) = y'e = y'$. Es wird die **Inverse** zu x genannt und wird mit $x^{-1} := y$ bezeichnet.

Aufgabe 1 Adjunktion der Eins.

Aufgabe 2 Man zeige, dass die algebraischen Operationen in A stetig in beiden Variablen sind.

(2) Beispiele zu Banachalgebren.

(a) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist eine Banachalgebra mit Eins 1.

(b) $\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{d,d}$ mit der Matrixmultiplikation und der Operatornorm ist eine Banachalgebra mit der Einheitsmatrix E als Eins. Die Operatornorm ist gegeben durch $\|B\| = \sup\{\|Bx\| : \|x\| \leqslant 1\}$, wobei jede Norm auf $\mathbb{C}^d$ zulässig ist, z.B. die euklidische Norm oder die Maximumsnorm.

(c) Allgemeiner sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{L}(X)$ der Vektorraum der beschränkten linearen Operatoren auf X. Mit der Operatornorm versehen ist $\mathcal{L}(X)$ eine Banachalgebra mit Eins $I = \mathrm{id}_X$.

Die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ ist ein Ideal.

Falls $X = H$ ein Hilbertraum ist, so sind $\mathcal{K}(H) \supset \mathcal{K}^2(H) \supset \mathcal{K}^1(H)$ Ideale, wobei $\mathcal{K}^2(H)$ die Menge der Hilbert-Schmidt Operatoren und $\mathcal{K}^1(H)$ die Spurklasse sind.

(d) Sei E eine Menge. Der Vektorraum $(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|_\infty)$ der beschränkten Funktionen auf E ist mit der Supremumsnorm und der punktweise erklärten Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Eins 1_E. Falls E ein metrischer Raum ist, dann ist die Menge $\mathcal{C}_b(E)$ der beschränkten stetigen Funktionen auf E eine Unterbanachalgebra.

(e) Seien $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $\mathcal{A}\left(\overline{\mathbb{D}}\right) := \left\{f \in C\left(\overline{\mathbb{D}}\right) : f|\mathbb{D} \text{ holomorph}\right\}$. Dann ist $\mathcal{A}\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ eine Unterbanachalgebra von $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$.

Aufgabe 3 Beweisen Sie (1.2-e). (Hinweis: Satz von Weierstraß über die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta einer Folge von holomorphen Funktionen, siehe z.B.: *J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Acad. Press, New York 1960, (9.12.1)*.)

(3) Linksreguläre Darstellung. *Seien A eine Banachalgebra mit Eins und $a \in A$ und $l_a : A \to A$, $l_a x := ax$ die Linkstranslation mit a. Offenbar sind die Linkstranslationen linear und erfüllen*

$$l_a + \lambda l_b = l_{a+\lambda b}, \quad l_a l_b = l_{ab}, \quad \|l_a x\| \leqslant \|a\| \|x\|, \quad l_a e = a.$$

Damit ist l_a beschränkt mit Norm $\|l_a\| = \|a\|$. Die Abbildung

$$l : A \to \mathcal{L}(A), \quad a \mapsto l_a$$

ist ein isometrischer Algebrahomomorphismus, die sog. linksreguläre Darstellung von A.

Mittels der linksregulären Darstellung l ist A isomorph zur Unterbanachalgebra $l(A)$ von $\mathcal{L}(A)$. Damit können Begriffe und Sätze für stetige Operatoren auf Elemente a von A übertragen werden. So sind definitionsgemäß

- $\rho(a) := \rho(l_a)$ die **Resolventenmenge** von a
- $\sigma(a) := \sigma(l_a), \sigma_i(a) := \sigma_i(l_a)$ für $i = p, c, r$ das **Spektrum** bzw. das **Punkt-**, das **kontinuierliche-** und das **Restspektrum** von a
- $r(a) := r(l_a)$ der **Spektralradius** von a.

(4) Erinnerung. Für einen beschränkten linearen Operator $B \in \mathcal{L}(X)$ auf einen Banachraum X sind

- $\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ bijektiv}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ linearer Homöomorphismus}\}$ nach dem Satz von der stetigen Inversen
- $\sigma(B) = \mathbb{C} \backslash \rho(B)$, $\sigma_p(B)$ die Menge der Eigenwerte von B, $\sigma_c(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ injektiv}, X \neq R(\lambda I - B) \text{ dicht in } X\}$, $\sigma_r(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ injektiv}, R(\lambda I - B) \text{ nicht dicht in } X\}$
- $r(B) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$.

(5) Eigenschaften der linksregulären Darstellung. *Seien A eine Banachalgebra und $a \in A$. Dann gilt*

$$a \text{ invertierbar} \iff l_a \text{ bijektiv} \implies (l_a)^{-1} = l_{a^{-1}},\ a^{-1} = (l_a)^{-1} e.$$

Beweis. Sei a invertierbar. Dann folgt $l_{a^{-1}} l_a = l_{a^{-1}a} = l_e = I$ und ebenso $l_a l_{a^{-1}} = I$, weshalb $(l_a)^{-1} = l_{a^{-1}}$. — Sei jetzt l_a bijektiv. Setze $T := (l_a)^{-1}$. Dann folgt $a(Te) = l_a Te = Ie = e$ und somit $l_a l_{Te} = l_{a(Te)} = l_e = I$. Daher ist $T = l_{Te}$ und somit $I = l_{Te} l_a = l_{(Te)a}$. Weil l injektiv ist, folgt $(Te)a = e$. Insgesamt ist also a invertierbar mit der Inversen $a^{-1} = Te$. □

(6) Folgerung. *Seien A eine Banachalgebra und $a \in A$. Dann gilt*

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ invertierbar in } A\}.$$

Sei $B \subset A$ Unterbanachalgebra mit $e \in B$ und sei $b \in B$. Es kann passieren, dass b eine Inverse in A besitzt, die aber nicht in B liegt. Daher unterscheidet man ρ_A von ρ_B, σ_A von σ_B, usw.

Für $x \in A$, $\|x\| < 1$ ist die geometrische Reihe in $\|x\|$ eine konvergente Majorante von $y := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Ausmultiplizieren ergibt $(e - x)y = y(e - x) = e$. Mit diesen Beziehungen beweist man die folgenden Aussagen.

(7) Neumannsche Reihe. *Seien $a_0 \in A$ invertierbar und $a \in A$ mit $\|a - a_0\| < 1/\left\|a_0^{-1}\right\|$. Dann ist a invertierbar in A. Es konvergiert und ist*

$$a^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_0^{-1}(a_0 - a)\right]^n\right) a_0^{-1}. \qquad (\star)$$

Daher ist die Menge

$$\mathcal{G}(A) := \{a \in A : a \text{ invertierbar}\}$$

offen in A. Sie ist offenbar eine Gruppe bezüglich der Algebramultiplikation. Sind $x, x_0 \in \mathcal{G}(A)$ mit $\|x - x_0\| < 1/\left\|x_0^{-1}\right\|$, dann

$$\begin{aligned} \left\|x^{-1} - x_0^{-1}\right\| &= \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[x_0^{-1}(x_0 - x)\right]^n\right) x_0^{-1}\right\| \\ &\leqslant \frac{\left\|x_0^{-1}\right\|^2 \|x_0 - x\|}{1 - \left\|x_0^{-1}\right\| \|x_0 - x\|} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow x_0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Inversenbildung in $\mathcal{G}(A)$ stetig ist. Die Multiplikation in $\mathcal{G}(A)$ ist ohnehin stetig. Damit ist $\mathcal{G}(A)$ eine topologische Gruppe.

(8) Beispiele.

(a) $\mathbb{C}^\times := \mathcal{G}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $x^{-1} = 1/x$.

(b) $\mathcal{G}(\mathcal{M}_d(\mathbb{C})) = GL_d(\mathbb{C}) = \{B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) : \det(B) \neq 0\}$ und $\sigma_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})}(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } B\}$

(c) $\mathcal{G}(\mathcal{L}(X)) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T \text{ bijektiv}\}$ nach dem Satz von der stetigen Inversen.

(d) $\mathcal{G}(B(E)) = \left\{f : E \to \mathbb{C} \text{ beschränkt}, \overline{f(E)} \subset \mathbb{C}^\times\right\}$, $f^{-1} = 1/f$, $\sigma_{B(E)}(f) = \overline{f(E)}$.

(e) $\mathcal{G}\left(A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)\right) = \left\{f \in A\left(\overline{\mathbb{D}}\right) : f\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \subset \mathbb{C}^\times\right\}$. Beachte, dass $f\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ als stetiges Bild eines Kompaktums kompakt und damit abgeschlossen ist.

(9) Satz von Beurling und Gelfand. *Sei A Banachalgebra mit Eins und sei $x \in A$. Dann sind*

(a) *$\sigma_A(x)$ nicht leer und kompakt und $\sigma_A(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$*

(b) $r_A(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf\left\{\|x^n\|^{1/n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Beweis. (a) Sei $\lambda_0 \in \rho_A(x)$ und $x_0 := \lambda_0 e - x$. Dann ist $\left\{\lambda : |\lambda_0 - \lambda| < 1/\left\|x_0^{-1}\right\|\right\}$ enthalten in $\rho_A(x)$ nach (1.7), weil $\|x_0 - (\lambda e - x)\| = |\lambda_0 - \lambda|$. Dies zeigt, dass $\rho_A(x)$ offen ist. Daher ist $\sigma_A(x)$ abgeschlossen. — Sei nun $|\lambda| > \|x\|$. Dann gilt wieder mit (1.7): $\left\|e - \left(e - \lambda^{-1}x\right)\right\| < 1$, $\|e\| = 1 \Rightarrow (e - \lambda^{-1}x)$ invertierbar $\Rightarrow$ $(\lambda e - x)$ invertierbar $\Rightarrow \lambda \in \rho_A(x)$. Daher ist $\sigma_A(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$.

Von der Aussage (a) bleibt zu zeigen, dass $\sigma_A(x) \neq \emptyset$. Dazu betrachten wir die **Resolventen Abbildung**

$$R : \rho_A(x) \to \mathcal{G}(A), \quad \lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}. \tag{1}$$

Mit $\lambda e - x$ anstelle von a folgt aus $(\star)$ in (1.7) für $\lambda_0 \in \rho_A(x)$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$, dass

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (-1)^n R(\lambda_0)^{n+1}. \tag{2}$$

Damit ist R holomorph[1]. Für $|\lambda| > \|x\|$ ist $R(\lambda) = \lambda^{-1}\left(e - \lambda^{-1}x\right)^{-1}$ und somit nach (1.7)

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n. \tag{3}$$

Wegen der Konvergenz der geometrischen Reihe in $\|\lambda^{-1}x\|$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf jedem Kreis $\gamma_r := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ für $r > \|x\|$. Damit ist die gliedweise Integration von $\lambda \mapsto \lambda^m R(\lambda)$ erlaubt und ergibt

$$x^m = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \lambda^m R(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

da nur der Term zu λ^{-1} überlebt. Insbesondere ist

$$e = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} R(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{5}$$

was $\sigma_A(x) \neq \emptyset$ beweist, da sonst R ganz wäre und damit $\int_{\gamma_r} R(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0$ nach dem Satz von Cauchy.

(b) Weil $\rho_A(x) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r_A(x)\}$, gilt 4 nach dem Satz von Cauchy sogar für $r > r_A(x)$. Das Supremum $M(r) := \sup\{\|R(\lambda)\| : |\lambda| = r\}$ ist endlich für jedes $r > r_A(x)$, weil R stetig ist. Nach 4 ist daher $\|x^m\| \leqslant r^{m+1} M(r)$, weshalb $\limsup_m \|x^m\|^{1/m} \leqslant r$ und somit $\limsup_m \|x^m\|^{1/m} \leq r_A(x)$.

Andererseits ist $\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)\left(\lambda^{n-1}e + \ldots + x^{n-1}\right)$ für $\lambda \in \sigma_A(x)$ nicht invertierbar, weil $(\lambda e - x)$ nicht invertierbar ist (siehe Aufgabe 5). Also

[1] Zu banachraumwertigen holomorphen Funktionen siehe z.B. *J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Acad. Press, New York 1960, Chapter IX*.

ist $\lambda^n \in \sigma_A(x^n)$. Daher ist $|\lambda^n| \leqslant \|x^n\|$ nach (a) und somit $|\lambda| \leqslant \inf_n \|x^n\|^{1/n}$, weshalb $r_A(x) \leqslant \inf_n \|x^n\|^{1/n}$. $\square$

(10) Satz von Gelfand und Mazur. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins e derart, dass $\mathcal{G}(A) = A \setminus \{0\}$. Dann ist $A = \mathbb{C}e$.*

Beweis. Sei $x \in A$. Nach (1.9-a) existiert ein $\lambda \in \sigma_A(x)$. Dafür ist $x - \lambda e \notin \mathcal{G}(A)$, weshalb nach Voraussetzung $x = \lambda e$. $\square$

Aufgabe 4 Sei A Banachalgebra mit Eins e und sei $x \in A$ mit $\left\|x^2\right\| = \|x\|^2$. Dann ist $r_A(x) = \|x\|$.

Beweis. $\left\|x^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^n} \; \forall n \Rightarrow r(x) \overset{(1.9)}{=} \lim \|x^n\|^{1/n} = \lim \left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|x\|$. $\square$

Aufgabe 5 Sei A eine Algebra mit Eins e und seien $x, y \in A$. Dann sind x und y genau dann invertierbar, wenn xy und yx invertierbar sind.

Beweis. Seien xy und yx invertierbar. Aus $(yx)y = y(xy)$ folgt $z := y(xy)^{-1} = (yx)^{-1}y$. Dann ist $xz = x\left(y(xy)^{-1}\right) = (xy)(xy)^{-1} = e$ und $zx = \left((yx)^{-1}y\right)x = (yx)^{-1}(yx) = e$, weshalb x invertierbar ist. Ebenso folgt, dass y invertierbar ist. – Die umgekehrte Richtung ist offensichtlich. $\square$

Aufgabe 6 Sei A eine Algebra mit Eins e und seien $x, y \in A$ derart, dass $e - xy$ invertierbar mit Inverser z ist. Dann ist $e - yx$ invertierbar mit Inverser $e + yzx$ und

$$\sigma(xy) \subset \{0\} \cup \sigma(yx).$$

Beweis. $(e+yzx)(e-yx) = e-yx+yzx-yzxyx = e-yx+yz(e-xy)x = e-yx+yx = e$. Ebenso zeigt man $(e-yx)(e+yzx) = e$. — Nun sei $\lambda \in \rho(yx) \setminus \{0\}$. Dann ist $e - \frac{1}{\lambda}yx \in \mathcal{G}(A)$. Wie gezeigt, ist damit $e - \frac{1}{\lambda}xy \in \mathcal{G}(A)$. Damit ist $\lambda \in \rho(xy) \setminus \{0\}$. $\square$

Aufgabe 7 Seien A eine Banachalgebra mit Eins e, $n \in \mathbb{N}_0$ und $P = a_0X^0 + a_1X^1 + \ldots + a_nX^n$ ein Polynom mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Zeige, dass für alle $x \in A$

$$\sigma_A(P(x)) = P(\sigma_A(x)).$$

Beweis. Für konstantes P ist die Behauptung wegen (9)(a) offensichtlich. Sonst sei $\mu \in \mathbb{C}$ und schreibe $P(X) - \mu X^0 = \alpha_n(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$. Damit ist $P(x) - \mu e = \alpha_n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$, und $P(x) - \mu e$ ist nach Aufgabe (5) genau dann invertierbar, wenn $x - \lambda_j e$ für alle j invertierbar sind. Damit schließen wir wie folgt: $\mu \in \sigma_A(P(x)) \Rightarrow \lambda_j \in \sigma_A(x)$ für ein $j \Rightarrow \mu = P(\lambda_j) \in P(\sigma_A(x))$ und umgekehrt $\mu \in P(\sigma_A(x)) \Rightarrow \exists \lambda \in \sigma_A(x)$ mit $P(\lambda) - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_j$ für ein $j \Rightarrow \lambda_j \in \sigma_A(x)$ für ein $j \Rightarrow \mu \in \sigma_A(P(x))$. $\square$

Aufgabe 8 Es gelten die Voraussetzungen aus Aufgabe 7. Sei $x \in A$ derart, dass $P(x)$ invertierbar in A ist. Sei Q ein weiteres Polynom. Dann gilt

$$\sigma_A(R(x)) = R(\sigma_A(x)),$$

wobei $R(x) := Q(x)\,P(x)^{-1}$ und $R(\xi) := \frac{Q(\xi)}{P(\xi)}$ für $\xi \in \mathbb{C}$.

Beweis. Für $\mu \in \mathbb{C}$ sei $\tilde{R}(x) := R(x) - \mu x = \tilde{Q}(x)P(x)^{-1}$ mit $\tilde{Q}(x) := Q(x) - \mu P(x)$ und $R(\xi) := \frac{\tilde{Q}(\xi)}{P(\xi)}$. Dann gilt: $\mu \notin \sigma_A(R(x)) \;\Leftrightarrow\; \tilde{R}(x)$ invertierbar $\;\Leftrightarrow\; \tilde{Q}(x)$ invertierbar $\Leftrightarrow\; 0 \notin \sigma_A(\tilde{Q}(x)) \;\Leftrightarrow\; 0 \notin \tilde{Q}(\sigma_A(x))$, wobei die letzte Äquivalenz nach Aufgabe (7) gilt. Schließlich gilt offenbar $0 \notin \tilde{Q}(\sigma_A(x)) \;\Leftrightarrow\; 0 \notin \tilde{R}(\sigma_A(x)) \;\Leftrightarrow\; \mu \notin R(\sigma_A(x))$. $\square$

Aufgabe 9 Seien A eine Banachalgebra mit Eins und $x \in A$. Zeige, dass $r\left(x^k\right) = (r(x))^k \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. $r(x^k) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_A(x^k)\right\} = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in (\sigma_A(x))^k\right\}$ nach Aufgabe (7). Letzteres ist gleich $\sup\left\{|\lambda|^k : \lambda \in \sigma_A(x)\right\} = (r(x))^k$. $\square$

Aufgabe 10 Sei A eine Banachalgebra mit Eins und sei $x \in \mathcal{G}(A)$ mit $\|x\| \leqslant 1, \left\|x^{-1}\right\| \leqslant 1$. Zeige, dass $\|x\| = \left\|x^{-1}\right\| = 1$ und $\sigma_A(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Beweis. $1 = \|e\| = \|xx^{-1}\| \leq \|x\|\,\|x^{-1}\| \;\Rightarrow\; \|x\| = \|x^{-1}\| = 1$. — $r(x) \leq \|x\| \leq 1 \;\Rightarrow\; \sigma_A(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ und ebenso $\sigma_A(x^{-1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Weil $\sigma(x^{-1}) = (\sigma_A(x))^{-1}$ nach Aufgabe (8), folgt daraus die Behauptung. $\square$

(11) Spektrum bezüglich einer Unteralgebra. *Seien A eine Banachalgebra mit Eins e, B eine Unterbanachalgebra von A und $\{e, x\} \subset B$. Dann gelten: $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$, $\partial\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$ und $r_A(x) = r_B(x)$.*

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich. — Zur zweiten sei $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(x)$. Dazu existiert eine Folge (λ_n) in $\rho_B(x)$, die gegen λ_0 konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert die Inverse $(x - \lambda_n e)^{-1} \in B \subset A$. Angenommen $\lambda_0 \in \rho_A(x)$. Dann konvergiert $(x - \lambda_n e)^{-1}$ gegen $(x - \lambda_0 e)^{-1} \in A$ wegen der Stetigkeit der Inversenbildung nach (1.7). Aber dann liegt $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ in der abgeschlossenen Menge B, was im Widerspruch zu $\lambda_0 \in \partial\sigma_B(x) \subset \sigma_B(x)$ steht. — Die letzte Aussage folgt aus den vorangegangenen wegen (1.9), wonach $\sigma_B(x) \neq \emptyset$. $\square$

Ergänzende Bemerkungen

(12) *Seien A eine Banachalgebra mit Eins und (x_n) eine Folge in $\mathcal{G}(A)$ mit $x_n \to x \in A \backslash \mathcal{G}(A)$. Dann gilt $\left\|x_n^{-1}\right\| \to \infty$.*

Beweis. Angenommen es existiert ein $M > 0$, so dass $\left\|x_n^{-1}\right\| < M$ für unendlich viele n. Dann existiert ein n mit $\left\|x_n^{-1}\right\| < M$ und $\|x_n - x\| < 1/M$. Damit gilt $\left\|e - x_n^{-1}x\right\| = \left\|x_n^{-1}(x_n - x)\right\| < 1$, weshalb $x_n^{-1}x \in \mathcal{G}(A)$ nach (1.7). Das ergibt den Widerspruch $x = x_n\left(x_n^{-1}x\right) \in \mathcal{G}(A)$. $\square$

(13) *Sei A eine Banachalgebra mit Eins e und es existiere $c > 0$ mit $\|x\| \|y\| \leqslant c \|xy\|$ für alle $x, y \in A$. Dann ist $A = \mathbb{C}e$.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{G}(A)$ wie in (1.12). Da $\|x_n\| \left\|x_n^{-1}\right\| \leqslant c \left\|x_n x_n^{-1}\right\| = c < \infty$, folgt aus (1.12), dass $\|x_n\| \to 0$ und somit $\lim_n x_n = 0$. — Sei nun $y \in A$. Nach (1.9) existiert $\lambda \in \partial\sigma_A(y) = \partial\rho_A(y)$. Dafür ist $y - \lambda e \in \partial\mathcal{G}(A)$. Also muss, wie gerade gezeigt, $y - \lambda e = 0$ sein. □

Insbesondere hat nur die Banachalgebra $\mathbb{C}$ die Eigenschaft $\|xy\| = \|x\| \|y\| \ \forall x, y$.

(14) *Seien A eine Banachalgebra mit Eins, $x \in A$ und $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $\sigma_A(x) \subset U$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $\sigma_A(x+y) \in U$* für alle $y \in A$ mit $\|y\| < \delta$.

Beweis. Die Abbildung $\rho_A(x) \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \left\|(x - \lambda e)^{-1}\right\|$ ist stetig nach ① in (1.9). Die Resolventenmenge enthält alle λ mit $|\lambda| > \|x\|$ und es gilt $\left\|(x - \lambda e)^{-1}\right\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$. Daher existiert $c > 0$ mit $\left\|(x - \lambda e)^{-1}\right\| < c$ für alle $\lambda \notin U$. — Sei nun $y \in A$ mit $\|y\| < 1/c$ und $\lambda \notin U$. Dann ist $(x - \lambda e) \in \mathcal{G}(A)$, $\left\|(x - \lambda e)^{-1} y\right\| \leqslant \left\|(x - \lambda e)^{-1}\right\| \|y\| < 1$ und

$$(x + y) - \lambda e = (x - \lambda e)\left(e + (x - \lambda e)^{-1} y\right).$$

Nach (1.7) folgt $e + (x - \lambda e)^{-1} y \in \mathcal{G}(A)$ und somit $(x + y) - \lambda e \in \mathcal{G}(A)$, was $\lambda \notin \sigma_A(x + y)$ bedeutet. Wir können also $\delta := 1/c$ setzen. □

Aussagen zu Idealen

(15) Eigentliche Ideale haben keine invertierbaren Elemente. *Seien A eine Algebra mit Eins und $J \subset A$ ein Ideal. Wenn $J \cap \mathcal{G}(A) \neq \emptyset$, dann ist $J = A$.*

Beweis. Sei $x \in J \cap \mathcal{G}(A)$. Dann liegt $e = xx^{-1}$ auch in J, weshalb $y = ye \in J \ \forall y \in A$. □

(16) Abschluss eines Ideals. *Seien A eine Banachalgebra und $J \subset A$ ein Ideal. Dann ist auch $\overline{J}$ ein Ideal.*

Beweis. Seien $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in A$ und $x, y \in \overline{J}$. Es existieren Folgen $(x_n), (y_n)$ in J, die gegen x bzw. y konvergieren. Wegen der Stetigkeit der algebraischen Operationen folgt $J \ni x_n + \lambda y_n \longrightarrow x + \lambda y \in \overline{J}$ und $J \ni zy_n \longrightarrow zy \in \overline{J}$. □

(17) Existenz maximaler Ideale. *Seien A eine Algebra mit Eins und $J_0 \subset A$ ein eigentliches Ideal. Dann existiert ein maximales Ideal M, das J_0 enthält.*

Beweis. Wir wenden das Zornsche Lemma an. Die Menge $\mathcal{P} := \{J \subset A : J$ eigentliches Ideal mit $J_0 \subset J\}$ wird durch die Mengeninklusion partiell geordnet. Sie ist nicht leer, da $J_0 \in \mathcal{P}$. Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ total geordnet. Dann ist $J_0 \subset J := \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$ ein Ideal. Zum Beweis davon seien $x, y \in J$ mit $x \in L$ und $y \in L'$. O.E. sei $L \subset L'$. Dann ist $x + \lambda y \in L' \subset J$ und $zx, xz \in L' \subset J$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}, z \in A$. — Nun ist $e \notin J$, weil $e \notin L$ für alle $L \in \mathcal{L}$ nach (15). Also ist $J \in \mathcal{P}$ eine obere Schranke für $\mathcal{L}$. Gemäß dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $M \in \mathcal{P}$, also ein maximales Ideal, das J_0 enthält. □

(18) Maximale Ideale sind abgeschlossen. *Seien A eine Banachalgebra mit Eins und $M \subset A$ ein maximales Ideal. Dann ist M abgeschlossen.*

Beweis. Wir wissen nach (15), dass $M \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$ ist. Dann ist auch $\overline{M} \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$, da $\mathcal{G}(A)$ offen in A ist nach (7). Nach (16) ist $\overline{M}$ ein Ideal. Also ist $M \subset \overline{M} \neq A$, weshalb $M = \overline{M}$, weil M ein maximales Ideal ist. □

(19) Homomorphismus, Quotientenalgebra. Seien A und B Banachalgebren. Eine Abbildung $\phi : A \to B$ heißt ein Homomorphismus, wenn ϕ linear und **multiplikativ** $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ ist. *Dann ist der Nullraum $\mathcal{N}(\phi) := \{x \in A : \phi(x) = 0\}$ eines Homomorphismus ein Ideal. Für jedes eigentliche abgeschlossene Ideal J ist die kanonische Projektion von A auf die Quotientenalgebra A/J ein stetiger Homomorphismus ungleich 0 mit Nullraum gleich J.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathcal{N}(\phi), \lambda \in \mathbb{C}, z \in A$: $\phi(x + \lambda y) = \phi(x) + \lambda\phi(y) = 0 \Longrightarrow x + \lambda y \in \mathcal{N}(\phi)$; $\phi(xz) = \phi(x)\phi(z) = 0 \cdot \phi(z) = 0 \Longrightarrow xz \in \mathcal{N}(\phi)$, ebenso $zx \in \mathcal{N}(\phi)$. Damit ist $\mathcal{N}(\phi)$ ein Ideal. — Offenbar ist $\mathcal{N}(\phi) \neq A \Leftrightarrow \phi \neq 0$. — Wenn ϕ stetig ist, dann ist $\mathcal{N}(\phi) = \phi^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen.

Sei jetzt J ein eigentliches abgeschlossenes Ideal. Dann ist bekanntlich der Quotientenraum A/J versehen mit der Norm $\|x + J\| := \inf\{\|x + z\| : z \in J\}$ ein Banachraum. Als Algebraprodukt setzt man

$$(x + J)(y + J) := xy + J.$$

Dieses ist wohldefiniert, denn für $z, z' \in J$ gilt: $(x + z + J)(y + z' + J) = (x + z)(y + z') + J = xy + xz' + zy + zz' + J = xy + J$, weil $xz' + zy + zz' \in J$. Damit wird A/J eine Banachlgebra mit der Eins $e + J$, falls $e \in A$ eine Eins ist. In der Tat gilt die Submultiplikativität der Norm, denn für alle $z, z' \in J$ ist $\|x + z\|\,\|y + z'\| \geqslant \|(x + z)(y + z')\| = \|xy + (xz' + zy + zz')\| \geqslant \|xy + J\| = \|(x + J)(y + J)\|$. Auch ist die Norm der Eins $e + J$ gleich 1, denn einerseits ist $\|e + J\| \leqslant \|e\| = 1$ und andererseits ist $\|e + J\| = \left\|(e + J)^2\right\| \leqslant \|e + J\|^2$, weshalb $\|e + J\| \geqslant 1$ weil $\|e + J\| > 0$ wegen $e \notin J \neq A$.

Schließlich ist die kanonische Projektion auf die Quotientenalgebra

$$\pi : A \to A/J, \quad x \mapsto x + J$$

ein surjektiver Algebrahomomorphismus $\neq 0$ mit $\mathcal{N}(\pi) = J$, der auch stetig ist, weil $\|\pi(x)\| = \|x + J\| \leqslant \|x\|$. $\square$

Aufgabe 11 Seien A eine Banachalgebra mit Eins und $J \subset A$ ein eigentliches Ideal. Dann ist auch $\overline{J}$ ein eigentliches Ideal.

Beweis. Nach (16) ist $\overline{J}$ ein Ideal. Nach (17) existiert ein maximales Ideal $M \supset J$. Nach (18) gilt $\overline{J} \subset \overline{M} = M$, woraus die Behauptung folgt. — Ein folgt ein anderer Beweis: $J \subset A \setminus \mathcal{G}(A)$ nach (15) und $\mathcal{G}(A)$ ist offen nach (7), weshalb $\overline{J} \subset A \setminus \mathcal{G}(A)$ und somit $e \notin \overline{J}$. $\square$

Kommutative Banachalgebren mit Eins

(20) Strukturraum. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Die Menge

$$\Delta(A) := \{h : A \to \mathbb{C} : h \neq 0 \text{ Algebrahomomorphismus}\}$$

heißt der Strukturraum von A. Seine Elemente heißen **Charaktere** von A.

(21) Hauptsatz. *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann gelten*

(a) $h(e) = 1$ *für jedes* $h \in \Delta(A)$.

(b) $\mathcal{N}(h)$ *ist ein maximales Ideal für jedes* $h \in \Delta(A)$.

(c) *Ist* $M \subset A$ *ein maximales Ideal, dann existiert ein eindeutiges* $h \in \Delta(A)$ *mit* $M = \mathcal{N}(h)$.

(d) $x \in \mathcal{G}(A) \Longleftrightarrow h(x) \neq 0$ *für alle* $h \in \Delta(A)$.

(e) $x \in \mathcal{G}(A) \Longleftrightarrow x \notin J$ *für alle eigentlichen Ideale* $J \subset A$.

(f) $x \in A,\ \lambda \in \sigma_A(x) \Longleftrightarrow$ *es existiert* $h \in \Delta(A)$ *mit* $h(x) = \lambda$.

Beweis. (a) $h \neq 0 \Rightarrow \exists\, x \in A$: $h(x) \neq 0 \Rightarrow h(x) = h(xe) = h(x)\,h(e) \Rightarrow h(e) = 1$. — (b) $\forall\, x \in A$: $h(x - h(x)\,e) = h(x) - h(x)\,h(e) = 0 \Rightarrow x - h(x)\,e \in \mathcal{N}(h)$ $\Rightarrow x \in \mathcal{N}(h) + \mathbb{C}e$. Also ist $\mathcal{N}(h)$ ein maximales Ideal.

(c) Ein maximales Ideal M ist nach (1.18) abgeschlossen. Dann ist A/M eine kommutative Banachalgebra mit Eins nach (1.19). Sei $x \in A \setminus M$ fest und definiere

$$J_x := \{ax + y : a \in A,\, y \in M\}.$$

Dies ist ein Ideal, denn $(ax+y)+\lambda(a'x+y') = (a+\lambda a')x + (y'+\lambda y') \in J_x$ und $b(ax+y) = (ba)x + by \in J_x$ für $b \in A$. Außerdem ist $J_x \supset M$ und $J \neq M$, denn $0x + y = y \in J_x \,\forall\, y \in M$ und $x = ex + 0 \in J_x \setminus M$. Deshalb ist $J_x = A$. Damit existieren $a \in A$, $y \in M$ mit $ax + y = e$. Daher ist $e + M = ax + M = (a+M)(x+M)$, weshalb $x + M \in \mathcal{G}(A/M)$. Dieses Ergebnis gilt für jedes $x \in A \backslash M$. Es bedeutet, dass $\mathcal{G}(A/M) = (A/M) \setminus \{0 + M\}$. Nach dem Satz (1.10) von Gelfand und Mazur folgt $A/M = \mathbb{C}(e+M)$. Damit ist die kanonische Projektion $\pi : A \to A/M$, $a \mapsto a + M$ der gesuchter Charakter. — Zur Eindeutigkeit sei $\mathcal{N}(h_1) = \mathcal{N}(h_2) = M$. Wie im Teil (b) gilt $x - h_i(x)e \in \mathcal{N}(h_i)\ \forall x \in A$, $i = 1, 2$. Es folgt $(h_1(x) - h_2(x))e \in M$, weshalb $h_1(x) - h_2(x) = 0$ nach (1.15), d.h. $h_1 = h_2$.

(d) Sei $x \in \mathcal{G}(A)$. Dann ist $1 = h(e) = h\left(xx^{-1}\right) = h(x)\, h\left(x^{-1}\right)$, weshalb $h(x) \neq 0$. — Umgekehrt sei $x \in A$ mit $h(x) \neq 0 \,\forall h \in \Delta(A)$. Die Menge

$$J_x := \{ax : a \in A\}$$

ist ein Ideal, denn $ax + \lambda a'x = (a + \lambda a')x \in J_x$ und $b(ax) = (ba)x \in J_x$. Wäre $J_x \neq A$, dann wäre J_x nach (1.17) und (c) in einem maximalen Ideal $\mathcal{N}(h)$ enthalten und somit $h(x) = h(ex) = 0$, was ein Widerspruch ist. Es ist also $J_x = A$. Damit existiert $a \in A$ mit $ax = e$, weshalb $x \in \mathcal{G}(A)$.

(e) Die Vorwärtsrichtung gilt nach (1.15). Zur Rückrichtung sei $x \notin \mathcal{N}(h)$ für alle $h \in \Delta(A)$. Dann ist x invertierbar nach (d).

(f) Ist $x - \lambda e \notin \mathcal{G}(A)$, dann existiert $h \in \Delta(A)$ mit $h(x - \lambda e) = 0$ nach (d), weshalb $h(x) = \lambda$. Umgekehrt folgt aus $x - h(x)e \in \mathcal{N}(h)$, dass $x - h(x)e \notin \mathcal{G}(A)$ nach (d), weshalb $h(x) \in \sigma_A(x)$. □

(22) Spektralradius und Charaktere. *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann gilt*

$$r_A(x) = \sup\{|h(x)| : h \in \Delta(A)\}.$$

Beweis. Dies folgt aus der Definition von $r(x)$ und (1.21-f). □

(23) Charaktere sind stetig. *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Für alle $h \in \Delta(A)$ und $x \in A$ gilt $|h(x)| \leqslant \|x\|$. Die Charaktere sind somit normfallend und insbesondere stetig.*

Beweis. $h(x) \in \sigma_A(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$ nach (1.21-f) und (1.9). □

(24) Gelfand Transformation. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Die Abbildung

$$\widehat{\ } : A \to \mathcal{B}(\Delta(A)),\ x \mapsto \hat{x}, \quad \text{wobei} \quad \hat{x} : \Delta(A) \to \mathbb{C},\ h \mapsto h(x)$$

heißt Gelfand Transformation auf A, und der Auswertungshomomorphismus $\hat{x}$ heißt die Gelfand Transformierte von $x \in A$.

(25) Erste Eigenschaften der Gelfand Transformation. *Seien A eine kommutative Banachalgebra mit Eins und $\hat{A} := \{\hat{x} : x \in A\}$. Dann gelten*

(a) *$\hat{A}$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(\Delta(A))$, die die Eins $1 = 1_{\Delta(A)}$ enthält. Die Gelfand Transformation $A \to \hat{A}$, $x \mapsto \hat{x}$ ist ein Algebrahomomorphismus, dessen Nullraum gleich* $\operatorname{rad} A := \bigcap \{M \subset A : M \text{ maximales Ideal}\}$ ist.

(b) $\hat{x}\,(\Delta(A)) = \sigma_A\,(x)$.

(c) $\|\hat{x}\|_\infty = r_A\,(x) \leqslant \|x\|$, *weshalb die Gelfandstransformation stetig ist.*

(d) $x \in \operatorname{rad}(A) \iff r_A\,(x) = \{0\} \iff \sigma_A\,(x) = \{0\}$.

Beweis. (a) Siehe zunächst (1.2-d). Es gilt $\hat{A} \subset B\,(\Delta(A))$ nach (23). Wegen $(\hat{x} + \lambda\hat{y})\,(h) = \hat{x}\,(h) + \lambda\hat{y}\,(h) = h\,(x) + \lambda h\,(y) = h\,(x + \lambda y) = \widehat{x + \lambda y}\,(h)$ und $(\hat{x}\hat{y})\,(h) = \hat{x}\,(h)\,\hat{y}\,(h) = h\,(x)\,h\,(y) = h\,(xy) = \widehat{xy}\,(h)$ ist $\hat{}$ ein Algebrahomomorphismus und $\hat{A}$ eine Unteralgebra. Weiter ist $\hat{e} \in \hat{A}$ und $\hat{e}\,(h) = h\,(e) = 1\ \forall\, h \in \Delta(A)$, weshalb $\hat{e} = 1_{\Delta(A)} = 1$. Schließlich gilt: $\hat{x} = 0 \iff \hat{x}\,(h) = h\,(x) = 0\ \forall\, h \in \Delta(A) \iff x \in \bigcap_{h \in \Delta(A)} \mathcal{N}(h) = \operatorname{rad}(A)$ nach (21) (b),(c).

(b) folgt aus (1.21-f).

(c) $\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}\,(h)| : h \in \Delta(A)\} = r_A\,(x) \leq \|x\|$ nach (1.22) und (1.9).

(d) $x \in \operatorname{rad} A \Leftrightarrow \hat{x} = 0 \Leftrightarrow r_A\,(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma_A\,(x) = \{0\}$. □

Die Menge $\operatorname{rad} A$ heißt **Radikal** von A. Allgemein heißt eine Algebra **halbeinfach**, wenn $\operatorname{rad} A = \bigcap \{M \subset A : M \text{ maximales Ideal}\} = \{0\}$.

(26) Gelfand Topologie. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Die Gelfand Topologie auf $\Delta(A)$ ist die Initialtopologie bezüglich der Menge $\hat{A}$ der Auswertungshomomorphismen $\hat{x}$. Das heißt, sie ist die schwächste Topologie auf $\Delta(A)$ bezüglich welcher jede Funktion $\hat{x}$ für $x \in A$ stetig ist. Damit ist $\hat{A}$ eine Unteralgebra der Algebra $C\,(\Delta(A))$ der stetigen Funktionen auf $\Delta(A)$.

(27) Eigenschaft der Gelfand Topologie. *Sei Z ein topologischer Raum. Eine Abbildung $g : Z \to \Delta(A)$ ist stetig genau dann, wenn alle $\hat{x} \circ g$, $x \in A$ stetig sind.*

Aufgabe 12 Man beweise (1.27).

Im Folgenden ist ein **kompakter Raum** ein Hausdorff Raum, für den jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(28) Strukturraum ist kompakt. *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Die Gelfand Topologie auf $\Delta(A)$ ist kompakt.*

Beweis. Für jedes $x \in A$ sei $K_x := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$. Setze $K := \prod_{x \in A} K_x$. Weil jedes $K_x \subset \mathbb{C}$ kompakt ist, ist der Produktraum K nach dem Satz von Tychonoff kompakt bezüglich der Produkttopologie.

Wir fassen K auf als die Menge der Funktionen $k : A \to \mathbb{C}$ mit $k(x) \in K_x$. Die Produkttopologie ist definitionsgemäß die Initialtopologie bezüglich der Menge der Projektionen $p_x : K \to K_x$, $p_x(k) := k(x)$ für $x \in A$. Offenbar ist $\Delta(A) \subset K$ nach (1.21-f) und (1.9) und die Gelfand Topologie auf $\Delta(A)$ gleich der Relativtopologie zur Produkttopologie auf K. Daher genügt es zu zeigen, dass $\Delta(A)$ abgeschlossen in K ist.

Sei $h_0 \in \overline{\Delta(A)}$. Wir zeigen, dass h_0 ein Charakter ist. Zunächst ist h_0 nicht trivial. Dazu betrachte man die offene Umgebung

$$U := \{k \in K : |k\,(e) - h_0\,(e)| < 1/2\}$$

in K von h_0. Daher existiert ein $h \in U \cap \Delta(A)$. Dafür gilt $|h\,(e) - h_0\,(e)| = |1 - h_0\,(e)| < 1/2$, weshalb $h_0\,(e) \neq 0$. — Weiter ist h_0 linear. Seien dazu $x, y \in A, \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$. Dann ist $U :=$

$$\{k \in K : |k\,(x) - h_0\,(x)| < \varepsilon, |k\,(y) - h_0\,(y)| < \varepsilon, |k\,(x + \lambda y) - h_0\,(x + \lambda y)| < \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von h_0 in K. Daher existiert ein $h \in U \cap \Delta(A)$. Wegen $h\,(x + \lambda y) = h\,(x) + \lambda h\,(y)$ folgt $|h_0\,(x + \lambda y) - h_0\,(x) - \lambda h_0\,(y)| \leqslant |h_0\,(x + \lambda y) - h\,(x + \lambda y)\,| + |h\,(x) - h_0\,(x)| + |\lambda h\,(y) - \lambda h_0\,(y)| < (1 + 1 + |\lambda|)\varepsilon$. Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$, weshalb $h_0\,(x + \lambda y) - h_0\,(x) - \lambda h_0\,(y) = 0$. — Schließlich ist h_0 multiplikativ. Dazu betrachten wir die offene Umgebung von h_0

$$U := \{k \in K : |k\,(x) - h_0\,(x)| < \varepsilon, |k\,(y) - h_0\,(y)| < \varepsilon, |k\,(xy) - h\,(xy)| < \varepsilon\}\,.$$

Wieder existiert $h \in U \cap \Delta(A)$. Weil $h\,(xy) = h\,(x)\,h\,(y)$ ergibt sich $|h_0\,(xy) - h_0\,(x)\;\, h_0\,(y)\,| \leqslant |h_0\,(xy) - h\,(xy)| + |h\,(x)\,h(y) - h(x)\,h_0\,(y)| + |h(x)\,h_0(y) - h_0(x)\,h_0\,(y)\,| < \varepsilon + |h(x)|\varepsilon + |h_0(y)|\varepsilon \leq \varepsilon + (\varepsilon + |h_0(x)|)\varepsilon + |h_0(y)|\varepsilon$. Das gilt für jedes $\varepsilon > 0$, weshalb $h_0\,(xy) = h(x)\,h(y)$ folgt. □

(29) Die Algebra $\mathcal{C}(E)$. *Sei E ein kompakter Raum. Dann ist $\mathcal{C}\,(E)$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins und $E \to \Delta(\mathcal{C}(E))$, $p \mapsto h_p$ mit $h_p(f) := f(p)$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Für jedes $p \in E$ sei $h_p : \mathcal{C}\,(E) \to \mathbb{C}$, $h_p\,(f) := f\,(p)$ die Punktauswertung. Diese ist ein Charakter. Denn $h_p\,(1_E) = 1_E\,(p) = 1$, $h_p\,(f + \lambda g) = (f + \lambda g)\,(p) = f\,(p) + \lambda g\,(p) = h_p\,(f) + \lambda h_p\,(g)$, $h_p\,(fg) = (fg)\,(p) = f\,(p)\,g\,(p) = h_p\,(f)\,h_p\,(g)$, weshalb h_p nicht null, linear und multiplikativ ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Zuordnung $p \mapsto h_p$ ein Homöomorphismus von E auf $\Delta\,(\mathcal{C}\,(E))$ ist. Nach dem Lemma von Urysohn trennt $\mathcal{C}\,(E)$ die Punkte von

E, d.h. $\forall p, q \in E$, $p \neq q$, existiert eine Funktion $f \in \mathcal{C}(E)$ mit $f(p) \neq f(q)$. Dann ist $h_p \neq h_q$, weshalb die Abbildung $p \mapsto h_p$ injektiv ist.

Zum Nachweis der Surjektivität sei angenommen, dass ein Charakter $h \in \Delta(\mathcal{C}(E))$ mit $h \neq h_p$ für alle $p \in E$ existiert. Nach (1.21-b), (1.21-c) ist dann der Nullraum $\mathcal{N}(h)$ ein maximales Ideal mit $\mathcal{N}(h) \neq \mathcal{N}(h_p)$ und daher mit $\mathcal{N}(h) \not\subset \mathcal{N}(h_p) = \{f \in \mathcal{C}(E) : f(p) = 0\}$. Also existiert zu jedem $p \in E$ ein $f \in \mathcal{N}(h)$ mit $f(p) \neq 0$. Die Mengen

$$U_f := E \backslash f^{-1}(\{0\}), \quad f \in \mathcal{N}(h)$$

bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge E. Daher existieren bereits endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{N}(h)$, so dass $E = U_{f_1} \cup \ldots \cup U_{f_n}$. Setze $g := f_1\overline{f_1} + \ldots + f_n\overline{f_n}$. Weil $\mathcal{N}(h)$ ein Ideal ist und $f_i \in \mathcal{N}(h), \overline{f_i} \in \mathcal{C}(E)$ $\forall\, i$, ist $g \in \mathcal{N}(h)$. Nach Wahl der f_i ist $g(p) = |f_1(p)|^2 + \ldots + |f_n(p)|^2 > 0$ für alle $p \in E$. Damit ist $g \in \mathcal{N}(h)$ invertierbar mit der Inversen $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}(E)$, was (1.15) widerspricht.

Die Abbildung $E \to \Delta(\mathcal{C}(E))$, $p \mapsto h_p$ ist stetig nach (1.27), weil für alle $f \in \mathcal{C}(E)$ die Komposition $p \longmapsto \hat{f}(h_p) = h_p(f) = f(p)$ stetig ist. Als stetige Bijektion zwischen zwei kompakten Räumen ist sie nach Aufgabe 13 sogar ein Homömorphismus. $\square$

Also ist der kompakte Grundraum E mit dem Strukturraum $\Delta(\mathcal{C}(E))$ identifizierbar. Bis auf Homöomorphie tritt jeder kompakte Raum als Strukturraum einer geeigneten kommutativen Banachalgebra mit Eins auf.

Aufgabe 13 Man zeige, dass eine stetige Bijektion zwischen zwei kompakten Räumen stets ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 14 Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Man zeige, dass $\mathcal{B}(E)$ halbeinfach ist.

Beweis. Wie man leicht nachrechnet, ist $h_p : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{C}$, $h_p(f) := f(p)$ ein Charakter von $\mathcal{B}(E)$ für jedes $p \in E$. Da $\mathcal{N}(h_p) = \{f \in \mathcal{B}(E) : f(p) = 0\}$ ist $\operatorname{rad}\mathcal{B}(E) \subset \bigcap\{f \in \mathcal{B}(E) : f(p) = 0 \;\forall\, p \in E\} = \{0\}$. $\square$

Aufgabe 15 Sei E ein topologischer Hausdorff Raum. Wann ist $\mathcal{C}_b(E)$ halbeinfach?

Aufgabe 16 Sei $E \neq \emptyset$ eine Menge. Man versehe E mit der diskreten Topologie. Sei βE die Stone-Čech Kompaktifizierung von E. Siehe dazu den Hinweis zu Aufgabe 18. Man zeige, dass $\mathcal{C}(\beta E) \to \mathcal{B}(E)$, $F \mapsto F|E$ ein Banachalgebraisomorphismus ist und $\Delta(\mathcal{B}(E))$ in natürlicher Weise zu βE homöomorph ist.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{B}(E)$. Wegen der diskreten Topologie auf E ist f stetig auf E in den kompakten Raum $\overline{f(E)} \subset \mathbb{C}$. Damit existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung F von f auf βF. Dafür $\|F\|_\infty = \sup\{|F(x)| : x \in \beta E\} = \sup\{|F(x)| : x \in E\} = \|F|E\|_\infty$, weil F stetig und E dicht in βE ist. Damit ist $\mathcal{C}(\beta E) \to \mathcal{B}(E)$, $F \mapsto F|E$ eine isometrische Bijektion. Sie ist sogar ein $*$–Isomorphismus, weil z.B. $(FG)|E = (F|E)(G|E)$, $\overline{F}|E = \overline{F|E}$, u.s.w. Nach (29) existiert zu jedem $H \in \Delta(\mathcal{C}(\beta E))$ genau ein $q \in \beta E$ mit $H(F) = F(q)\ \forall\ F \in \mathcal{C}(\beta E)$ und $\beta E \to \Delta(\mathcal{C}(\beta E))$, $q \mapsto H_q$, $H_q(F) := F(q)$ ist ein Homöomorphismus. Zusammen mit dem obigen $*$–Isomorphismus folgt der gesuchte Homöomorphismus $\beta E \to \Delta(\mathcal{B}(E))$, $q \mapsto h_q$, $h_q(f) := F(q)$. □

Aufgabe 17 In Aufgabe 16 betrachte speziell $E = \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie versehen. Die Stone-Čech Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ läßt sich mit der Menge $\mathbb{U}$ der Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ identifizieren (siehe: *L.A. Steen, J.A. Seebach, Jr., Counterexamples in Topology, Springer New York 1978, 111.*). Sei $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ und $\mathcal{U} \in \mathbb{U}$. Man zeige, dass $\{u\} := \bigcap\{\overline{f(U)} : U \in \mathcal{U}\}$ einpunktig ist, dass $F : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, $F|\mathbb{N} := f$, $F(\mathcal{U}) := u$ die eindeutige stetige Fortsetzung von f ist und dass es zu jedem $h \in \Delta(\mathcal{B}(\mathbb{N}))$ genau einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$ gibt mit $h(f) = F(\mathcal{U})\ \forall\, f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Beweis. Setze $P := \bigcap\{\overline{f(U)} : U \in \mathcal{U}\}$. Wir zeigen, dass P einpunktig ist.

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ endlich. Dann ist $\bigcap \mathcal{F} =: V \in \mathcal{U}$ mit $f(V) \subset f(U)\ \forall\ U \in \mathcal{F}$, weshalb $\emptyset \neq f(V) \subset \bigcap\{\overline{f(U)} : U \in \mathcal{F}\}$. Weil die $\overline{f(U)}$ kompakt sind, folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft, dass $P \neq \emptyset$. — Sei nun $A \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von u. Wir zeigen jetzt, das $u \in \overline{f(f^{-1}(A) \cap U)}$ für jedes $U \in \mathcal{U}$: Seien $x_n \in U$ mit $f(x_n) \to u$, wobei o.E. $f(x_n) \in A\ \forall\ n$. Damit ist $x_n \in f^{-1}(A) \cap U$, weshalb $f(x_n) \in f\left(f^{-1}(A) \cap U\right)$ und somit $u \in \overline{f(f^{-1}(A) \cap U)}$. Insbesondere ist $f^{-1}(A) \cap U \neq \emptyset\ \forall\ U \in \mathcal{U}$. — Angenommen es existiert $u' \in P$, $u' \neq u$. Dann wähle eine Umgebung $A' \subset \mathbb{C}$ von u' mit $A' \cap A = \emptyset$. Damit folgt $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(A) = \emptyset$, obwohl $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(A') \in \mathcal{U}$, was ein Widerspruch ist.

Damit ist $F : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$, $F|\mathbb{N} := f$, $F(\mathcal{U}) := u$ eine wohldefinierte Fortsetzung von $f \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$. Wir zeigen die Stetigkeit von F in $\{u\}$. Zunächst sei erinnert, dass $\mathbb{U}_N := \{\mathcal{U} \in \mathbb{U} :\ N \in \mathcal{U}\}$ mit $N \subset \mathbb{N}$ eine Basis der Stone–Čech Topologie auf $\mathbb{U}$ bilden. Sei nun $A \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Umgebung von u und sei $\mathcal{U} \in \mathbb{U}_N$ für $N := f^{-1}(A)$. Dann ist $f^{-1}(A) \cap U \neq \emptyset\ \forall\ U \in \mathcal{U}$. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ endlich und $V := \bigcap \mathcal{F}$. Dann ist $V \in \mathcal{U}$. Damit ist $f^{-1}(A) \cap V \neq \emptyset$ und somit $\bigcap\{A \cap \overline{f(U)} : U \in \mathcal{F}\} \supset A \cap f(V) \neq \emptyset$. Aus der endlichen Durchschnittseigenschaft folgt nun, dass $A \cap \bigcap\{\overline{f(U)} : U \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$, woraus mit obigem Ergebnis $P \subset A$ und somit $\mathcal{U} \in F^{-1}(A)$ folgt. Also ist $\mathbb{U}_N \subset F^{-1}(A)$. (Übrigens gilt auch $\mathbb{U}_N \supset F^{-1}(A)$, was einfacher einzusehen ist.) Hiermit beweist man leicht die Stetigkeit von F.

Der Rest der Behauptung folgt unmittelbar aus Aufgabe (16). □

Aufgabe 18 Sei $E \neq \emptyset$ ein vollständig regulärer Raum. Man zeige, dass $\Delta(\mathcal{C}_b(E))$ homöomorph zur Stone–Čech Kompaktifizierung von E ist, wobei $p \mapsto h_p$, $h_p(f) := f(p)$ die stetige Einbettung von E in $\Delta(\mathcal{C}_b(E))$ ist.

Hinweis: Man erinnere sich, dass die Stone-Čech Kompaktifizierung βE eines vollständig regulären Raums E dadurch bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt ist, dass βE kompakt ist, E dicht in βE eingebettet ist und dass jede stetige Funktion auf E in einen kompakten Raum eine eindeutige stetige Fortsetzung auf βE hat.

Aufgabe 19 Verallgemeinerung von (23): Seien A, B zwei kommutative Banachalgebren mit Eins, sei B halbeinfach und sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus. Dann ist ϕ stetig.

Beweis. Aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen genügt es zu zeigen, dass für jede Folge (x_n) in A mit $x_n \to x$ und $\phi(x_n) \to y$ die Gleichheit $y = \phi(x)$ folgt. Dazu betrachte man $h := k \circ \phi$ für $k \in \Delta(B)$. Dann ist offenbar $h \in \Delta(A) \cup \{0\}$.

Nach (23) folgt $k(y) = \lim_n k(\phi(x_n)) = \lim_n h(x_n) = h(x) = k \circ \phi(x)$. Hieraus folgt $k(y - \phi(x)) = 0 \;\forall\; k \in \Delta(B)$, weshalb $y - \phi(x) \in \mathrm{rad}(B) = \{0\}$ und somit $y = \phi(x)$. □

Aufgabe 20 Seien A eine kommutative Banachalgebra mit Eins und $r := \inf\limits_{\|x\|=1} \left\|x^2\right\|$, $s := \inf\limits_{\|x\|=1} \|\hat{x}\|_\infty$. Man zeige, dass $s^2 \leqslant r \leqslant s$.

Beweis. Nach Definition von s ist $\|\hat{x}\|_\infty \geq s\|x\|$. Da allgemein $\|\hat{y}\|_\infty \leq \|y\|$ folgt $\|x^2\| \geq \|\widehat{x^2}\|_\infty = \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \geq s^2\|x\|^2 \;\forall\; x \in A$, weshalb $s^2 \leq r$. — Nach Definition von r ist $\|x^2\| \geq r\|x\|^2$. Mit Induktion nach n folgt $\|x^m\| \geq r^{m-1}\|x\|^m$ $\forall\; m = 2^n, n = 1, 2, \dots$ und somit $r(x) = \lim_m \|x^m\|^{\frac{1}{m}} \geq r\|x\|$ nach (9)(b). Weil $r(x) = \|\hat{x}\|_\infty$ nach (25)(c) folgt $s \geq r$. □

Aufgabe 21 Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Man zeige:

(a) Die Gelfand Transformation ist normerhaltend genau dann, wenn $\left\|x^2\right\| = \|x\|^2$ für alle $x \in A$.

(b) Es sind A halbeinfach und $\hat{A}$ abgeschlossen in $\mathcal{C}\left(\Delta(A)\right)$ genau dann, wenn eine Konstante c existiert mit $\|x\|^2 \leqslant c\left\|x^2\right\|$ für alle $x \in A$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$: $\|x^2\| = \|\widehat{x^2}\|_\infty = \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 = \|x\|^2$. — $\Leftarrow$: Nach Aufgabe (20) ist $r = 1$ und somit $s^2 \leq 1 \leq s$, weshalb auch $s = 1$, woraus $\|x\| \leq \|\hat{x}\|_\infty$. Stets gilt jedoch $\|x\| \geq \|\hat{x}\|_\infty$ nach (25)(c).

(b) $\Rightarrow$: Die Gelfand Transformation ist bijektiv nach (25)(a), weil A halbeinfach ist, und stetig nach (25)(c). Weil $\hat{A}$ abgeschlossen ist, ist $\hat{A}$ eine Banachalgebra. Nach dem Satz von der stetigen Inversen ist die Umkehrabbildung der Gelfand Transformation ebenfalls stetig. Damit existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|x\| \leq c\,\|\hat{x}\|_\infty \;\forall\; x \in A$. Daraus folgt $\|x\|^2 \leq c^2\|\hat{x}\|_\infty^2 = c^2\|\hat{x}^2\|_\infty = c^2\|\widehat{x^2}\|_\infty \leq c^2\|x^2\|$. — $\Leftarrow$: Für r, s aus Aufgabe (20) ergeben sich $r \geq \frac{1}{c} > 0$, weshalb $s > 0$ und somit $\|x\| \leq \frac{1}{s}\|\hat{x}\|_\infty$. Daher ist $\mathrm{rad}\,(A) = \{0\}$, denn für $x \in \mathrm{rad}\,(A)$ gilt $\|\hat{x}\|_\infty = 0$ nach (25)(d), (c). Damit ist A halbeinfach und die Gelfand Transformation injektiv. Ist weiter $(\hat{x}_n)$ eine Cauchy Folge in $\hat{A}$, dann ist (x_n) eine Cauchy Folge in A. Diese konvergiert gegen ein x in A. Damit konvergiert $(\hat{x}_n)$ gegen x wegen der Stetigkeit der Gelfand Transformation nach (25)(c). Da $\mathcal{C}(\Delta(A))$ vollständig ist, folgt der Rest der Behauptung. □

C^*-Algebren

(30) Involution. Sei A eine Algebra. Eine Abbildung $* : A \longrightarrow A$ heißt Involution, wenn für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten:

(a) $(x + \lambda y)^* = x^* + \overline{\lambda} y^*$ *Antilinearität.*

(b) $(xy)^* = y^* x^*$ *Antimultiplikativität.*

(c) $x^{**} = x$ *Idempotenz.*

Eine Involution ist daher ein antilinearer Antiisomorphismus der Ordnung 2.

(31) Beispiele für Involutionen.

(a) $* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \overline{a}$.

(b) $* : M_d(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C})$, $A \mapsto A^*$, wobei A^* die adjungierte Matrix ist mit $(A^*)_{ij} = \left(\overline{A}_{ji}\right)$.

(c) $* : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$, $T \mapsto T^*$, wobei H ein Hilbertraum und T^* der adjungierte Operator ist.

(d) $* : \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$, $f \mapsto \overline{f}$, wobei $\overline{f}(p) := \overline{f(p)}$.

(e) $* : A\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \to A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$, $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$. Siehe Aufgabe (23).

(32) Spezielle Elemente einer Algebra mit Involution. Seien A eine Algebra mit Involution und $x \in A$. Dann heißt

- x **normal**, wenn $xx^* = x^*x$.
- x **selbstadjungiert**, wenn $x = x^*$.
- x eine **Projektion**, wenn $x^2 = x$.
- x **positiv**, wenn ein $y \in A$ existiert mit $x = y^*y$.

Im Fall, dass A eine Eins hat, heißt

- x **unitär**, wenn x invertierbar und $x^{-1} = x^*$ ist.

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ positiv, dann ist offenbar $\langle x, Tx\rangle \geq 0 \; \forall \, x \in H$, was man mit $T \geq 0$ bezeichnet. Wir werden sehen, dass auch die Umkehrung davon gilt. Beachte, dass H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ ist.

(33) Eigenschaften der Involution. *Sei A eine Banachalgebra mit Eins und Involution und sei $x \in A$. Dann gelten* (a) – (e).

(a) $x + x^*$, $\quad i(x - x^*)$, $\quad xx^*$, $\quad x^*x$ *sind selbstadjungiert.*

(b) $x = u + iv$ *mit* u, v *selbstadjungiert* $\Longleftrightarrow u = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $v = \frac{1}{2i}(x - x^*)$.

(c) $e = e^*$.

(d) $x \in \mathcal{G}(A) \Longleftrightarrow x^* \in \mathcal{G}(A) \Longrightarrow (x^*)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^*$.

(e) $\lambda \in \sigma(x) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Beweis. (a) $(x+x^*)^* = x^* + x, \ldots$ — (b) $x = u + iv$ mit u, v selbstadjungiert $\Longleftrightarrow x^* = u - iv$ mit u, v selbstadjungiert $\Longleftrightarrow x + x^* = 2\,u,\ x - x^* = 2i\,v$. — (c) $xe^* = (ex^*)^* = (x^*e)^* = e^*x$; $(ex^*)^* = x^{**} = x$. Also ist $xe^* = e^*x = x$, weshalb e^* eine Eins und somit gleich e ist. — (d) $x \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow xx^{-1} = e \Rightarrow e = e^* = \left(xx^{-1}\right)^* = \left(x^{-1}\right)^* x^*$. Ebenso folgt $x^* \left(x^{-1}\right)^* = e$, weshalb $x^* \in \mathcal{G}(A)$ und $\left(x^{-1}\right)^* = (x^*)^{-1}$. Zur Rückrichtung ersetze x durch x^*. — (e) Mit (c) und (d) folgt: $\lambda \in \sigma(x) \Longleftrightarrow x - \lambda e$ nicht invertierbar $\Longleftrightarrow (x-\lambda e)^* = x^* - \overline{\lambda} e$ nicht invertierbar $\Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$. □

Aufgabe 22 Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins und sei A halbeinfach. Dann ist jede Involution auf A stetig.

Beweis. Sei $h \in \Delta(A)$. Dann ist $\tilde{h} : A \to \mathbb{C}$, $\tilde{h}(x) := \overline{h(x^*)}$ ebenfalls in $\Delta(A)$, wie leicht nachzuprüfen ist. Insbesondere ist damit $\tilde{h}$ stetig nach (23). — Wir wenden jetzt den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die konjugiert lineare Involution $*$ an. Es gelte $x_n \to x$ und $x_n^* \to y$. Dann folgt $\tilde{h}(y) = \lim_n \tilde{h}(x_n^*) = \lim_n \overline{h(x_n)} = \overline{h(x)}$, weshalb $h(y^*) = h(x)$. Damit ist $y^* - x \in \operatorname{rad}(A) = \{0\}$ und somit $y^* = x$ bzw. $y = x^*$. □

(34) C^*–Algebra. Eine Banachalgebra A mit Eins und Involution heißt C^*-Algebra, wenn

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A.$$

(35) Involution ist isometrisch. *In* (1.34) *reicht es zu fordern, dass* $\|x\|^2 \leqslant \|xx^*\|$ *für alle* $x \in A$. *Es folgt* $\|x\| = \|x^*\|$.

Beweis. Zunächst ist $\|x\|^2 \leqslant \|xx^*\| \leqslant \|x\| \, \|x^*\|$, weshalb $\|x\| \leqslant \|x^*\|$ für alle $x \in A$. Für x^* folgt daraus $\|x^*\| \leqslant \|x\|$. Damit gilt $\|x\| = \|x^*\|$. Daraus folgt die noch übrige Ungleichung $\|xx^*\| \leqslant \|x\| \, \|x^*\| = \|x\|^2$. □

(36) Beispiele zu C^*-Algebren.

(a) $\mathbb{C}$ ist eine C^*-Algebra mit der Involution $a \mapsto \overline{a}$.

(b) $M_d(\mathbb{C})$ ist eine C^*-Algebra mit der Adjunktion als Involution.

(c) Sei H ein Hilbertraum. Dann ist $L(H)$ eine C^*-Algebra mit der Adjunktion als Involution.

(d) $B(E)$ mit der Involution $f \mapsto \overline{f}$ ist eine C^*-Algebra. Im Fall, dass E ein metrischer Raum ist, ist $C_b(E)$ eine Unter-C^*-Algebra.

(e) $A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ aus (2)(e) mit $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ ist *keine* C^*-Algebra.

Aufgabe 23 Sei $A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ die kommutative Banachalgebra aus (2)(e). Man zeige, dass $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ eine isometrische Involution auf $A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ definiert. Man zeige, dass $A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ mit dieser Involution keine C^*–Algebra ist. Man gebe einen Charakter h von $A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ an, der nicht $*$–treu ist, d.h. der nicht $h(f^*) = \overline{h(f)}$ erfüllt.

Beweis. Mit $f \in A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ ist auch $f^* \in A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$, wobei die Entwicklungskoeffizienten von f^* die komplex konjugierten von f sind. Die Eigenschaften einer Involution sind offensichtlich erfüllt. Auch ist $\|f^*\|_\infty = \|f\|_\infty$ offensichtlich. — Für $f \in A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$, $f(z) := i+z$ folgt: $\|f\|^2 = \sup\{|i+z|^2 : |z| \leq 1\} = 4$, $\|ff^*\| = \sup\{|(i+z)(-i+z)| : |z| \leq 1\} = \sup\{|1+z^2| : |z| \leq 1\} = 2$. Also ist $\|f\|^2 \neq \|ff^*\|$ und somit $A\left(\overline{\mathbb{D}}\right)$ keine C^*-Algebra. — Sei $h \in \Delta(A\left(\overline{\mathbb{D}}\right))$, $h(f) := f(i)$. Dann sind $h(f^*) = \overline{f(-i)}$ und $\overline{h(f)} = \overline{f(i)}$ für $f(z) := z$ verschieden. □

(37) Satz von Gelfand und Naimark. *Sei A eine kommutative C^*-Algebra. Dann ist die Gelfand Transformation*

$$A \to \mathcal{C}\left(\Delta(A)\right),\ x \mapsto \hat{x} \ \textit{mit} \quad \hat{x}(h) = h(x)$$

ein $*$***-Isomorphismus****, d.h. bijektiv, normerhaltend ($\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$), $*$**-treu** ($\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$) und ein Algebrahomomorphismus. Weiter gelten*

(a) $h(x^*) = \overline{h(x)}$ für alle $x \in A$ und $h \in \Delta(A)$.

(b) x ist selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ $\hat{x}$ ist reellwertig $\Longleftrightarrow$ $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (a).

Gemäß (1.33-b) ist $x = u + iv$ mit selbstadjungierten $u, v \in A$. Damit ist $x^* = u - iv$. Weil $h(x^*) = h(u) - ih(v)$ und $\overline{h(x)} = \overline{h(u)} - i\overline{h(v)}$, bleibt zu zeigen ist, dass $h(x)$ reell ist, falls x selbstadjungiert ist. Sei also $x = x^*$ und setze $h(x) = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir wollen $\beta = 0$ zeigen. Für $z := x + ite$ mit $t \in \mathbb{R}$ ist $h(z) = \alpha + i(\beta + t)$ und $zz^* = (x + ite)(x - ite) = x^2 + t^2 e$. Mit (23) folgt $\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leqslant \|z\|^2 = \|zz^*\| = \left\|x^2 + t^2 e\right\| \leqslant \left\|x^2\right\| + t^2$, weshalb $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leqslant \|x\|^2$. Da diese Ungleichung für alle t gilt, muß $\beta = 0$ sein.

Die Aussage (a) bedeutet $\widehat{x^*}(h) = \overline{\hat{x}(h)}$ für alle $x \in A$, $h \in \Delta$. Daher ist die Gelfand Transformation $*$-treu. Insbesondere ist Gelfand Transformierte eines selbstadjungierten Elements x reellwertig, was nach (1.25-b) bedeutet, dass ihr Spektrum $\sigma(x)$ reell ist. Ist umgekehrt für $x \in A$ die Gelfand Transformierte $\hat{x}$ reellwertig, dann ist $\hat{x} = \widehat{x^*}$. Weil, wie wir jetzt zeigen, die Gelfand Transformation isometrisch und somit injektiv ist, folgt daraus $x = x^*$, womit (b) vollständig gezeigt ist.

Sei $y \in A$ selbstadjungiert. Dann gilt $\left\|y^2\right\| = \|y^* y\| = \|y\|^2$ und mit (1.25-c) und (1.9-b) folgen $\|\hat{y}\|_\infty = r(y) = \lim\limits_n \left\|y^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|y\|$. Sei nun $x \in A$ beliebig. Für das selbstadjungierte Element $y := x^* x$ gilt $\hat{y} = \widehat{x^* x} = \overline{\hat{x}}\hat{x} = |\hat{x}|^2$. Daher folgt $\|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|x^* x\| = \|x\|^2$, d.h. $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$.

Der $*$–Homomorphismus $\widehat{\ }$ ist also isometrisch. Da A ein Banachraum ist, ist $\hat{A}$ eine Unter–C^*–Algebra von $\mathcal{C}(\Delta)$. Weiter trennt $\hat{A}$ die Punkte von Δ, denn $\hat{x}(h) = \hat{x}(h')$ für alle $x \in A$ impliziert $h(x) = h'(x) \, \forall x \in A$, d.h. $h = h'$. Der Satz von Stone–Weierstrass (siehe (1.38)) ergibt nun $\hat{A} = \mathcal{C}(\Delta)$. $\square$

Wir zitieren zur Erinnerung ohne Beweis den Approximationssatz von

(38) Stone und Weierstraß. *Sei E ein kompakter Raum und sei B eine $*$–Unteralgebra von $\mathcal{C}(E)$, die die Punkte von E trennt. Dann ist entweder $\overline{B} = \mathcal{C}(E)$ oder $\overline{B} = \{f \in \mathcal{C}(E) : f(b) = 0\}$ für ein $b \in E$.*

Der Satz von Gelfand und Naimark besagt also, dass eine kommutative C^*-Algebra mittels der Gelfand Transformation mit der C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf ihren Strukturraum identifiziert werden kann.

(39) Erzeugung einer Unteralgebra. Sei A eine Banachalgebra mit Eins und sei $S \neq \emptyset$ eine Teilmenge von A. Im Folgenden sei $x^0 := e$ für alle $x \in A$. Dann heißt

$$\mathcal{A}(S) := \overline{\{P(s_1, \ldots, s_n) : \, P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n], \; s_1, \cdots, s_n \in S, \; n \in \mathbb{N}\}}$$

die von S erzeugte Unterbanachalgebra mit Eins von A. *Sie ist offenbar die Unterbanachalgebra mit Eins von A, die in jeder Unterbanachalgebra mit Eins enthalten ist, die S enthält. Falls S kommutativ ist, d.h. wenn $st = ts \; \forall s, t \in S$, dann ist auch $\mathcal{A}(S)$ kommutativ.*

Sei jetzt A eine C^*-Algebra und $S^* := \{s^* : s \in S\}$. Dann ist $\mathcal{A}(S \cup S^*)$ die von S erzeugte Unter–C^*–Algebra von A. — Für $x \in A$ heißt $C^*(x) := \mathcal{A}(\{x, x^*\})$ die von x erzeugte Unter–C^*–Algebra von A. *Sie ist genau dann kommutativ, wenn x normal ist. — Nach* (1.40) *unten gilt für jedes Element x einer C^*–Algebra A*

$$\sigma_A(x) = \sigma_{C^*(x)}(x) =: \sigma(x).$$

Daher wird von dem **Spektrum** von x schlechthin gesprochen. Vgl. (1.11).

(40) Spektrum bezüglich C^*–Algebra. *Seien A eine C^*-Algebra und B eine Unter–C^*-Algebra von A. Dann ist $\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \;\; \forall x \in B$.*

Beweis. Zu zeigen ist $x^{-1} \in B$ für $x \in B \cap \mathcal{G}(A)$. Gemäß (1.33-d) folgt aus Letzterem $x^* \in B \cap \mathcal{G}(A)$ und $x^*x \in B \cap \mathcal{G}(A)$, sowie $(x^*x)^{-1} = x^{-1}(x^*)^{-1}$, weshalb $(x^*x)^{-1} x^* = x^{-1}$. Daher genügt es zu zeigen, dass $(x^*x)^{-1} \in B$.

Sei $B_0 = \overline{B_0} \subset B$ die von $y := x^*x$ erzeugte Unterbanachalgebra mit Eins (siehe (1.39)). Wir zeigen $y^{-1} \in B_0$. Weil y selbstadjungiert ist, ist $B_0 = C^*(y)$ eine kommutative C^*–Algebra (siehe (1.39)) mit $\sigma_{B_0}(y) \subset \mathbb{R}$ nach (1.37-b). Somit ist $\partial\sigma_{B_0}(y) = \sigma_{B_0}(y)$. Aus (1.11) folgt $\sigma_{B_0}(y) \subset \sigma_A(y) \subset \sigma_{B_0}(y)$, d.h. $\sigma_{B_0}(y) = \sigma_A(y)$. Weil schließlich $y \in \mathcal{G}(A)$ ist $0 \notin \sigma_A(y)$, also $0 \notin \sigma_{B_0}(y)$, weshalb $y^{-1} \in B_0$. $\square$

Aufgabe 24 Sei A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Man zeige:

(a) $\|x\|^n = \|x^n\|$

(b) $\|x\| = r(x)$.

Beweis. Mit Hilfe der Gelfand Transformation (1.37) auf $C^*(x)$ folgt $\|x\|^n = \|\hat{x}\|_\infty^n = \|\hat{x}^n\|_\infty = \|\widehat{x^n}\|_\infty = \|x^n\|$. Das zeigt (a). Daraus folgt (b) wegen (1.9-b). □

(41) Funktionenkalkül für ein normales Element. *Seien A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Dann existiert genau ein $*$-Isomorphismus*

$$\mathcal{C}(\sigma(x)) \longrightarrow C^*(x),\ f \longmapsto f[x],$$

der $j[x] = x$ erfüllt. Dabei ist $j : \sigma(x) \hookrightarrow \mathbb{C},\ j(\lambda) := \lambda$. Er ist durch

$$\widehat{f[x]} = f \circ \hat{x}, \quad \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(x)) \qquad (\star)$$

gegeben, wobei $\widehat{\ }$ *nach* (1.24) *die Gelfand Transformation auf* $C^*(x)$ *bezeichnet.*

Beweis. Setze $\Delta := \Delta(C^*(x))$. Nach dem Satz von Gelfand und Naimark (1.37) ist die Gelfand Transformation ein $*$-Isomorphismus. Die Inverse $\gamma : \mathcal{C}(\Delta) \longrightarrow C^*(x)$ ist wieder ein $*$-Isomorphismus und $(\star)$ lautet $f[x] = \gamma(f \circ \hat{x})$. Wir nehmen dies als Definition für die Existenz und zeigen also, dass

$$\mathcal{C}(\sigma(x)) \longrightarrow C^*(x), f \longmapsto \gamma(f \circ \hat{x})$$

ein $*$-Isomorphismus mit $j \mapsto x$ ist.

Nach (1.25-b) ist $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$. Damit ist $f \circ \hat{x} : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ als Element von $\mathcal{C}(\Delta)$ wohldefiniert, weshalb auch $\gamma(f \circ \hat{x}) \in C^*(x)$ wohldefiniert ist. Dass j auf x abgebildet wird, ist klar.

Da γ ein $*$-Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C}(\sigma(x)) \to \mathcal{C}(\Delta)$, $f \mapsto f \circ \hat{x}$ ein $*$-Isomorphismus ist. Offensichtlich gelten: $(f + \lambda g) \circ \hat{x} = f \circ \hat{x} + \lambda g \circ \hat{x}$, $(fg) \circ \hat{x} = (f \circ \hat{x})(g \circ \hat{x})$, $\overline{f} \circ \hat{x} = \overline{f \circ \hat{x}}$ und $1 \circ \hat{x} = 1$ (da $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$). Außerdem ist $\|f \circ \hat{x}\|_\infty = \sup_{h \in \Delta} |f(\hat{x}(h))| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |f(\lambda)| = \|f\|_\infty$. — Zum Nachweis der Surjektivität betrachte das Bild B von $\mathcal{C}(\sigma(x))$ in $C^*(x)$ unter $f \mapsto f[x]$. Aus obigem folgt, dass B eine Unter–C^*–Algebra ist, die e und x enthält. Daher ist $B = C^*(x)$. Also ist auch $f \mapsto f \circ \hat{x}$ surjektiv.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei $\phi : \mathcal{C}(\sigma(x)) \longrightarrow C^*(x)$ ein weiterer $*$-Isomorphismus mit $\phi(j) = x$. Dafür gelten $\phi\left(\overline{j}\right) = \phi(j)^* = x^*, \phi(1) = e$. Sei $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$. Weil $\phi\left(P\left(j, \overline{j}\right)\right) = P\left(\phi(j), \phi\left(\overline{j}\right)\right) = P(x, x^*)$ ist, stimmen ϕ und der obige $*$-Isomorphismus auf $\{P(x, x^*) : P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]\}$ überein. Diese Menge liegt dicht in $C^*(x)$. Daher stimmen die beiden Isomorphismen generell überein, d.h. $\phi(f) = f[x]$ für alle $f \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. □

(42) Natürliche Isomorphien. Gemäß (1.29) ist $\sigma(x) \simeq \Delta(\mathcal{C}(\sigma(x)))$ mittels $p \mapsto h_p$, wobei $h_p(f) := f(p)$. Weiter ist $\Delta(\mathcal{C}(\sigma(x))) \simeq \Delta(C^*(x))$ gemäß dem Funktionenkalkül (1.41). Insgesamt sind in natürlicher Weise isomorph

$$\sigma(x) \simeq \Delta(\mathcal{C}(\sigma(x))) \simeq \Delta(C^*(x)).$$

Zu jedem $h \in \Delta(C^*(x))$ gibt es genau ein $\lambda \in \sigma(x)$ derart, dass $h(P(x, x^*)) = P(\lambda, \overline{\lambda})$ für alle $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$.

Aufgabe 25 Seien A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Man zeige:

$$\sigma(f[x]) = f(\sigma(x)), \quad \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(x)).$$

Beweis. Nach (1.41) ist $\widehat{f[x]} = f \circ \hat{x}$. Mit (1.25-b) folgt $\sigma(f[x]) = \widehat{f[x]}(\Delta(C^*(x))) = f(\hat{x}(\Delta(C^*(x)))) = f(\sigma(x))$. □

Aufgabe 26 Seien A eine C^*-Algebra, $x \in A$ normal und $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Man zeige:

$$(k \circ f)[x] = (f \circ k)[x], \quad \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(x) \cup \sigma(x^*)).$$

Aufgabe 27 Seien A eine C^*-Algebra und $A_+ := \{x \in A : x = x^*, \ \sigma(x) \subset [0, \infty[\}$. Man zeige die folgenden Aussagen:

(a) $x \in A_+ \Leftrightarrow \exists_1 \, y \in A_+ : x = y^2$

(b) $x, y \in A_+ \Rightarrow x + y \in A_+$

(c) $y \in A \Rightarrow y^* y \in A_+$.

Aus (a) und (b) folgt, dass A_+ genau die Menge der positiven Elemente von A im Sinne der Definition (32) ist.

Beweis.

(a) "$\Rightarrow$": Sei $w : \sigma(x) \to \mathbb{C}$, $w(\lambda) := \sqrt{\lambda}$. Offenbar ist $w \in \mathcal{C}(\sigma(x))$. Damit ist $y := w[x] \in C^*(x) \subset A$ wohldefiniert und erfüllt $y^2 = w^2[x] = j[x] = x$ nach dem Funktionenkalkül (1.41). Nach Aufgabe (25) ist $\sigma(y) = w(\sigma(x)) \subset [0, \infty[$. Also ist $y \in A_+$ nach (1.37-b). — Zur Eindeutigkeit sei auch $z \in A_+$ mit $z^2 = x$. Dann gilt $zx = z^3 = xz$. Also vertauschen x und z. Sei B die von den kommutierenden selbstadjungierten Elementen x und z erzeugte Unter–C^*–Algebra von A. Diese ist kommutativ und enthält $C^*(x)$. Insbesondere ist $y \in B$. Man wende jetzt die Gelfand Transformation (1.37) auf B an. Sie liefert $\hat{x} = \widehat{y^2} = \hat{y}^2$, wobei $\hat{y}$ nichtnegativwertig ist wegen (1.25-b). Da das Gleiche für $\hat{z}$ gilt, folgt $\hat{y} = \hat{z}$ und daher $y = z$. "$\Leftarrow$": Sei $q : \sigma(y) \to \mathbb{C}$, $q(\lambda) := \lambda^2$. Damit ist $q \in \mathcal{C}(\sigma(y))$. Wendet man Aufgabe (25) auf q und y anstelle von f und x, so folgt die Behauptung.

(b) Im Folgenden werden die allgemeinen Fakten $r(a) = \|a\|$ nach Aufgabe (24) und $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$ nach (1.9-a) benutzt. Seien $\alpha := \|x\|$, $\beta := \|y\|$, $z := x + y$, $\gamma := \alpha + \beta$. Weil $\sigma(x) \subset [0, \alpha]$, ist $\sigma(\alpha e - x) \subset [0, \alpha]$ und somit $\|\alpha e - x\| \leq \alpha$. Ebenso gilt $\|\beta e - y\| \leq \beta$. Das Spektrum des selbstadjungierten Elementes $\gamma e - z$ liegt in $[-\gamma, \gamma]$, weil $\|(\alpha e - x) + (\beta e - y)\| \leq \alpha + \beta = \gamma$. Daher ist $\sigma(z) \subset [0, 2\gamma]$.

(c) Sei $x := y^* y$ und setze $\Delta := \Delta(C^*(x))$. Da x selbstadjungiert ist, ist $\hat{x}$ reellwertig nach (1.37-b). Wegen (1.25-b) ist $\hat{x} \geq 0$ zu zeigen. Nach dem Funktionenkalkül sei z dasjenige Element in $C^*(x)$ mit $\hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x}$. Weil $\hat{z}$ reellwertig ist, ist z selbstadjungiert. Man schreibe $w := yz = u + iv$ mit $u = u^*$ und $v = v^*$ gemäß (1.33-b). Dann ist $w^* w = z^* y^* y z = zxz = z^2 x$ und auch $w^* w + w w^* = 2u^2 + 2v^2$, weshalb $ww^* = 2u^2 + 2v^2 - z^2x$. — Hiermit wird gezeigt, dass $-w^*w \in A_+$ und $ww^* \in A_+$. In der Tat ist $-z^2x \in A_+$, denn $\widehat{z^2x} = \hat{z}^2\hat{x} = (|\hat{x}| - \hat{x})^2\hat{x} \leq 0$. Weiter ist $u^2 \in A_+$, weil $\hat{u^2} = \hat{u}^2 \geq 0$. Ebenso ist $v^2 \in A_+$. Daher ist $ww^* \in A_+$ nach (b). — Nun ist $\sigma(w^*w) \subset \{0\} \cup \sigma(ww^*)$ nach Aufgabe (6), weshalb $\sigma(w^*w) = \{0\}$. Daher ist $\widehat{z^2x} = 0$ und somit $\hat{x} = |\hat{x}|$.

□

Aufgabe 28 Sei A eine C^*-Algebra und sei $x \in A$ normal. Man zeige:

(a) x ist selbstadjungiert $\Longleftrightarrow \sigma(x) \subset [-\|x\|, \|x\|]$.

(b) x ist unitär $\Longleftrightarrow \sigma(x) \subset \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$.

(c) x ist eine selbstadjungierte Projektion $\Longleftrightarrow \sigma(x) \subset \{0, 1\}$.

(d) x ist positiv $\Longleftrightarrow \sigma(x) \subset [0, \|x\|]$.

Beweis. Weil x normal ist, ist $C^*(x)$ kommutativ und der Funktionenkalül (1.41) findet darauf Anwendung. Sei $\Delta := \Delta(C^*(x))$. — (a) folgt aus dem Satz von Gelfand–Naimark (1.37-b) und dem Satz von Beurling–Gelfand (1.9-a). — (b) Wenn x unitär ist, dann folgt $1_\Delta = \hat{e} = \widehat{x^*x} = |\hat{x}|^2$. Daher ist $\sigma(x) \subset \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ nach (1.25-b). Die Schlüsse gelten auch in umgekehrter Richtung. — (c) gilt nach (a) und weil $\hat{x}^2 = \hat{x}$ gleichbedeutend mit $\hat{x}(\Delta) \subset \{0, 1\}$ ist. — (d) folgt mit (a) aus Aufgabe (27)(a),(c). □

Aufgabe 29 Seien A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Man zeige:

$$(f \circ g)[x] = f[g[x]], \quad \forall g \in \mathcal{C}(\sigma(x)), f \in \mathcal{C}(\sigma(g[x])).$$

Aufgabe 30 Seien A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Weiter sei R eine rationale Funktion wie in Aufgabe (8). Man zeige $R(x) = R[x]$.

Aufgabe 31 Seien A eine C^*-Algebra und $x \in A$ normal. Weiter sei f eine durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\geq \|x\|$ gegebene holomorphe Funktion. Man zeige $f[x] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Aufgabe 32 (a) Seien A eine kommutative C^*–Algebra und $B \subset A$ eine Unter–C^*–Algebra. Dann ist $\Delta(A)$ in $\Delta(B)$ “enthalten”.

(b) Sei $(Z, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei $\mathcal{B}(Z)$ die C^*–Algebra der beschränkten Funktionen auf Z. Sei $\mathcal{MB}(Z)$ die Teilmenge der messbaren beschränkten Funktionen. Bestimme $\Delta(\mathcal{B}(Z))$ und $\Delta(\mathcal{MB}(Z))$.

(c) Sei Z ein kompakter Hausdorff Raum. Vergleiche $\Delta(\mathcal{C}(Z))$ mit $\Delta(\mathcal{B}(Z))$, z.B. für $Z = \mathbb{N}$ mit einer geeigneten Topologie.

2 PV-Maße und Spektralsatz

Projektionswertige Maße

Im Folgenden bezeichnen $(Z, \mathcal{A})$ einen Messraum und H einen komplexen Hilbertraum.

(1) Projektorwertiges Maß. Eine Abbildung $E : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(H)$ heißt ein projektorwertiges Maß, kurz ein PV-Maß, auf Z in H, wenn gilt:

(a) $E(\Delta)$ ist eine orthogonale Projektion für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$.

(b) $E(Z) = I$.

(c) $E\left(\bigcup_n \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$ für jede Folge (Δ_n) in $\mathcal{A}$ mit $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$ für $m \neq n$.

Die Eigenschaft (c) heißt die σ-Additivität von E. Dabei ist die Summe im Sinne der punktweisen Konvergenz oder der Konvergenz in der starken Operatortopologie zu verstehen, d.h. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)\right) x := \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)\, x \,\forall\, x \in H$.

(2) Eigenschaften eines PV–Maßes.

(a) $E(\emptyset) = 0$, da $E(\emptyset)\, x = E\left(\bigcup_n \emptyset\right) x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(\emptyset)\, x = \lim\limits_{N\to\infty} N E(\emptyset)\, x$, weshalb $E(\emptyset)\, x = 0 \ \forall x$.

(b) *E ist endlich additiv*, denn für paarweise disjunkte Mengen $\Delta_i, i = 1, \ldots, k$ und $\Delta_j = \emptyset$ für alle $j > k$ gilt: $E\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i\right) = E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{k} E(\Delta_i)$ nach (a).

(c) $E(\Delta\backslash\Gamma) = E(\Delta) - E(\Gamma)$ *für* $\Gamma \subset \Delta$, denn $E(\Delta) = E((\Delta\backslash\Gamma) \cup \Gamma) = E(\Delta\backslash\Gamma) + E(\Gamma)$. Insbesondere ist $E(Z\backslash A) = I - E(\Delta)$ die orthogonale Projektion auf das orthogonale Komplement.

(d) $E(\Delta \cup \Gamma) + E(\Delta \cap \Gamma) = E(\Delta) + E(\Gamma)$, denn $E(\Delta \cup \Gamma) = E(\Delta) + E(\Gamma\backslash(\Delta \cap \Gamma)) = E(\Delta) + E(\Gamma) - E(\Delta \cap \Gamma)$ nach (c).

(e) *Sei* (Δ_n) **aufsteigend**, *d.h.* $\Delta_n \subset \Delta_{n+1} \,\forall\, n$, *bzw.* **absteigend**, *d.h.* $\Delta_n \supset \Delta_{n+1} \,\forall\, n$. *Dann gelten im Sinne der punktweisen Konvergenz*

$$E\left(\bigcup_n \Delta_n\right) = \lim_n E(\Delta_n) \quad \text{bzw.} \quad E\left(\bigcap_n \Delta_n\right) = \lim_n E(\Delta_n).$$

Beweis. Sei (Δ_n) aufsteigend. Man setzt $\Gamma_1 := \Delta_1, \Gamma_n := \Delta_n \backslash \Delta_{n-1}$ für alle $n \geqslant 2$. Dann sind Γ_n paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i = \Delta_n$ für alle n. Damit folgt $E(\bigcup \Delta_n) = E(\bigcup \Gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Gamma_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(\Gamma_n) = \lim_{N\to\infty} E(\Delta_n)$. — Sei nun (Δ_n) absteigend. Dann ist $\Gamma_n := Z \backslash \Delta_n$ aufsteigend. Mit (c) gilt $E(\bigcap \Delta_n) = I - E(Z \backslash \bigcap \Delta_n) = I - E(\bigcup \Gamma_n) = I - \lim E(\Gamma_n) = I - \lim (I - E(\Gamma_n)) = \lim E(\Delta_n)$. □

(f) $E(\Delta \cap \Gamma) = E(\Delta) E(\Gamma)$.

Beweis. Zunächst sei $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$. Mit den Bezeichnungen $P := E(\Delta), Q := E(\Gamma), R := E(\Delta \cup \Gamma)$ erhalten wir: $R = P + Q \Rightarrow R = R^2 = P^2 + Q^2 + PQ + QP = R + PQ + QP \Rightarrow PQ = -QP \Rightarrow PQ = -PQP$, $PQP = -QP \Rightarrow QP = PQ$ und somit $PQ = QP = 0$.

Nun sei $\Gamma \subset \Delta$. Dann gilt: $E(\Delta) = E(\Delta \backslash \Gamma) + E(\Gamma) \Rightarrow E(\Gamma) E(\Delta) = 0 + E(\Gamma)^2 = E(\Gamma)$ und ebenso $E(\Delta) E(\Gamma) = E(\Gamma)$.

Jetzt zum allgemeinen Fall: $E(\Delta \cup \Gamma) + E(\Delta \cap \Gamma) = E(\Delta) + E(\Gamma)$ und Multiplikation mit $E(\Delta)$ liefert $E(\Delta) + E(\Delta \cap \Gamma) = E(\Delta) + E(\Delta) E(\Gamma)$, weshalb $E(\Delta \cap \Gamma) = E(\Delta) E(\Gamma)$. □

(g) *Die orthogonalen Projektionen $E(\Delta)$ vertauschen. Falls $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$, dann ist $\mathcal{R}(E(\Delta)) \perp \mathcal{R}(E(\Gamma))$.*

Beweis. Die Vertauschung folgt aus (f). Falls $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$, ist $E(\Delta) E(\Gamma) = 0$ und $\langle E(\Delta) x, E(\Gamma) y \rangle = \langle x, E(\Delta) E(\Gamma) y \rangle = 0$, d.h. $E(\Delta) x \perp E(\Gamma) y$. □

(h) *Falls $E(\Delta_n) = 0 \, \forall \, n$, dann ist $E(\bigcup_n \Delta_n) = 0$, wobei Δ_n nicht notwendigerweise disjunkt sind.*

Beweis. Setze $\Gamma_1 := \Delta_1$, $\Gamma_n := \Delta_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} \Delta_k$ für $n \geq 2$. Dann sind Γ_n paarweise disjunkt und $E(\Gamma_n) = 0$ nach (c). Daraus folgt $E(\bigcup_n \Delta_n) = E(\bigcup_n \Gamma_n) = \sum_n E(\Gamma_n) = 0$. □

(3) Kriterium für PV-Maße. *Sei $E : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(H)$ eine Abbildung, so dass $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion für alle $\Delta \in \mathcal{A}$ ist. Für jedes $x \in H$ definiere*

$$E_x : \mathcal{A} \to [0, \infty[, \quad \Delta \mapsto \langle x, E(\Delta) x \rangle = \|E(\Delta) x\|^2 .$$

Dann ist E ein PV-Maß genau dann, wenn jedes E_x ein Maß mit $E_x(Z) = \|x\|^2$ ist.

Beweis. Seien E ein PV-Maß und $x \in H$. Dann ist $E_x(Z) = \langle x, Ix \rangle = \|x\|^2$ und $E_x(\emptyset) = \langle x, 0x \rangle = 0$. Sei (Δ_n) eine Folge paarweise diskjunter Mengen. Dann ist $E_x(\bigcup \Delta_n) = \langle x, E(\bigcup \Delta_n) x \rangle = \sum \langle x, E(\Delta_n) x \rangle = \sum E_x(\Delta_n)$. Also ist E_x ein Maß mit $E_x(Z) = \|x\|^2$.

Umgekehrt sei E_x für jedes $x \in H$ ein Maß mit $E_x(Z) = \|x\|^2$. Dann ist $\langle x, Ix \rangle = \|x\|^2 = E_x(Z) = \langle x, E(Z) x \rangle$, weshalb $0 = \langle x, (I - E(Z)) x \rangle =$

$\|(I - E(Z))\,x\|^2$ für jedes $x \in H$. Somit ist $I - E(Z) = 0$. — Zum Nachweis der Additivität seien $\Delta, \Gamma \in \mathcal{A}$ disjunkt. Wegen $E_x(\Delta \cup \Gamma) - E_x(\Delta) - E_x(\Gamma) = 0$ ist $\langle x, (E(\Delta \cup \Gamma) - E(\Delta) - E(\Gamma))\,x\rangle = 0 \;\forall x$, woraus mit Hilfe der Polaridendität $E(\Delta \cup \Gamma) - E(\Delta) - E(\Gamma) = 0$ folgt. — Schließlich sei (Δ_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$. Wegen der Additivität ist $\left\|E\left(\bigcup \Delta_n\right)x - \sum_{n=1}^N E(\Delta_n)\,x\right\|^2 = \left\|E\left(\bigcup_{n>N}\Delta_n\right)x\right\|^2 = E_x\left(\bigcup_{n>N}\Delta_n\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für jedes x. □

(4) Zugeordnete skalare Maße. Das Maß E_x mit $E_x(\Delta) := \|E(\Delta)x\|^2$ heißt das (E, x) zugeordnete skalare Maß auf $(Z, \mathcal{A})$.

(5) Kanonisches PV-Maß. *Seien $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $W \neq \{\emptyset\}$ ein Hilbertraum und $H := L^2_\mu(Z, W)$. Dann ist*

$$E^{\text{kan}}: \quad \mathcal{A} \quad \to \quad \mathcal{L}(H)\,, \quad E^{\text{kan}}(\Delta)\,f := 1_\Delta f$$

ein PV-Maß, das kanonische PV-Maß auf Z in H. Es ist $E^{\text{kan}}(\Gamma) = 0$ genau dann, wenn Γ eine lokale μ–Nullmenge ist. Letzteres bedeutet, dass $\mu(\Gamma \cap \Delta) = 0$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $E := E^{\text{kan}}$ ein PV-Maß ist. $E(\Delta)$ ist der Multiplikationsoperator mit 1_Δ. Da offensichtlich $1_\Delta = \overline{1}_\Delta$, $1^2_\Delta = 1_\Delta$, $1_Z = 1$, ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion und $E(Z) = I$. Gemäß dem Kriterium (2.3) betrachtet man für jedes $f \in H$ die Abbildung $\Delta \to E_f(\Delta) = \langle f, E(\Delta)\,f\rangle = \int_\Delta \|f(z)\|^2_W \,\mathrm{d}\mu(z)$, was das Maß mit Dichte $\|f(\cdot)\|^2_W\,\mu$ ist. Nach (2.3) ist E ein PV-Maß.

Sei $\Gamma \in \mathcal{A}$ mit $E(\Gamma) = 0$. Das bedeutet $E(\Gamma)\,f = 1_\Gamma f = 0$ für alle $f \in H$. Wähle $x \in W$ mit $\|x\| = 1$. Ist $\Delta \in \mathcal{A}$ von endlichem Maß, dann ist $f := 1_\Delta x \in H$ und $E(\Gamma)\,f = 1_{\Delta\cap\Gamma}x = 0$, weshalb $\mu(\Delta \cap \Gamma) = 0$. — Umgekehrt sei $\mu(\Delta \cap \Gamma) = 0$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$ mit endlichem Maß. Daraus folgt $\mu(\Delta \cap \Gamma) = 0$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$, die μ–σ–endlich sind. Damit ist $E(\Gamma)\,f = 0$ für jedes $f \in H$, da $f^{-1}(W \setminus \{0\})$ μ–σ–endlich ist. Also ist $E(\Gamma) = 0$. □

Integral bezüglich eines PV–Maßes für beschränkte Funktionen

(6) Integral elementarer Abbildungen. Eine Abbildung $u : Z \to \mathbb{C}$ heißt elementar, wenn $u(Z)$ endlich ist und $u^{-1}(\{\lambda\}) \in \mathcal{A}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Das **Integral** von u bezüglich des PV-Maßes E ist definitionsgemäß der Operator in $\mathcal{L}(H)$

$$\int u\,\mathrm{d}E := \sum_{\alpha \in u(Z)} \alpha\, E\left(u^{-1}(\{\alpha\})\right).$$

(7) Eigenschaften. *Seien E ein PV-Maß in $\mathcal{L}(H)$, $u : Z \to \mathbb{C}$ elementar und $x, y \in H$. Es gelten:*

(a) $\langle x, \left(\int u \, \mathrm{d}E\right) y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\zeta^4=1} \zeta \int u \, \mathrm{d}E_{\zeta x+y}$. *Insbesondere ist* $\langle x, \left(\int u \, \mathrm{d}E\right) x\rangle = \int u \, \mathrm{d}E_x$. *Also ist der Operator* $\int u \, \mathrm{d}E$ *durch* $\left(\int u \, \mathrm{d}E_x\right)_{x \in H}$ *eindeutig bestimmt.*

(b) $\left\|\left(\int u \, \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \int |u|^2 \, \mathrm{d}E_x \leqslant \|u\|_\infty^2 \|x\|^2$. *Insbesondere ist* $\left\|\int u \, \mathrm{d}E\right\| \leqslant \|u\|_\infty$.

(c) $\int (u + \lambda v) \, \mathrm{d}E = \int u \, \mathrm{d}E + \lambda \int v \, \mathrm{d}E$.

(d) $\left(\int u \, \mathrm{d}E\right)\left(\int v \, \mathrm{d}E\right) = \int uv \, \mathrm{d}E$.

(e) $\left(\int u \, \mathrm{d}E\right)^* = \int \overline{u} \, \mathrm{d}E$.

Beweis. Setze $\Delta_\alpha := u^{-1}(\{\alpha\})$ für jedes $\alpha \in u(Z)$.

(a) $\langle x, \left(\int u \, \mathrm{d}E\right) y\rangle = \langle x, \sum_\alpha \alpha E(\Delta_\alpha) y\rangle = \sum_\alpha \alpha \langle E(\Delta_\alpha) x, E(\Delta_\alpha) y\rangle = \sum_\alpha \alpha \frac{1}{4} \sum_{\zeta^4=1} \zeta \|\zeta E(\Delta_\alpha) x + E(\Delta_\alpha) y\|^2$ aufgrund der Polaridentität. Deshalb ist $\langle x, \left(\int u \mathrm{d}E\right) y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\zeta^4=1} \zeta \sum_\alpha \alpha E_{\zeta x+y}(\Delta_\alpha) = \frac{1}{4} \sum_{\zeta^4=1} \zeta \int u \, \mathrm{d}E_{\zeta x+y}$.

(b) $\left\|\left(\int u \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \|\sum_\alpha \alpha E(\Delta_\alpha) x\|^2 = \sum_\alpha |\alpha|^2 \|E(\Delta_\alpha) x\|^2$ wegen (2.2-g). Weiter ist $\sum_\alpha |\alpha|^2 \|E(\Delta_\alpha) x\|^2 = \sum_\alpha |\alpha|^2 E_x(\Delta_\alpha) = \int |u|^2 \, \mathrm{d}E_x$, weil u elementar ist. Schließlich ist $|u| \leq \|u\|_\infty 1_Z$.

(c) Für alle x ist $\langle x, \left(\int (u + \lambda v) \, \mathrm{d}E\right) x\rangle = \int (u + \lambda v) \, \mathrm{d}E_x = \int u \, \mathrm{d}E_x + \lambda \int v \, \mathrm{d}E_x = \langle x, \left(\int u \, \mathrm{d}E\right) x\rangle + \lambda \langle x, \left(\int v \, \mathrm{d}E\right) x\rangle = \langle x, \left(\int u dE + \lambda \int v \, \mathrm{d}E\right) x\rangle$.

(d) $\left(\int u \, \mathrm{d}E\right)\left(\int v \, \mathrm{d}E\right) = (\sum_\alpha \alpha E(\Delta_\alpha))(\sum_\beta \beta E(\Gamma_\beta))$, was nach (2.2-f) und nach (c) gleich $\sum_{\alpha,\beta} \alpha\beta E(\Delta_\alpha \cap \Gamma_\beta) = \int \left(\sum_{\alpha,\beta} \alpha\beta 1_{\Delta_\alpha \cap \Gamma_\beta}\right) \mathrm{d}E = \int uv \, \mathrm{d}E$ ist.

(e) Für alle $x \in H$ erhält man $\langle \left(\int u \, \mathrm{d}E\right) x, x\rangle = \sum_{\alpha \in u(Z)} \overline{\alpha} \langle E(\Delta_\alpha) x, x\rangle = \sum_{\alpha \in u(Z)} \langle x, \overline{\alpha} E(\Delta_\alpha) x\rangle = \left\langle x, \left(\sum_{\alpha \in u(Z)} \alpha E(\Delta_\alpha)\right)^* x\right\rangle = \left\langle x, \left(\int u \, \mathrm{d}E\right)^* x\right\rangle$. □

Aus der Maßtheorie nach Lebesgue erinnern wie, dass der punktweise Limes einer Folge messbarer Funktionen messbar ist und dass jede messbare Funktion der punktweise Limes einer Folge von elementaren Abbildungen ist.

(8) Hauptlemma zur Integrierbarkeit. *Seien $f : Z \to \mathbb{C}$ eine Abbildung und $x \in H$. Dann gelten:*

(a) *f ist messbar und $\int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x < \infty$ genau dann, wenn eine Folge elementaren Abbildungen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, mit $u_n(z) \to f(z)$ für alle $z \in Z$ und $\int |u_n - f|^2 \, \mathrm{d}E_x \to 0$.*

(b) *Sind (u_n) und (v_n) Folgen zu f wie in* (a), *dann sind*

$$\left(\left(\int u_n \mathrm{d}E\right) x\right)_n \quad \text{und} \quad \left(\left(\int v_n \mathrm{d}E\right) x\right)_n$$

konvergent mit gleichem Grenzwert.

(c) *Ist f messbar, dann existiert eine Folge elementarer Abbildungen (u_n) mit $u_n(z) \to f(z)$ für alle $z \in Z$ und $|u_n(z)| \leqslant 2|f(z)|$ $\forall z \forall n$.*

Beweis. (c) Zunächst existiert eine Folge (u'_n) elementarer Abbildungen, die punktweise gegen f konvergiert. Ersetze u'_n durch die elementare Abbildung $u_n := 1_{\{|u'_n|>2|f|\}} u'_n$. Dann ist offensichtlich $|u_n| \leq 2|f|$. Zu $z \in Z$ mit $f(z) \neq 0$ existiert n_0 derart, dass $|u'_n(z) - f(z)| \leq |f(z)|$ $\forall$ $n \geq n_0$. Dafür ist $|u'_n(z)| \leq 2|f(z)|$ und somit $u'_n(z) = u(z)$, weshalb $u_n(z) \to f(z)$. Ist hingegen $f(z) = 0$, dann ist $u_n(z) = 0$ $\forall$ n, weshalb ebenfalls $u_n(z) \to f(z)$.

(a) Ist f messbar und quadratintegrabel, dann folgt die Behauptung aus (c) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Umgekehrt folgt die Quadratintegriebarkeit von f aus der Abschätzung $|f|^2 \leqslant 2|f - u_1|^2 + 2|u_1|^2$.

(b) Mit (2.7-c), (2.7-b) folgt $\left\|\left(\int u_n \mathrm{d}E\right)x - \left(\int u_m \mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \int |u_n - u_m|^2 \mathrm{d}E_x$ $\to 0$ für $n, m \to \infty$ wegen $u_n \to f$ in $L^2_{E_x}$ nach Voraussetzung. Die Folge $\left(\left(\int u_n \mathrm{d}E\right)x\right)_n$ ist also eine Cauchy-Folge im Hilbertraum H und somit konvergent. Desgleichen gilt $\left\|\left(\int u_n \mathrm{d}E\right)x - \left(\int v_n \mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \int |u_n - v_m|^2 \mathrm{d}E_x \to 0$, weil auch (v_n) gegen f in $L^2_{E_x}$ konvergiert. □

(9) Integral einer messbaren Funktion. Seien $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar und $x \in H$ mit $\int |f|^2 \mathrm{d}E_x < \infty$. Das Integral von f bezüglich E an der Stelle x sei

$$\left(\int f \mathrm{d}E\right)x := \lim_{n\to\infty} \left(\int u_n \mathrm{d}E\right)x,$$

wobei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge elementarer Abbildungen mit $u_n(z) \to f(z)$ $\forall$ $z \in Z$ und $\int |u_n - f|^2 \mathrm{d}E_x \to 0$ ist.

(10) Verabredung. Wenn nicht anders festgestellt, sei (u_n) in (9) gemäß (8)(c) so gewählt, dass $u_n(z) \to f(z)$ und $|u_n(z)| \leqslant \alpha|f(z)|$ $\forall z \in Z$ für ein $\alpha > 1$. Daraus folgt dann insbesondere, dass $\int |u_n - f|^2 \mathrm{d}E_x \to 0$. Der Vorteil ist, dass (u_n) unabhängig von x gewählt wird.

(11) Integral beschränkter messbarer Funktionen. *Seien f, g messbar und beschränkt und $\|f\|_{E,\infty} := \inf\{c \geqslant 0 : E(\{z \in Z : |f(z)| > c\}) = 0\}$ das Infimum der E–essentiellen Schranken von f. Dann gelten:*

(a) *$H \to H$, $x \mapsto \left(\int f \mathrm{d}E\right)x$ ist ein beschränkter Operator. Er wird mit $\int f \mathrm{d}E$ bezeichnet.*

(b) *Es gilt (7) für f, g anstelle von u, v. Insbesondere ist $\left\langle x, \left(\int f \,\mathrm{d}E\right)x\right\rangle = \int f \,\mathrm{d}E_x$ und $\left\|\left(\int f \,\mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \int |f|^2 \mathrm{d}E_x$ $\forall x$, sowie $\left(\int f \,\mathrm{d}E\right)\left(\int g \,\mathrm{d}E\right) = \int fg \,\mathrm{d}E$.*

(c) *$\int f \,\mathrm{d}E$ ist normal und $\left(\int f \,\mathrm{d}E\right)^* = \int \overline{f} \,\mathrm{d}E$.*

(d) *$\int f \,\mathrm{d}E = \int g \,\mathrm{d}E \Leftrightarrow E(\{z \in Z : f(z) \neq g(z)\}) = 0$.*

(e) $\left\| \int f \,\mathrm{d}E \right\| = \|f\|_{E,\infty}$.

(f) $\int f \mathrm{d}E$ *selbstadjungiert* $\Leftrightarrow E\left(\{z \in Z : f(z) \notin \mathbb{R}\}\right) = 0$.
$\int f \,\mathrm{d}E$ *unitär* $\Leftrightarrow E\left(\{z \in Z : |f(z)| \neq 1\}\right) = 0$.
$\int f \,\mathrm{d}E$ *orthogonale Projektion* $\Leftrightarrow E\left(\{z \in Z : f(z) \notin \{0,1\}\}\right) = 0$.
$\int f \,\mathrm{d}E$ *positiv* $\Leftrightarrow E\left(\{z \in Z : f(z) \notin [0,\infty[\}\right) = 0$.

(g) *Sei* $S \in L(H)$*. Wenn* $SE(\Delta) = E(\Delta) S \;\forall \Delta \in \mathcal{A}$*, dann* $S\left(\int f \mathrm{d}E\right) = \left(\int f \,\mathrm{dE}\right) S$.

Beweis. (a) Da f beschränkt ist, ist $\int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x < \infty$ für alle x. Aus (2.9) und (2.10) folgt $\left(\int f \mathrm{d}E\right)(x + \lambda y) = \lim \left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right)(x + \lambda y) = \lim \left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) x + \lambda \lim \left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) y = \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x + \lambda \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) y$. Weiter folgt $\left\| \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x \right\|^2 = \lim \left\| \left(\int u_n \mathrm{d}E\right) x \right\|^2 = \lim \int |u_n|^2 \,\mathrm{d}E_x \leqslant \left(2 \|f\|_\infty\right)^2 \|x\|^2$ mit (2.7-b). Damit ist $\int f \mathrm{d}E$ ein beschränkter Operator

(b) Wegen (2.9), (2.10) folgen mit majorisierter Konvergenz $\int u_n \,\mathrm{d}E_x \to \int f \,\mathrm{d}E_x$, $\int |u_n|^2 \,\mathrm{d}E_x \to \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x$ und $\left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) x \to \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x$. Damit beweist man die entsprechenden Eigenschaften aus (2.7). — Es bleibt die Multiplikativität zu zeigen. Setze $T := \int f \,\mathrm{d}E$, $S := \int g \,\mathrm{d}E$, $T_n := \int u_n \,\mathrm{d}E$ und $S_n := \int v_n \,\mathrm{d}E$. Hierfür gelten $\|(TS - T_n S_n) x\| = \|(T - T_n) Sx + T_n (S - S_n) x\| \leqslant \|(T - T_n) Sx\| + \|T_n\| \|(S - S_n) x\|$, wobei $\|(T - T_n) Sx\| \to 0$, $\|(S - S_n) x\| \to 0$ nach Definition und $\|T_n\| \leqslant \|u_n\|_\infty \leqslant 2 \|f\|_\infty$ nach (2.7-b). Daher $T_n S_n \to TS$ punktweise. Weiter ist $T_n S_n = \int u_n v_n \,\mathrm{d}E$ nach (2.7-d), was gegen $\int fg \,\mathrm{d}E$ konvergiert, denn $u_n v_n$ sind elementar, konvergieren punktweise gegen fg und genügen der Abschätzung $|(u_n v_n)(z)| \leqslant 4 |(fg)(z)|$. Insgesamt folgt $TS = \int fg \,\mathrm{d}E$.

(c) Laut (2.7-e) gilt $\left\langle x, \left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) y \right\rangle = \left\langle \left(\int \overline{u}_n \,\mathrm{d}E\right) x, y \right\rangle$. Daraus ergibt sich $\left\langle x, \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) y \right\rangle = \left\langle \left(\overline{f} \mathrm{d}E\right) x, y \right\rangle$. Weil dies für alle x, y gilt, ist $\int \overline{f} \,\mathrm{d}E = \left(\int f \,\mathrm{d}E\right)^*$. Nach dem letzten Teil von (b) vertauschen $\int f \,\mathrm{d}E$ und $\int \overline{f} \,\mathrm{d}E$.

(d) Wegen der Linearität genügt es $\int f \,\mathrm{d}E = 0$ zu betrachten: $\int f d\,E = 0 \Leftrightarrow 0 = \left\| \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x \right\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \;\forall x \in H \Leftrightarrow E_x\left(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})\right) = 0 \;\forall x \Leftrightarrow E\left(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})\right) = 0$.

(e) Nach (b) und (d) ist $\left\| \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x \right\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \leqslant c^2 \int \mathrm{d}E_x = c^2 \|x\|^2$ für alle E–essentielle Schranken c. Daher ist $\left\| \int f \,\mathrm{d}E \right\| \leqslant \|f\|_{E,\infty}$. — Sei nun $c < \|f\|_{E,\infty}$ und betrachte $\Delta := \{z : |f(z)| \geqslant c\}$. Da $E(\Delta) \neq 0$ existiert $x \in \mathcal{R}(E(\Delta))$ der Norm 1. Nach (b) folgt $\left\| \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x \right\|^2 = \left\| \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) E(\Delta) x \right\|^2 = \left\| \left(\int 1_\Delta f \,\mathrm{d}E\right) x \right\|^2 = \int_\Delta |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \geqslant c^2 \int_\Delta \mathrm{d}E_x = c^2 E_x(\Delta) = c^2 \|x\|^2$, weshalb $\left\| \int f \,\mathrm{d}E \right\| \geqslant c$.

(f) Wegen der Äquivalenzen $\int f \,\mathrm{d}E$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \int f \,\mathrm{d}E = \left(\int f \,\mathrm{d}E\right)^* = \int \overline{f} \,\mathrm{d}E \Leftrightarrow E(\{f \neq \overline{f}\}) = 0$ nach (d) folgt die erste Aussage. In ähnlicher Weise folgen die beiden folgenden Aussagen. — Sei $\int f \,\mathrm{d}E$ positiv. Dann ist $\int f \,\mathrm{d}E$ selbstadjungiert, weshalb wie gerade gezeigt f o.E. reellwertig ist. Weiter ist

$0 \leq \langle x, \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x\rangle = \int f \,\mathrm{d}E_x$ nach (b). Sei $\Gamma := \{f < 0\}$. Mit $E(\Gamma)x$ anstelle von x und der Multiplikativität aus (b) folgt $0 \leq \int 1_\Gamma f \,\mathrm{d}E_x$, weshalb $0 = E_x(\Gamma) = \|E(\Gamma)x\|$. Da dies für alle x gilt, folgt $E(\Gamma) = 0$. Zum Beweis der Rückrichtung sei f o.E. nichtnegativwertig. Dann ist $g := \sqrt{f}$ definiert, $\int g \,\mathrm{d}E$ selbstadjungiert und $\left(\int g \,\mathrm{d}E\right)^2 = \int f \,\mathrm{d}E$, weshalb $\int f \,\mathrm{d}E$ positiv ist.

(g) $S\left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) = \left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) S$ ist klar nach (2.6), woraus leicht $S \int f \,\mathrm{d}E = \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) S$ folgt. □

Aufgabe 33 Seien $f_n, f, g : Z \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt. Man zeige:

(a) Sei $x \in H$. Falls $\int |f_n - f|^2 \,\mathrm{d}E_x \to 0$, dann gilt $\left(\int f_n \mathrm{d}E\right) x \to \left(\int f \mathrm{d}E\right) x$.

(b) Falls $f_n(z) \to f(z)$ und $|f_n(z)| \leqslant g(z)$ für alle $z \in Z$, dann gilt $\left(\int f_n \mathrm{d}E\right) x \to \left(\int f \mathrm{d}E\right) x$ für alle $x \in H$.

(c) Falls $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, dann gilt $\int f_n \mathrm{d}E \to \int f \mathrm{d}E$ in $\mathcal{L}(H)$.

(12) Die Algebra $L_E^\infty(Z)$. Definiere

$$\mathcal{L}_E^\infty(Z) := \{f : Z \to \mathbb{C} : \, f \text{ messbar und } E - \text{essentiell beschränkt}\},$$

wobei f essentiell beschränkt heißt, wenn $E(\{z \in Z : |f(Z)| \geqslant c\}) = 0$ für ein $c < \infty$. Die Konstante c heißt eine E–**essentielle Schranke** von f. $\|f\|_{E,\infty}$ bezeichnet das Infimum der E–essentiellen Schranken.

$\mathcal{L}_E^\infty(Z)$ ist eine kommutative Algebra bezüglich der punktweisen Operationen mit 1_Z als Eins und der Involution $f \mapsto \overline{f}$. Weiter ist die Untermenge

$$\mathcal{N} := \left\{f \in \mathcal{L}_E^\infty(Z) : \|f\|_{E,\infty} = 0\right\}$$

ein Ideal. Mit gewohnten Mitteln zeigt man, dass $L_E^\infty(Z) := \mathcal{L}_E^\infty(Z)/\mathcal{N}$ eine kommutative C^*-Algebra mit der Norm $\|[f]\| := \|f\|_{E,\infty}$ ist. Der Satz (11) besagt dann, dass

$$L_E^\infty(Z) \to \mathcal{L}(H), \ [f] \mapsto \int f \mathrm{d}E$$

ein isometrischer $*$-Homomorphismus, also ein $*$-Isomorphismus auf das Bild ist. Das Bild wird von den darin enthaltenen orthogonalen Projektionsoperatoren erzeugt, weil jede messbare beschränkte Funktion $f : Z \to \mathbb{C}$ bekanntlich durch elementare Abbildungen gleichmäßig approximiert wird und weil (11)(e) gilt.

Aufgabe 34 Sei E ein PV-Maß auf $(Z, \mathcal{A})$ in H. Weiter seien $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt, $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ und $T := \int f \mathrm{d}E$. Man zeige, dass

$$P(T, T^*) = \int P \circ \left(f, \overline{f}\right) \,\mathrm{d}E.$$

Der Spektralsatz

(13) Vorbemerkungen zum Spektralsatz. Sind Z ein kompakter Raum (insbesondere ein Hausdorff Raum), $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Z)$ die σ-Algebra der Borelmengen und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}$. Das Maß μ heißt **regulär** oder ein Radon Maß, wenn

$$\mu(\Delta) = \inf\{\mu(U) : U \supset \Delta, U \text{ offen}\} \quad \forall \Delta \in \mathcal{B}.$$

Weil Z kompakt und μ endlich ist, ist dies offenbar äquivalent zu

$$\mu(\Delta) = \sup\{\mu(K) : K \subset \Delta, K \text{ kompakt}\} \quad \forall \Delta \in \mathcal{B}.$$

(a) **Reguläres PV–Maß.** Sei H ein Hilbertraum. Ein PV-Maß E auf $(Z, \mathcal{B})$ in H heißt regulär, wenn E_x für jedes $x \in H$ regulär ist. *Ein PV-Maß E ist genau dann regulär, wenn zu jedem $\Delta \in \mathcal{B}$ und $x \in H$ eine Folge offener Mengen U_n in Z mit $U_n \supset \Delta$ und $E(U_n)x \to E(\Delta)x$ existiert. Äquivalent dazu ist auch $\mathcal{R}(E(\Delta)) = \bigcap\{\mathcal{R}(E(U)) : U \supset \Delta, U \text{ offen}\}$ für jedes $\Delta \in \mathcal{B}$.*

(b) **Darstellungssatz von F. Riesz.**[2] *Sei $F : \mathcal{C}(Z) \to \mathbb{C}$ linear und nichtnegativ (d.h. $F(f) \geqslant 0$ falls $f(z) \geqslant 0$ für alle z), nicht notwendigerweise stetig. Dann existiert genau ein endliches reguläres Maß μ auf $\mathcal{B}$ mit*

$$F(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}(Z).$$

(c) **Lemma von Urysohn.**[3] *Sind K kompakt, U offen mit und $K \subset U \subset Z$, dann existiert eine stetige Funktion $h : Z \to [0,1]$, so dass $h|K = 1$ und $h|Z \backslash U = 0$.* Man nennt h eine Urysohn Funktion zu K, U.

(d) **Darstellung beschränkter Sesquilinearformen.** *Seien H und K Hilberträume und $\varphi : H \times K \to \mathbb{C}$ sesquilinear (d.h. linear im zweiten Argument und konjugiert linear im ersten). Weiter sei φ beschränkt, d.h. $|\varphi(x, y)| \leqslant c\,\|x\|\,\|y\|$ für ein $c \geqslant 0$. Dann existiert genau ein Operator $T \in L(H, K)$ mit*

$$\varphi(x, y) = \langle Tx, y\rangle \text{ für alle } x, y \in H.$$

Beweis. Man wende den Darstellungssatz von Riesz für stetige Linearformen auf K an. □

[2] Siehe z.B. *Walter Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd Ed., McGraw-Hill*

[3] Siehe z.B. *Stephen Willard, General Topology, Addison-Wesley, 1970*, §15.6, S. 102.

(e) **Satz von Fuglede, Putnam, Rosenblum.**[4] *Seien* $T_1, T_2, S \in \mathcal{L}(H)$*, mit* T_1, T_2 *normal. Dann gilt*

$$ST_1 = T_2 S \quad \Rightarrow \quad ST_1^* = T_2^* S.$$

Aufgabe 35 Man beweise (13)(a).

Lösung. Sei E regulär. Seien $\Delta \in \mathcal{B}$ und $x \in H$. Dann existiert $U_n \subset Z$ offen mit $U \supset \Delta$ und $E_x(U_n \setminus \Delta) \leq \frac{1}{n}$. Weil $E_x(U_n \setminus \Delta) = \|E(U_n \setminus \Delta)x\|^2 = \|E(U_n)x - E(\Delta)x\|^2$, folgt $E(U_n)x \to E(\Delta)x$. Die Umkehrung hiervon folgt ebenso.

Sei nun $\Delta \in \mathcal{B}$ und $M := \bigcap\{\mathcal{R}(E(U)) : U \supset \Delta, U \text{ offen}\}$. Offenbar ist M ein abgeschlossener Untervektorraum mit $\mathcal{R}(E(\Delta)) \subset M$.

Angenommen es existiert $x \in M \setminus \mathcal{R}(E(\Delta))$. Dann existiert $x \in M \cap \mathcal{R}(E(\Delta))^{\perp}$, $x \neq 0$. Dafür ist $\|E(U)x - E(\Delta)x\|^2 = \|x - 0\|^2 = \|x\|^2 > 0 \ \forall\ U$ offen, $U \supset \Delta$. Damit ist E nicht regulär. — Zur Umkehrung sei jetzt $M = \mathcal{R}(E(\Delta))$. Weiter sei $x \in H$. Dann existiert eine absteigende Folge offene Mengen $U_n \supset \Delta$ mit $\gamma := \inf\{E_x(U) : U \supset \Delta, U \text{ offen}\} = \inf_n E_x(U_n)$. Nach (2)(e) existiert $y := \lim_n E(U_n)x$. Da $\|y\|^2 = \lim_n \|E(U_n)x\|^2 = \gamma$, bleibt $y = E(\Delta)x$ zu zeigen. Nehme $y \neq E(\Delta)x$ an. Nach Voraussetzung existiert $U \supset \Delta$ offen mit $y \notin \mathcal{R}(E(U))$, weshalb $\|E(U)y\| < \|y\|$. Dies widerspricht $E(U)y = E(U)\lim_n E(U_n)x = \lim_n E(U \cap U_n)x$ und somit $\|E(U)y\|^2 = \lim_n \|E(U \cap U_n)x\|^2 \geq \gamma$ nach Definition von γ. □

(14) Der Spektralsatz. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $A \subset \mathcal{L}(H)$ *eine kommutative Unter–*C^**–Algebra.*[5] *Weiter seien* $\Delta(A)$ *der mit der Gelfand Topologie versehene Strukturraum von* A *und* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Delta(A))$ *die* σ*-Algebra der Borelmengen. Dann existiert genau ein reguläres PV-Maß* E *auf* $\Delta(A)$ *in* H *mit*

$$T = \int \hat{T}\,\mathrm{d}E \quad \forall\, T \in A,$$

wobei $\hat{T}$ *die Gelfand Transformierte von* T *bezeichnet.* E heißt das **Spektralmaß** von A. *Es folgen:*

(a) $E(U) \neq 0$ *falls* U *offen und nicht leer ist.*

(b) *Sei* $S \in \mathcal{L}(H)$*. Dann gilt* $ST = TS$ *für alle* $T \in A$ *genau dann, wenn* $SE(\Gamma) = E(\Gamma)S$ *für alle* $\Gamma \in \mathcal{B}$.

Beweis. Bezeichne γ die Gelfand Rückstransformation $\mathcal{C}(\Delta(A)) \to A, \gamma(\hat{T}) = T$. Nach dem Satz von Gelfand und Naimark ist γ ein $*$-Isomorphismus.

(a) Das PV–Maß ist eindeutig, denn aus $T = \int \hat{T}\,\mathrm{d}E \quad \forall\ T \in A$ folgt nach (11)(b), dass $\int f\,dE_x = \left\langle x, \left(\int f\,\mathrm{d}E\right) x\right\rangle = \langle x, \gamma(f)\,x\rangle$ für alle $x \in H$ und $f \in \mathcal{C}(\Delta(A))$. Weil die Maße E_x regulär sind, sind sie dadurch nach dem

[4] Siehe z.B. *Walter Rudin, Functional Analysis, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1991*, §12.6, S.315

[5] A ist eine abgeschlossene kommutative Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$ mit $I \in A$ und derart, dass $T^* \in A \ \forall\ T \in A$.

Darstellungssatz von Riesz (13)(b) eindeutig bestimmt. Schließlich ist E durch diese eindeutig bestimmt.

Nun wird die Existenz des Spektralmaßes gezeigt. Sei $x \in H$. Die Abbildung $f \mapsto \langle x, \gamma(f)\, x\rangle$ ist eine nichtnegative Linearform auf $\mathcal{C}(\Delta(A))$, denn γ ist linear und für $f \geqslant 0$ gilt $\langle x, \gamma(f)\, x\rangle = \left\langle x, \gamma\left(\sqrt{f}\right)\gamma\left(\sqrt{f}\right) x\right\rangle = \left\langle \gamma\left(\sqrt{f}\right) x, \gamma\left(\sqrt{f}\right) x\right\rangle = \left\|\gamma\left(\sqrt{f}\right) x\right\|^2 \geqslant 0$. Wieder nach (13)(b) existiert genau ein reguläres endliches Maß μ_x auf $\Delta(A)$, so dass

$$\langle x, \gamma(f)\, x\rangle = \int f \,\mathrm{d}\mu_x \quad \forall f \in \mathcal{C}(\Delta(A)). \qquad ①$$

Damit gilt $\langle x, Tx\rangle = \int \hat{T}\,\mathrm{d}\mu_x$ für alle $T \in A$. Dies ist die Hauptidee des Beweises. Es geht nun darum, aus den Maßen μ_x, $x \in H$ ein PV-Maß E mit $\mu_x = E_x = \langle x, E(\cdot)\, x\rangle$ zu gewinnen. Wegen $\langle x, E(\Gamma)\, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\,\|E(\Gamma)(\zeta x + y)\|^2$ definiert man

$$S_\Gamma(x,y) := \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\mu_{\zeta x+y}(\Gamma) \quad \forall x, y \in H,\, \Gamma \in \mathcal{B}.$$

Zunächst zeigen wir, dass S_Γ eine beschränkte antisymmetrische Sesquilinearform ist. Sei $f \in \mathcal{C}(\Delta(A))$. Dann ist $(x,y) \mapsto \langle x, \gamma(f)\, y\rangle$ sesquilinear und für reellwertige f auch antisymmetrisch. Weiter gilt

$$\langle x, \gamma(f)\, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\int f \mathrm{d}\mu_{\zeta x+y},$$

denn mit ① ist $\frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\int f\mathrm{d}\mu_{\zeta x+y} = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\,\langle \zeta x + y, \gamma(f)(\zeta x + y)\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\left(\langle x, \gamma(f)\, x\rangle + \langle y, \gamma(f)\, y\rangle + \overline{\zeta}\,\langle x, \gamma(f)\, y\rangle + \zeta\,\langle y, \gamma(f)\, x\rangle\right) = \langle x, \gamma(f)\, y\rangle$. Seien nun $\Gamma \in \mathcal{B}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil die Maße $\nu_\zeta := \mu_{\zeta x+y}$ regulär sind, existieren eine offene Menge U und ein Kompaktum K mit $K \subset \Gamma \subset U$, so dass $\nu_\zeta(U\backslash K) \leqslant \varepsilon$ für alle $\zeta \in \{1, -1, i, -i\}$. Sei h laut (13)(c) eine Urysohn Funktion zu K, U. Dafür ist $\left|\int h\,\mathrm{d}\nu_\zeta - \nu_\zeta(\Gamma)\right| \leqslant \int |h - 1_\Gamma|\,\mathrm{d}\nu_\zeta \leqslant 1 \cdot \nu_\zeta(U\backslash K) \leqslant \varepsilon$, weshalb

$$|S_\Gamma(x,y) - \langle x, \gamma(h)\, y\rangle| \leqslant \varepsilon. \qquad ②$$

Damit wird S_Γ punktweise durch antisymmetrischen Sesquilinearformen approximiert und ist daher selbst eine antisymmetrische Sesquilinearform. Weiter gilt $|S_\Gamma(x,y)| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\nu_\zeta(\Delta(A)) = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\|\zeta x + y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant 4\ \forall x, y$ mit $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Also ist S_Γ beschränkt.

Nach (13)(d) existiert ein $E(\Gamma) \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$S_\Gamma(x,y) = \langle E(\Gamma)\, x, y\rangle \quad \forall x, y \in H. \qquad ③$$

Weil S_Γ antisymmetrisch ist, gilt $\langle E(\Gamma)\, x, y\rangle = \overline{\langle E(\Gamma)\, y, x\rangle} = \langle x, E(\Gamma)\, y\rangle = \left\langle E(\Gamma)^*\, x, y\right\rangle$ für alle $x, y \in H$. Also ist $E(\Gamma)$ selbstadjungiert. — Wir zeigen jetzt $E(\Gamma)^2 = E(\Gamma)$, womit $E(\Gamma)$ eine orthogonale Projektion ist. Sei $x \in H$ und setze $y := E(\Gamma)\, x$. Es existieren K kompakt und U offen mit

$K \subset \Gamma \subset U$ und $\nu_\zeta (U \backslash K) \leqslant \varepsilon \ \forall\ \zeta$ und $\mu_x (U \backslash K) \leqslant \varepsilon$. Sei h eine Urysohn Funktion zu K, U. Es existieren weiter K_1 kompakt und U_1 offen mit $K \subset K_1 \subset \Gamma \subset U_1 \subset U$ und $\mu_{\zeta y+z} (U_1 \backslash K_1) \leqslant \varepsilon \ \forall\ \zeta$ und $z := \gamma (h)\, x$. Sei h_1 entsprechend eine Urysohn Funktion zu K_1, U_1. Dann folgt $|S_\Gamma (x, x) - \langle x, \gamma (h_1 h)\, x\rangle| \leqslant \varepsilon$ wie in ② mit $h_1 h$ anstelle von h. Weiter ist $\langle x, \gamma (h_1 h)\, x\rangle = \langle x, \gamma (h_1)\, z\rangle$ und $|\langle x, \gamma (h_1)\, z\rangle - S_\Gamma (x, z)| \leqslant \varepsilon$ nach ②. Schließlich ist, nach ③, $S_\Gamma (x, z) = \langle E (\Gamma)\, x, z\rangle = \langle y, \gamma (h)\, x\rangle$, wofür $|\langle y, \gamma (h)\, x\rangle - S_\Gamma (y, x)| \leqslant \varepsilon$ noch einmal nach ②. Insgesamt ergibt sich $|S_\Gamma (x, x) - S_\Gamma (y, x)| \leqslant 3\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, weshalb $S_\Gamma (x, x) = S_\Gamma (y, x)$. Nach ③ ist $S_\Gamma (x, x) = \langle E (\Gamma)\, x, x\rangle$ und $S_\Gamma (y, x) = \langle E (\Gamma)^2\, x, x\rangle$. Weil $x \in H$ beliebig ist, folgt $E (\Gamma) = E (\Gamma)^2$.

Endlich ist $\mu_x (\Gamma) = S_\Gamma (x, x) = \langle x, E (\Gamma)\, x\rangle$ nach Definition bzw. nach ③, und $\mu_x (\Delta (A)) = \langle x, \gamma (1_Z)\, x\rangle = \langle x, Ix\rangle = \|x\|^2$. Nach (2.3) und (13)(a) ist E ein reguläres PV-Maß.

(a) Sei U offen und nicht leer. Nach dem Lemma von Urysohn (13)(c) existiert eine stetige Funktion $f \neq 0$ mit $0 \leqslant f \leqslant 1$ und $f (x) = 0$ für alle $x \notin U$. Dann ist $0 \neq \gamma (f) = \int f \,\mathrm{d}E$, woraus $E (U) \neq 0$ nach (11)(f) wegen $1_U - f \geqslant 0$.

(b) Sei $ST = TS$ für alle $T \in A$. Dann ist $\langle x, \gamma (f)\, Sy\rangle = \langle x, S\gamma (f)\, y\rangle = \langle S^* x, \gamma (f)\, y\rangle$ für alle $f \in \mathcal{C} (\Delta (A))$ und x, $y \in H$. Aus ② ergibt sich $S_\Gamma (x, Sy) = S_\Gamma (S^* x, y)$ und, nach ③, $\langle x, E (\Gamma)\, Sy\rangle = \langle S^* x, E (\Gamma)\, y\rangle = \langle x, SE(\Gamma) y\rangle$. Daher ist $E (\Gamma)\, S = SE (\Gamma)$ für alle $\Gamma \in \mathcal{B}$. — Die Umkehrung folgt aus (11)(g).

□

Im Folgenden wird die Integration bezüglich Bildmaße verwendet.

(15) Bild-PV-Maß. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $(Z, \mathcal{A}), (Z', \mathcal{A}')$ Messräume und $\varphi : Z \to Z'$ messbar. Weiter sei E ein PV-Maß auf Z in H. Dann ist $\Delta' \mapsto \varphi (E) (\Delta') := E \left(\varphi^{-1} (\Delta')\right)$ ein PV-Maß auf Z' in H.*

Seien $x \in H$ und $f' : Z' \to \mathbb{C}$ messbar und quadratintegrierbar bezüglich $\varphi(E)_x$. Dann ist $f' \circ \varphi$ quadratintegrierbar bezüglich E_x und $\left(\int f' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) x = \left(\int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right) x$. Ist $f' : Z' \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt, dann gilt

$$\int f' \,\mathrm{d}\varphi (E) = \int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E.$$

Sind Z und Z' kompakte Räume, φ stetig und E regulär, dann ist auch $\varphi (E)$ regulär.

Beweis. Offensichtlich ist $\varphi(E)$ ein PV–Maß mit $\varphi (E)_x = \varphi (E_x) \ \forall\ x \in H$. — Sei f' messbar und beschränkt. Dann ist $\left\langle x, \left(\int f' \,\mathrm{d}\varphi (E)\right) x\right\rangle = \int f' \,\mathrm{d}\varphi (E)_x = \int f' \,\mathrm{d}\varphi (E_x) = \int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E_x = \left\langle x, \left(\int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E\right) x\right\rangle$ für alle $x \in H$. Daher gilt $\int f' \,\mathrm{d}\varphi (E) = \int f' \circ \varphi \,\mathrm{d}E$. — Sei nun $f' : Z' \to \mathbb{C}$ messbar und quadratintegrierbar bezüglich $\varphi(E)_x$. Sei weiter (u'_n) mit $\left(\int u'_n \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) x \to \left(\int f' \,\mathrm{d}\varphi(E)\right) x$ gemäß (2.9). Dann sind $u_n := u'_n \circ \varphi$ elementare Abbildungen mit $u_n(z) \to f(z)$ $\forall\, z$ und $\int |u_n - f|^2 \,\mathrm{d}E_x \to 0$ für $f := f' \circ \varphi$. Daher gilt $\left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) x \to \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x$. Andererseits ist $\int u_n \,\mathrm{d}E = \int u'_n \,\mathrm{d}\varphi(E)$ nach Obigem.

Zur letzten Aussage ist die Regularität von $\varphi (E)_x$ für jedes $x \in H$ zu zeigen. Dazu ist zunächst $\varphi (E)_x (\Delta') = \varphi (E_x) (\Delta') = E_x \left(\varphi^{-1} (\Delta')\right)$, was gleich $\sup\left\{E_x(K) : K \subset \varphi^{-1}(\Delta') \text{ mit } K \text{ kompakt}\right\}$ ist, weil E_x regulär ist. Aus $K \subset \varphi^{-1}(\Delta')$ folgt $\varphi(K) \subset \Delta'$, weshalb $K \subset \varphi^{-1}(\varphi(K)) \subset \varphi^{-1}(\Delta')$, wobei $K' := \varphi(K)$ als stetiges Bild eines Kompaktums kompakt ist. Daher ist $\varphi(E)_x(\Delta') \leqslant \sup\left\{E_x\left(\varphi^{-1}(K')\right) : K' \subset \Delta' \text{ mit } K' \text{ kompakt}\right\}$, was wegen $E_x \circ \varphi^{-1} = \varphi(E_x) = \varphi(E)_x$ gleich $\sup\{\varphi(E)_x(K') : K' \subset \Delta' \text{kompakt}\} \leqslant \varphi(E)_x(\Delta')$ ist. □

(16) Spektralsatz für einen normalen Operator. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann existiert genau ein PV-Maß in H auf $\sigma(T)$ versehen mit den Borel Mengen $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\sigma(T))$ derart, dass*

$$T = \int j \mathrm{d}E =: \int z \, \mathrm{d}E(z),$$

wobei $j : \sigma(T) \hookrightarrow \mathbb{C}$, $j(z) := z$. Es folgt allgemeiner

$$f[T] = \int f \, \mathrm{d}E \quad \forall\, f \in \mathcal{C}(\sigma(T)).$$

Sei weiter $S \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt $TS = ST$ genau dann, wenn $SE(\Gamma) = E(\Gamma) S$ $\forall\, \Gamma \in \mathcal{B}$. — Wird E als PV-Maß auf $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mittels $E(\mathbb{C} \backslash \sigma(T)) := 0$ aufgefasst, dann heißt E das **Spektralmaß** von T. Dafür gilt $T = \int \mathrm{id} \, \mathrm{d}E$ und $E(\sigma(T)) = I$.

Beweis. Nach (2.14) existiert ein PV-Maß E' auf $\Delta(C^*(T))$ in H derart, dass $S = \int \hat{S} \, \mathrm{d}E'$ $\forall S \in C^*(T)$. Laut dem Funktionenkalkül (1.41) ist $S = f[T]$ für ein $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Da $\widehat{f[T]} = f \circ \hat{T}$ folgt

$$f[T] = \int f \circ \hat{T} \, \mathrm{d}E' \quad \forall f \in \mathcal{C}(\sigma(T)).$$

Nach (2.15) ist das Bild–PV–Maß $E := \hat{T}(E')$ auf $\sigma(T)$ definiert und erfüllt $f[T] = \int f \, \mathrm{d}E$ für alle $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Für $f = j$ folgt speziell $j[T] = T = \int j \, \mathrm{d}E$.

Zur Eindeutigkeit von E betrachte man $T = \int z \, \mathrm{d}E_i(z)$ für $i = 1, 2$. Sei $p \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ ein Polynom in zwei Unbestimmten. Gemäß dem $*$–Isomorphismus in (2.12) ist $p(T, T^*) = \int p(z, \overline{z}) \, \mathrm{d}E_i(z), i = 1, 2$. Nach dem Satz von Stone und Weierstrass ist die Algebra der Polynome in z und $\overline{z}$ dicht in $(\mathcal{C}(\sigma(T)), \|\cdot\|_\infty)$. Damit folgt wieder aufgrund des $*$–Isomorphismus in (2.12), dass $\int f \mathrm{d}E_1 = \int f \mathrm{d}E_2$ für alle $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Man beachte jetzt, dass die PV–Maße E_i regulär gemäß (13)(a) sind, weil jedes endliche Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner auf einem polnischen Raum) regulär ist nach dem Satz von Oxtoby und Ulam. Damit folgt, wie im Existenzteil des Beweises zum Spektralsatz (2.14), dass $E_1(\Gamma) = E_2(\Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}$.

Sei schließlich $S \in L(H)$. Gilt $E(\Gamma) S = SE(\Gamma)$ für alle Γ, so folgt $TS = ST$ nach (11)(g). — Gilt umgekehrt $ST = TS$, so gilt auch $ST^* = T^*S$ nach dem Satz von Fuglede, Putnam und Rosenblum (13)(e). Damit folgt $SA = AS$ für alle $A \in C^*(T)$ nach (1.39). Der Spektralssatz (2.14-b) liefert $SE'(\Gamma') = E'(\Gamma') S$

für alle $\Gamma' \in \mathcal{B}(\Delta(C^*(T)))$. Dies impliziert $SE(\Gamma) = E(\Gamma)S$ für alle $\Gamma \in \mathcal{B}$. $\square$

(17) Ausdehnung des Funktionenkalküls für einen normalen Operator. Seien $T \in \mathcal{L}(H)$ normal und E sein Spektralmaß. Laut (2.16) gilt dann $f[T] = \int f \mathrm{d}E$ für alle $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$.

Wir definieren nun $f[T] := \int f \,\mathrm{d}E$ für alle messbaren beschränkten Funktionen f, oder (geringfügig allgemeiner) für alle Nebenklassen $[f] \in L_E^\infty(\sigma(T))$. Nach (2.12) ist

$$L_E^\infty(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H), [f] \mapsto f[T]$$

ein isometrischer $*$-Homomorphismus. Gemäß (2.16), (11)(g) gilt für $S \in \mathcal{L}(H)$, dass $ST = TS$ genau dann, wenn $SE(\Gamma) = E(\Gamma)S$ für alle Γ, und auch genau dann, wenn $Sf[T] = f[T]S$ für alle $[f] \in L_E^\infty(\sigma(T))$.

Aufgabe 36 Seien $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, E das Spektralmaß von T und $\epsilon > 0$. Dann existiert $S \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|S - T\| \leq \epsilon$, wobei S eine endliche Linearkombination von Projektionsoperatoren $E(\Gamma)$ ist.

Aufgabe 37 Sei E ein PV-Maß auf $\mathbb{C}$. Es gibt eine kleinste abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{C}$ mit $E(C) = I$. Diese Menge C heißt der **Träger** von E. Für einen normalen T mit zugehörigem Spektralmaß E gilt $C = \sigma(T)$.

Aufgabe 38 Sei H ein Hilbertraum der Dimension $d \in \mathbb{N}$ und sei E ein PV-Maß in H. Dann ist der Messraum $(Z, \mathcal{A}, E)$ atomar mit höchstens d Atomen.

Aufgabe 39 Sei $M \subset M_d(\mathbb{C})$ eine Menge kommutierender normaler Matrizen. Man zeige: Es gibt eine unitäre Matrix $U \in M_d(\mathbb{C})$ derart, dass alle Matrizen UTU^{-1} mit $T \in M$ diagonal sind.

Lösung. Sei A die von M erzeugte Unter-$*$–Algebra von $M_d(\mathbb{C})$. Gemäß dem Spektralsatz (14) sei E das Spektralmaß von A auf dem Strukturraum $\Delta(A)$ in $\mathbb{C}^d$. Es gilt $T = \int \hat{T}\, dE \;\forall\; T \in A$, wobei $\hat{T}$ die Gelfand Transformierte von T bezeichnet.

Wir überlegen uns jetzt, dass $\Delta(A)$ aus höchstens d verschiedenen Punkten besteht. Nach (14) ist $\hat{T}(\Delta(A)) = \sigma(T)$ die Menge der Eigenwerte von T. Diese ist höchstens d–elementig. Aus dem Satz von Gelfand und Naimark (1.37) zur Gelfand Transformation folgt, dass jede stetige Abbildung auf dem kompakten Raum $\Delta(A)$ höchstens d verschiedene Werte annimmt. Angenommen $h_1, \ldots, h_{d+1}$ seiein $d+1$ verschiedene Elemente von $\Delta(A)$. Nach dem Lemma von Urysohn existieren stetige Funktionen f_j auf $\Delta(A)$ mit $f_j(h_k) = \delta_{jk}$. Für die stetige Funktion $f := \sum_{j=1}^{d+1} j f_j$ gilt dann $f(h_k) = k$, $k = 1, \ldots, d+1$. Sie nimmt also $d+1$ verschiedene Werte an, was nicht möglich ist.

Daher ist $\Delta(A) = \{h_1, \ldots, h_l\}$ l–elementig mit $0 < l \leq d$. Setze $E_j := E(\{h_j\})$. Damit ist $T = \int \hat{T}\, dE = \sum_{j=1}^{l} \hat{T}(h_j) E_j$, wobei $\{\hat{T}(h_j) : j = 1 \ldots, l\} = \sigma(T)$. Man wähle eine Orthonormalbasis $(v_{j1}, \ldots, v_{jn_j})$ von $E_j(\mathbb{C}^d)$ für jedes j und füge diese zu einer Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_d) := (v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, \ldots, v_{l1}, \ldots, v_{ln_l})$ zusammen. Bilde $U \in M_d(\mathbb{C})$ die Basis $(v_1, \ldots, v_d)$ auf die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_d)$ von $\mathbb{C}^d$ ab, d.h. $Uv_i = e_i$, $i = 1, \ldots, d$. Dann ist U unitär und erfüllt $UTU^{-1}e_i = UTv_i = U\hat{T}(h_j)v_{js} = \hat{T}(h_j)e_i$ für $v_i = v_{js}$ wie behauptet. $\square$

Aufgabe 40 Sei $M \subset M_d(\mathbb{C})$ eine Menge kommutierender normaler Matrizen. Man zeige: Es gibt eine Matrix C in der von M erzeugten Unter-C^*-Algebra derart, dass jedes $T \in M$ ein Polynom in C vom Grad $\leqslant \mathrm{d} - 1$ ist. *Hinweis:* Siehe Aufgabe 39.

Lösung. Sei A die von M erzeugte Unter-$*$–Algebra von $M_d(\mathbb{C})$. Gemäß obiger Übung (39) gilt $T = \sum_{j=1}^{l} \hat{T}(h_j)E_j \ \forall\ T \in A$. Da die Gelfand Transformation ein Isomorphismus ist, gibt es zu jedem $(t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{C}^l$ genau ein T aus A mit $\hat{T}(h_j) = t_j$ für $j = 1, \ldots, l$. Also ist $A = \left\{T = \sum_{j=1}^{l} t_j E_j : t_j \in \mathbb{C},\, j = 1, \ldots, l\right\}$. Dabei sind $E_1, \ldots, E_j$ orthogonale Projektionen mit $E_j E_k = \delta_{jk} E_k$ und $\sum_{j=1}^{l} E_j = I$.

Wähle nun $C := \sum_{j=1}^{l} \lambda_j E_j \in A$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$, z.B. $\lambda_j = j,\, j = 1, \ldots, l$. Zu vorgegebenem $(t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{C}^l$ sei p das Interpolationspolynom vom Grad $l - 1$, wofür $p(\lambda_j) = t_j,\ j = 1, \ldots, l$. Explizit ist $p(z) = \sum_{\iota=1}^{l} t_\iota \prod_{\kappa \neq \iota} \frac{z - \lambda_\kappa}{\lambda_\iota - \lambda_\kappa}$. Hierfür gilt $p(C) = T$ nach dem Funktionenkalkül oder direkt $p(C) = p\left(\sum_j \lambda_j E_j\right) = \sum_j P(\lambda_j)E_j = \sum_j t_j E_j = T$. □

Multiplikationsoperatorform des Spektralsatzes

(18) Orthogonale Zerlegung in zyklische Räume. *Seien E ein PV–Maß auf $(Z, \mathcal{A})$ in $H \neq \{0\}$ und $x \in H$. Weiter sei V_x der von $\{E(\Delta)x : \Delta \in \mathcal{A}\}$ erzeugte abgeschlossene Untervektorraum von H.* Man nennt V_x einen **zyklischen** Unterraum von E bezüglich x. *Dann gelten:*

- $E(\Delta)V_x \subset V_x \ \forall\, \Delta \in \mathcal{A}$.
- $y \in V_x^{\perp} \ \Rightarrow\ V_y \perp V_x$.
- $\exists\, L \subset H$ *orthonormal* $: H = \bigoplus_{x \in L} V_x$.

Beweis. Der erste Punkt ist offensichtlich. Zum zweiten Punkt beachte man $\langle E(\Gamma)y, E(\Delta)x\rangle = \langle y, E(\Gamma)E(\Delta)x\rangle = \langle y, E(\Gamma \cap \Delta)x\rangle = 0$. — Die dritte Aussage wird mit Hilfe des Zornschen Lemmas bewiesen. Die Menge $\mathcal{L} := \{K \subset H : K \text{ orthonormal mit } V_x \perp V_{x'} \ \forall\, x, x' \in K,\ x \neq x'\}$ wird mit der Mengeninklusion partiell geordnet. Weil $\{x\} \in \mathcal{L}$ für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ ist $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Sei nun $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ total geordnet. Dann ist $K_0 := \bigcup \mathcal{K}$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$, denn sind $x, x' \in K_0$, dann existieren $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $x \in K$ und $x' \in K'$. O.E. ist $K \subset K'$ und somit $\{x, x'\}$ orthonormiert mit $V_x \perp V_{x'}$ falls $x \neq x'$. Außerdem ist $K_0 \supset K \ \forall\ K \in \mathcal{K}$. Nach dem Zornschen Lemma existiert somit ein maximales Element L in $\mathcal{L}$. Hierfür ist $H = \bigoplus\{V_x : x \in L\}$, denn anderenfalls existiert $y \perp \bigoplus\{V_x : x \in L\}$ mit $\|y\| = 1$, weshalb L wegen $y \notin L \subset L \cup \{y\} \in \mathcal{L}$ nicht maximal ist. □

Aufgabe 41 Sei H separabel. Zeige in (18) ohne Verwendung des Zornschen Lemmas, dass es eine abzählbare orthonormale Menge $L \subset H$ gibt mit $H = \bigoplus_{x \in L} V_x$.

(19) Multiplikationsoperator. Sei $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ ein **essentieller Maßraum**, was bedeutet, dass jede messbare Menge positiven Maßes eine messbare Teilmenge positiven endlichen Maßes enthält. *Sei $\varphi : Z \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt. Dann ist $M(\varphi) : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $M(\varphi)f := \varphi f$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|M(\varphi)\| = \|\varphi\|_\infty$. Insbesondere ist $E^{kan}(\Delta) = M(1_\Delta)$. Weiter ist $M(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$ μ–fast überall.*

Aufgabe 42 Man beweise (19).

(20) Zyklischer Unterraum isomorph zu L^2–Raum. *$\beta_x : L^2(E_x) \to V_x$, $f \mapsto \left(\int f \, \mathrm{d}E\right) x$ ist ein Hilbertraum Isomorphismus. Er ist durch $1_\Delta \mapsto E(\Delta)x \; \forall \, \Delta \in \mathcal{A}$ eindeutig bestimmt. Dafür gilt $E(\Delta)\beta_x(f) = \beta_x(E^{kan}(\Delta)f)$ $\forall$ $f \in L^2(E_x)$ und $\Delta \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Gemäß der Definition von $\left(\int f \, \mathrm{d}E\right) x$ in (9) erhält man aufgrund von (7)(b) aus $1_\Delta \mapsto E(\Delta)x$ durch lineare und stetige Fortsetzung den angegebenen Isomorphismus. — Nach (11)(b) ist $E(\Delta)\beta_x(f) = E(\Delta)\left(\int f \, \mathrm{d}E\right) x = \left(\int 1_\Delta f \, \mathrm{d}E\right) x = \left(\int E^{kan}(\Delta) f \, \mathrm{d}E\right) x = \beta_x \left(E^{kan}(\Delta) f\right)$. □

(21) Struktursatz für PV-Maße. *Bis auf einen Hilbertraum Isomorphismus ist jedes PV-Maß E auf $(Z, \mathcal{A})$ von der Form*

$$E = \bigoplus\nolimits_{\iota \in I} E^{\mathrm{kan}} \quad \textit{in} \quad H = \bigoplus\nolimits_{\iota \in I} L^2_{\lambda_\iota}(Z),$$

wobei $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Z ist. Weiter ist

$$\int h \, \mathrm{d}E = \bigoplus\nolimits_\iota M(h)$$

für jede messbare und beschränkte Funktion $h : Z \to \mathbb{C}$. — Wenn H separabel ist, ist I abzählbar.

Beweis. Die Behauptung folgt aus (18) und (20). Zunächst ist $H = \bigoplus_{x \in L} V_x$ und $\beta : \bigoplus_{x \in L} L^2(E_x) \to H$, $(f_x)_x \mapsto \sum_x \beta_x(f_x) = \sum_x \left(\int f_x \, dE\right) x$ ein Hilbertraum Isomorphismus. Weil $E(\Delta)\beta_x(f) = \beta_x\left(E^{kan}(\Delta)f\right)$ $\forall \; f \in L^2(E_x)$ $\forall \; x \in L$, gilt die Darstellung $\beta^{-1}E(\Delta)\beta = \bigoplus_{x \in L} E^{kan}(\Delta)$ $\forall \; \Delta \in \mathcal{A}$. Hieraus folgt allgemeiner $\beta^{-1}\left(\int h \, \mathrm{d}E)\right)\beta = \bigoplus_{x \in L} M(h)$. Schließlich sei $(\lambda_\iota)_{\iota \in I} := (E_x)_{x \in L}$. □

Im Folgenden steht $\simeq$ für Hilbertraum isomorph. Der vorangegangene Struktursatz wird auf (2.14) und (2.16) angewendet. Man erhält als Korollar das

(22) Spektraltheorem in der Multiplikationsoperatorform 1.

(a) *Sei $A \subset \mathcal{L}(H)$ ist eine kommutative Unter–C^*–Algebra. Dann ist*

$$H \simeq \bigoplus\nolimits_{\iota \in I} L^2_{\lambda_\iota}(\Delta(A)), \quad T \simeq \bigoplus\nolimits_{\iota \in I} M(\hat{T}) \quad \forall \, T \in A.$$

(b) *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann ist*

$$H \simeq \bigoplus_{\iota \in I} L^2_{\lambda_\iota}(\sigma(T)), \quad h[T] \simeq \bigoplus_{\iota \in I} M(h),$$

für alle $h : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt.

$(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ ist dabei eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\Delta(A)$ bzw. $\sigma(T)$. Ist H separabel, dann ist I abzählbar.

(23) Maßtheoretische Vorüberlegung. *Sei $(Z_\iota, \mathcal{A}_\iota, \lambda_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Maßräumen und sei $Z := \dot{\bigcup}_\iota Z_\iota$ die disjunkte Vereinigung der Grundräume. Sei $\mathcal{E} := \{\Delta \subset Z : \Delta \cap Z_\iota \in \mathcal{A}_\iota \,\forall \iota,\ \lambda_\iota(\Delta \cap Z_\iota) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $\iota\}$ und $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra auf Z. Dann gelten*

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{E} \cup \{\Delta \subset Z : Z \backslash \Delta \in \mathcal{E}\}$.

(b) $\Lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\Delta \mapsto \sum_\iota \lambda_\iota(\Delta \cap Z_\iota)$ *ist ein Maß.*

(c) $\beta : \bigoplus_\iota L^2_{\lambda_\iota}(Z_\iota) \to L^2_\Lambda(Z)$, $(f_\iota) \mapsto f$ *mit* $f|Z_\iota := f_\iota$ *ist ein Hilbertraum-Isomorphismus.*

(d) *Seien $h_\iota : Z_\iota \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt mit $\sup\{\|h_\iota\|_\infty : \iota\} < \infty$. Dann ist $h : Z \to \mathbb{C}$ mit $h|Z_\iota := h_\iota$ messbar und beschränkt und*

$$\beta \bigoplus_\iota M(h_\iota)\, \beta^{-1} = M(h).$$

(e) *Wenn alle $(Z_\iota, \mathcal{A}_\iota)$ gleich sind, d.h. $(Z_\iota, \mathcal{A}_\iota) = (Z_0, \mathcal{A}_0)$ für alle $\iota \in I$, dann schreibt man $Z_\iota = \{\iota\} \times Z_0$, $Z = \bigcup_{\iota \in I} \{\iota\} \times Z_0 = I \times Z_0$, und $\Lambda(\Delta) = \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota(\Delta_\iota)$ mit $\Delta = \bigcup_{\iota \in I} \{\iota\} \times \Delta_\iota$.*

Beweis.

(a) Die rechte Seite werde mit $\mathcal{A}'$ bezeichnet. Da $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}'$ eine σ–Algebra ist. Zunächst sind offenbar $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\mathcal{A}'$ unter Komplementbildung stabil. Seien nun $\Delta_n \in \mathcal{E}$, $\Gamma_n \subset Z$ mit $Z \setminus \Gamma_n \in \mathcal{E}$. Dann ist $\Delta := \bigcup_n \Delta_n \in \mathcal{E} \subset \mathcal{A}'$. Sei $\Gamma := \bigcup_n \Gamma_n$. Es bleibt $Z \setminus (\Delta \cup \Gamma) \in \mathcal{E}$ zu zeigen: $(Z \setminus (\Delta \cup \Gamma)) \cap Z_\iota = (Z_\iota \setminus \Delta) \cap (Z_\iota \setminus \Gamma) = (Z_\iota \setminus (\Delta \cap Z_\iota)) \cap \bigcap_n (Z_\iota \setminus \Gamma_n)$ liegt in $\mathcal{A}_\iota$ und $\lambda_\iota((Z \setminus (\Delta \cup \Gamma)) \cap Z_\iota) \leq \lambda_\iota(Z_\iota \setminus \Gamma_1) = 0$ bis auf abzählbar viele ι.

(b) Λ ist ein Maß, denn $\Lambda(\emptyset) = \sum_\iota 0 = 0$, und sind Δ_n disjunkt, so ist $\Lambda(\bigcup \Delta_n) = \sum_\iota \lambda_\iota(\bigcup_n \Delta_n \cap Z_\iota) = \sum_\iota \sum_n \lambda_\iota(\Delta_n \cap Z_\iota) = \sum_n \sum_\iota \lambda_\iota(\Delta_n \cap Z_\iota)$ $= \sum_n \Lambda(\Delta_n)$, wobei die Summen vertauschen, weil alle Summanden nicht negativ sind.

(c) Aus $(f_\iota) = 0$ folgt $f|Z_\iota = 0$ λ_ι–fast überall für alle ι. Daher ist $N_\iota := f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap Z_\iota$ eine λ_ι–Nullmenge. Sei nun $N := \bigcup_\iota N_\iota$. Aus $N \cap Z_\iota = N_\iota \in \mathcal{A}_\iota$ und $\lambda_\iota(N \cap Z_\iota) = 0$ für alle ι folgt $N \in \mathcal{A}$ und $\Lambda(N) = 0$. Weil $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = N$, ist $f = 0$. Also ist β repräsentantenunabhängig. — Ist $(f_\iota) \in \bigoplus_\iota L^2_{\lambda_\iota}(Z_\iota)$, dann sind höchstens abzählbar viele $f_\iota \neq 0$, weshalb f $\mathcal{A}$–messbar ist. Weiter ist β isometrisch, denn $\|(f_\iota)\|^2 = \sum_\iota \|f_\iota\|^2 = \sum_\iota \int_{Z_\iota} |f_\iota|^2 \,\mathrm{d}\lambda_\iota = \int |f|^2 \,\mathrm{d}\Lambda = \|f\|^2$.

Offensichtlich ist β linear. Schließlich ist β surjektiv: Ist $f \in L^2(\Lambda)$, dann ist $\infty > \|f\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}\Lambda = \sum_\iota \int_{Z_\iota} |f_\iota|^2 \,\mathrm{d}\lambda_\iota = \sum_\iota \|f|Z_\iota\|^2$, weshalb $f|Z_\iota \neq 0$ für höchstens abzählbar viele ι und daher $(f|Z_\iota)_\iota \in \bigoplus_\iota L^2_{\lambda_\iota}(Z_\iota)$ und $\beta\left((f|Z_\iota)_\iota\right) = f$.

(d) Offenbar ist h beschränkt. Nach Definition von $\mathcal{A}$ ist h auch messbar. Damit ist $\beta\left(\bigoplus_\iota M(h_\iota)\right)\beta^{-1}f = \beta\left(\bigoplus_\iota M(h_\iota)\right)(f|Z_\iota)_\iota = \beta\left((h_\iota f|Z_\iota)_\iota\right) = hf$. □

(24) Spektraltheorem in der Multiplikationsoperatorform 2. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann existiert eine Familie $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen λ_ι auf $\sigma(T)$ derart, dass mit $\varphi : I \times \sigma(T) \to \mathbb{C}$, $\varphi(\iota, z) := z$ gilt*

$$H \simeq L^2_\Lambda(I \times \sigma(T)),\, T \simeq M(\varphi),\; h[T] \simeq M(h \circ \varphi)$$

für alle $h : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt. I ist abzählbar genau dann, wenn H separabel ist.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus (22)(b) und (23), sowie aus (23) und dem Fakt, dass $L^2_{\lambda_\iota}(\sigma(T))$ separabel für jedes ι ist. □

Im Fall, dass H in (24) separabel ist, ist Λ σ-endlich und $Z = I \times \sigma(T)$ lässt sich als σ-kompakte Teilmenge

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n, \quad Z_n := nR + \sigma(T),$$

von $\mathbb{C}$ realisieren, wobei $R > 0$ so groß ist, dass die Vereinigung disjunkt ist. Jedes Z_n ist kompakt und Λ eingeschränkt auf Z_n ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Aufgabe 43 Seien H separabel und $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß Λ auf $\mathbb{C}$ und eine beschränkte messbare Funktion $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ derart, dass

$$H \simeq L^2_\Lambda(\mathbb{C}), \quad T \simeq M(\varphi).$$

Aufgabe 44 Formuliere den Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform 2 für eine kommutative Unter–C^*–Algebra von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum. Wie vereinfacht sich die Darstellung, wenn H separabel ist? *Hinweis*: Wende (22)(a) und (23)(e) an.

Lösung. Sei $A \subset \mathcal{L}(H)$ eine Unter–C^*–Algebra. Dann ist

$$H \simeq L^2_\Lambda(I \times \Delta(A)),\, T \simeq M(\tau)\, \forall T \in A.$$

Dabei ist $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\Delta(A)$, womit auf der Menge $I \times \Delta(A)$ die σ-Algebra $\mathcal{A} := \{\Delta = \bigcup_{\iota \in I}\{\iota\} \times \Delta_\iota \,:\, \Delta_\iota \in \mathcal{B}$ mit $\lambda_\iota(\Delta_\iota) \in \{0,1\}$ bis auf abzählbar viele $\iota\}$ und das Maß $\Lambda(\Delta) := \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota(\Delta_\iota)$ erklärt sind. Weiter ist $\tau : I \times \Delta(A) \to \mathbb{C}$, $\tau(\iota, h) := \hat{T}(h)$. — Wenn H separabel ist, sind I abzählbar, $\mathcal{A} := \{\Delta = \bigcup_{\iota \in I}\{\iota\} \times \Delta_\iota : \Delta_\iota \in \mathcal{B}\}$ und Λ σ–endlich.

3 Unbeschränkte Operatoren

Grundlegende Definitionen und Sätze

(1) Operatoren im Hilbertraum. Seien H ein Hilbertraum und $\mathcal{D}(T) \subset H$ ein Untervektorraum von H. Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ heißt ein Operator in H. Im Allgemeinen sind weder $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen noch T stetig. $\mathcal{D}(T)$ heißt der **Definitionsbereich** und $\mathcal{R}(T) := T\left(\mathcal{D}(T)\right)$ der **Wertebereich** von T. — Man nennt T beschränkt, wenn $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$ $\forall$ $x \in \mathcal{D}(T)$. Ansonsten heißt T **unbeschränkt**. Bekanntlich ist T genau dann beschränkt, wenn T stetig ist. — T heißt **dicht definiert**, wenn $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$.

(2) Stetige Fortsetzung. *Sei T ein bezüglich der Relativtopologie auf H stetiger Operator. Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung von T auf $\overline{\mathcal{D}(T)}$. Diese ist linear. Weiter existiert genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H)$ mit $\tilde{T}|\mathcal{D}(T) = T$, $\tilde{T}|\mathcal{D}(T)^{\perp} = 0$.*

Beweis. Man beachte, dass stetige lineare Abbildungen offenbar gleichmäßig stetig sind. $\square$

Es sei erinnert, dass die äußere orthogonale Summe $H \bigoplus H'$ zweier Hilberträume H und H' gleich dem Vektorraum $H \times H'$ mit dem Skalarprodukt $\langle (a,b), (c,\mathrm{d}) \rangle = \langle a,c \rangle + \langle b,d \rangle'$ ist, und dass $H \bigoplus H'$ ein Hilbertraum ist.

(3) Graph, Fortsetzung. Die Menge $\mathcal{G}(T) := \{(x,Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$ heißt der **Graph** von T und ist ein Untervektorraum von $H \bigoplus H$. — Ein Operator S in H mit $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ und $T = S|\mathcal{D}(T)$ heißt eine **Fortsetzung** von T, was durch $T \subset S$ bezeichnet wird. Offensichtlich gilt $T \subset S \Leftrightarrow \mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$.

(4) Abgeschlossener Operator. Ein Operator T heißt abgeschlossen, falls $G(T) = \overline{G(T)}$ in $H \bigoplus H$.

(5) Kriterium zur Abgeschlossenheit. *Ein Operator T ist abgeschlossen genau dann, wenn für alle Folgen (x_n) in $\mathcal{D}(T)$, wofür (x_n) und (Tx_n) in H konvergieren, gilt: $x := \lim x_n \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = \lim Tx_n$.*

Beweis. Offensichtlich ist $x_n \in \mathcal{D}(T)$ genau dann, wenn $y_n \in H$ existiert mit $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}(T)$. Weiter ist $((x_n, y_n))$ in $H \bigoplus H$ genau dann konvergent, wenn (x_n) und (y_n) in H konvergieren, denn allgemein ist $\|(x,y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Sei nun T abgeschlossen und sei (x_n) eine Folge in $D(T)$ derart, dass $(x,y) := \lim (x_n, Tx_n)$ existiert. Dann ist $(x,y) \in \overline{G(T)} = G(T)$ und somit $y = Tx$. — Umgekehrt sei $(x,y) \in \overline{G(T)}$. Dann exisitiert eine Folge $(x_n, y_n) \in G(T)$, die gegen (x,y) konvergiert. Das bedeutet, dass $x_n \in \mathcal{D}(T)$ und dass die Folgen (x_n) und $(y_n) = (Tx_n)$ konvergieren. Dann folgt $x \in \mathcal{D}(T)$ und $y = Tx$, womit $(x,y) \in G(T)$. □

(6) Stetigkeitskriterium. *Sei T ein Operator mit abgeschlossenem Definitionsbereich. Dann ist T genau dann stetig, wenn T abgeschlossen ist.*

Beweis. Man wende den Satz vom abgeschlossenen Graphen an. □

(7) Adjungierter Operator. *Seien T dicht definiert und*

$$\mathcal{D}(T^*) := \{y \in H : \exists\, y^* \in H \text{ mit } \langle y, Tx\rangle = \langle y^*, x\rangle \ \forall x \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Dann gelten:

(a) *y^* ist eindeutig bestimmt* (denn aus $\langle y^*, x\rangle = \langle \widetilde{y}, x\rangle \ \forall\ x \in D(T)$ folgt $(y^* - \widetilde{y}) \perp \overline{\mathcal{D}(T)} = H$, weshalb $y^* - \widetilde{y} = 0$).

(b) *$\mathcal{D}(T^*)$ ist offenbar ein Untervektorraum von H und die Abbildung*

$$T^* : D(T^*) \to H,\ y \mapsto y^*$$

ist linear. Es gilt $\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle \ \forall\ x \in \mathcal{D}(T),\ y \in D(T^*)$. T^* heißt der zu T adjungierte Operator. Im Allgemeinen ist $\mathcal{D}(T^*)$ nicht abgeschlossen. Es kann $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ sein.

(c) *Es ist $y \in D(T^*)$ genau dann, wenn das Funktional $\mathcal{D}(T) \to \mathbb{C},\ x \mapsto \langle y, Tx\rangle$ stetig ist.* Dies folgt aus dem Satz von Riesz und (3.2).

(d) *Im Fall $T \in \mathcal{L}(H)$ ergibt sich T^* wie bisher.*

(8) Summe, Produkt, Inverse von Operatoren. Es werden gesetzt

- $\mathcal{D}(S+T) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$ und $(S+T)\,x := Sx + Tx$.
- $\mathcal{D}(ST) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(S)\}$ und $(ST)\,x := S(Tx)$.

Falls T injektiv ist, setzt man

- $\mathcal{D}\left(T^{-1}\right) := \mathcal{R}(T)$ und $T^{-1} : \mathcal{D}\left(T^{-1}\right) \to H,\ T^{-1}(Tx) := x$.

Falls T injektiv ist, gilt $T^{-1}Tx = x \; \forall \; x \in \mathcal{D}(T)$ und $TT^{-1}x = x \; \forall \; x \in \mathcal{R}(T)$.

(9) Eigenschaften der Adjunktion. *Es seien* $\overline{D\,(S)} = \overline{\mathcal{D}(T)} = H$ *und für die Aussagen* (a), (b) *auch* $\overline{D\,(ST)} = H$. *Dann gelten*:

(a) $(ST)^* \supset T^*S^*$.

(b) $(ST)^* = T^*S^*$ *falls* $S \in \mathcal{L}(H)$.

(c) $T^* \subset S^*$ *falls* $S \subset T$.

Beweis. (a) Seien $x \in \mathcal{D}(ST)$ und $y \in \mathcal{D}\,(T^*S^*)$. Dann sind $y \in \mathcal{D}\,(S^*)$ und $S^*y \in \mathcal{D}\,(T^*)$ und damit $\langle y, STx\rangle = \langle S^*y, Tx\rangle = \langle T^*S^*y, x\rangle$. Nach der Definition von $(ST)^*$ ist daher $T^*S^* \subset (ST)^*$.
(b) Seien $S \in \mathcal{L}(H)$, $y \in \mathcal{D}\,((ST)^*)$ und $x \in \mathcal{D}\,(ST) = \mathcal{D}(T)$. Weil $S^* \in \mathcal{L}\,(H)$, ist $\mathcal{D}\,(S^*) = H$ und $\langle S^*y, Tx\rangle = \langle y, STx\rangle = \left\langle (ST)^*\, y, x\right\rangle$. Daher ist $S^*y \in \mathcal{D}\,(T^*)$ und folglich $y \in \mathcal{D}\,(T^*S^*)$. Das zeigt $\mathcal{D}\left((ST)^*\right) \subset \mathcal{D}\,(T^*S^*)$. Daraus folgt mit (a) die Behauptung.
(c) Seien $y \in \mathcal{D}\,(T^*)$ und $x \in \mathcal{D}\,(S)$. Dann gilt $\langle y, Sx\rangle = \langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle$. Daher ist $y \in \mathcal{D}\,(S^*)$ und $T^*y = S^*y$, weshalb $T^* \subset S^*$. □

(10) Symmetrischer Operator. Ein Operator T heißt symmetrisch, wenn $\langle y, Tx\rangle = \langle Ty, x\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$ gilt.

Die nächste Aussage gilt offensichtlich.

(11) Dicht definierter symmetrischer Operator. *Ein dicht definierter Operator* T *ist genau dann symmetrisch, wenn* $T \subset T^*$.

(12) Selbstadjungierter Operator. Ein Operator heißt **selbstadjungiert**, wenn $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$ und $T = T^*$.

Für Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ fallen die Begriffe symmetrisch und selbstadjungiert zusammen. Es gibt jedoch unbeschränkte symmetrische Operatoren, die nicht selbstadjungiert sind, wie folgendes Beispiel zeigt.

(13) Ableitungsoperator. Sei $L^2 := L^2\,([0,1])$ bezüglich des Lebesgue Maßes. Setze

$$\mathcal{D}\,(T_1) := \left\{f \in L^2 : f \text{ ist absolut stetig und hat eine Ableitung in } L^2\right\}.$$

Es ist f genau dann in $\mathcal{D}\,(T_1)$, wenn $u \in L^2$ und $c \in \mathbb{C}$ existieren mit $f\,(t) = c + \int_0^t u\,(s)\,\mathrm{d}s \;\forall\; t \in [0,1]$. Dieses Integral existiert, weil $L^2 \subset L^1$ wegen des endliches Maßes. Damit ist die Ableitung f' von f gleich u fast überall. (Der Raum $\mathcal{D}(T_1)$ ist der Sobolev Raum $W^1(]0,1[)$.) Weiter seien

$$\mathcal{D}(T_2) := \{f \in \mathcal{D}(T_1) : f(0) = f(1)\},$$

$$\mathcal{D}(T_3) := \{f \in \mathcal{D}(T_1) : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Die Operatoren

$$T_j := if' \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(T_j)\,,\ j = 1,2,3$$

sind dicht definiert und erfüllen $T_1^* = T_3,\ T_2^* = T_2,\ T_3^* = T_1$. *Da* $T_3 \subsetneqq T_2 \subsetneqq T_1$ *bedeutet das, dass* T_2 *eine selbstadjungierte Fortsetzung von* T_3 *ist,* T_3 *symmetrisch aber nicht selbstadjungiert ist und* T_1 *eine Fortsetzung von* T_2 *und nicht symmetrisch ist.*

Beweis. Wegen der Dichtheit in L^2 der differenzierbaren Funktionen mit Träger in $]0,1[$, ist $\overline{\mathcal{D}(T_j)} = L^2$ für $j = 1,2,3$.

Seien $f(t) = f(0) + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$ und $g(t) = g(0) + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$ mit $u, v \in L^2$. Es gilt die Formel der partiellen Integration, die wir anschließend beweisen:

$$\int_0^1 \overline{g}\, f'\,\mathrm{d}t = \left(\overline{g(1)} f(1) - \overline{g(0)} f(0)\right) - \int_0^1 \overline{g'}\, f\,\mathrm{d}s.$$

Für $f \in \mathcal{D}(T_j)$ und $g \in \mathcal{D}(T_k)$ mit $j + k = 4$ verschwinden die Randterme und es folgt $\langle g, T_j f\rangle = \langle T_k g, f\rangle$. Das bedeutet $T_k \subset T_j^*$, d.h. $T_1 \subset T_3^*, T_2 \subset T_2^*$ und $T_3 \subset T_1^*$.

Seien $g \in \mathcal{D}\left(T_j^*\right)$ und $h := T_j^* g \in L^2 \subset L^1$ und setze $H(t) := \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$. Für $f \in \mathcal{D}(T_j)$ gilt dann $\int_0^1 \overline{g} i f' \mathrm{d}t = \langle g, T_j f\rangle = \langle h, f\rangle = \int_0^1 \overline{h} f \mathrm{d}t = \int_0^1 \overline{H'} f \mathrm{d}t = \overline{H(1)} f(1) - 0 - \int_0^1 \overline{H} f' \mathrm{d}t$. Für $j = 1,2$ wähle $f \neq 0$ konstant. Es folgt $H(1) = 0$. Im Fall $j = 3$ ist $f(1) = 0$. In jedem Fall ist der Randterm null. Daher ergibt sich $(ig - H) \perp R(T_j)$ für $j = 1,2,3$.

Ist $j = 1$, dann ist offensichtlich $R(T_1) = L^2$ und somit $ig = H$, wobei $H(0) = H(1) = 0$. Daraus folgt $g \in \mathcal{D}(T_3)$. Also ist $T_1^* \subset T_3$. — Sei nun $j = 2,3$. Dann ist $R(T_j) = \left\{u \in L^2 : \int_0^1 u\,\mathrm{d}t = 0\right\} = \{1\}^\perp$ und somit $ig - H$ konstant. Dies impliziert $g \in \mathcal{D}(T_1)$. Also ist $T_3^* \subset T_1$. Für $j = 2$ gilt noch $H(0) = H(1) = 0$, weshalb $g(0) = g(1)$ und $g \in \mathcal{D}(T_2)$. Also ist $T_2^* \subset T_2$.

Zur partiellen Integration ist $\int_0^1 \overline{g}\, f'\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\overline{g(0)} + \int_0^t \overline{v(s)}\,\mathrm{d}s\right) u(t)\,\mathrm{d}t = \overline{g(0)}\,(f(1) - f(0)) + \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[0,t]}(s)\,\overline{v(s)}\,\mathrm{d}s\right) u(t)\,\mathrm{d}t$. Da $1_{[0,t]}(s) = 1_{[s,1]}(t)$, ist das Doppelintegral nach dem Satz von Fubini $\int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[s,1]}(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t\right) \overline{v(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (f(1) - f(s))\,\overline{v(s)}\,\mathrm{d}s$. Der letzte Ausdruck ist $f(1)\left(\overline{g(1)} - \overline{g(0)}\right) - \int_0^1 f\,\overline{v}\,\mathrm{d}s$. Damit gilt $\int_0^1 \overline{g}\, f'\,\mathrm{d}t = \overline{g(0)}\,(f(1) - f(0)) + f(1)\left(\overline{g(1)} - \overline{g(0)}\right) - \int_0^1 f\overline{g'}\,\mathrm{d}s = \left(f(1)\,\overline{g(1)} - \overline{g(0)} f(0)\right) - \int_0^1 f\,\overline{g'}\,\mathrm{d}s.$ $\square$

(14) Vertauschungsrelation. Sei $D := \frac{1}{i} T_1$ aus (13) und $M \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$, $(Mf)(t) := tf(t)$. M ist der Multiplikationsoperator mit der identischen Abbildung. Wir betrachten $DM - MD$. Zunächst ist $\mathcal{D}(DM - MD) = \mathcal{D}(DM) \cap \mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(T_1)$, denn für $f \in D(T_1)$, $f(t) = c + \int_0^t u(s)\, \mathrm{d}s$ ist $v(t) := f(t) + tu(t)$ offenbar quadratintegrierbar und erfüllt $\int_0^t v(s)\, \mathrm{d}s = tf(t)$, was man mit partieller Integration (siehe das Beweisende von (13)) nachrechnet. Mit $f \in D(T_1)$ folgt $(DM - MD) f = D(tf) - tDf = tDf + f - tDf = f$, d.h.

$$DM - MD \subsetneqq I.$$

In der Quantenmechanik gilt die Heisenberg Vertauschungsrelation

$$\frac{1}{i}[QP - PQ] \subset I$$

für den Ortsoperator Q und den Impulsoperator P. Die Frage ist, ob I der Kommutator von zwei beschränkten Operatoren sein kann.

Sei A eine normierte Algebra mit Eins e. Dann ist $xy - yx \neq e \;\forall\; x, y \in A$.

Beweis. Angenommen $xy - yx = e$. Durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ wird

$$x^n y - y x^n = n x^{n-1} \neq 0 \qquad (\star)$$

gezeigt. Der Fall $n = 1$ ist klar, wobei $x^0 := e$. Nun gelte $(\star)$ für ein $n \geq 1$. Dann ist $x^n \neq 0$ und $x^{n+1}y - yx^{n+1} = x^n(xy - yx) + (x^n y - yx^n)x = x^n e + nx^{n-1}x = (n+1)x^n \neq 0$. — Aus $(\star)$ folgt $n\left\|x^{n-1}\right\| = \|x^n y - yx^n\| \leqslant 2\|x^n\|\|y\| \leqslant 2\left\|x^{n-1}\right\|\|x\|\|y\|$ und somit der Widerspruch $n \leqslant 2\|x\|\|y\| \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. □

Die nächste Aussage ist leicht nachzuprüfen.

(15) Unitärer Hilfsoperator. *Sei H ein Hilbertraum. Der Operator $\iota : H \bigoplus H \to H \bigoplus H$ mit $\iota(a,b) := (-b, a)$ ist unitär mit $\iota^2 = -I$. Für $M \subset H \bigoplus H$ ist daher $(\iota M)^{\perp} = \iota\left(M^{\perp}\right)$. Ist M ein Untervektorraum, dann ist $\iota^2 M = M$.*

(16) Graph des adjungierten und inversen Operators. *Sei T ein Operator in H.*

(a) *Falls $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$ ist $\mathcal{G}(T^*) = \iota\,\mathcal{G}(T)^{\perp}$ und damit T^* abgeschlossen.*

(b) *Ist T injektiv, dann ist $\mathcal{G}\left(T^{-1}\right) = \iota(\mathcal{G}(-T))$.*

Beweis. (a) $(a,b) \in \iota\,\mathcal{G}(T)^{\perp} \Leftrightarrow 0 = \langle (a,b), (-Tx, x)\rangle = \langle a, -Tx\rangle + \langle b, x\rangle$, d.h. $\langle b, x\rangle = \langle a, Tx\rangle \;\forall\; x \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow a \in \mathcal{D}(T^*)$, $b = T^*a \Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{G}(T^*)$.

(b) $(a,b) \in \iota(\mathcal{G}(-T)) \Leftrightarrow (-b, a) \in \mathcal{G}(-T) \Leftrightarrow b \in \mathcal{D}(T)$, $Tb = a \Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{G}(T^{-1})$. □

Es folgt ein wichtiges Korollar zu (16)(a).

(17) Eine orthogonale Zerlegung. *Sei T ein abgeschlossener dicht definierter Operator. Dann besteht die orthogonale Zerlegung $H \bigoplus H = \iota\,\mathcal{G}\,(T) \bigoplus \mathcal{G}\,(T^*)$. Demnach existiert zu jedem $(a, b) \in H \times H$ genau ein $(x, y) \in \mathcal{D}(T) \times \mathcal{D}\,(T^*)$ derart, dass $a = -Tx + y$ und $b = x + T^*y$ gelten.*

Der **Nullraum** $T^{-1}\,(\{0\}) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}$ von T wird im Folgenden mit $\mathcal{N}\,(T)$ bezeichnet.

(18) Orthogonales Komplement des Wertebereichs. *Sei T ein dicht definierter Operator in H. Dann gilt $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}\,(T^*)$.*

Beweis. $y \in \mathcal{R}(T)^\perp \Leftrightarrow \langle y, Tx\rangle = 0\ \forall\ x \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow y \in D\,(T^*)$, $\langle T^*y, x\rangle = 0\ \forall$ $x \in \mathcal{D}(T) \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}\,(T^*)$. □

(19) Aussagen zur Selbstadjungiertheit. *Sei T symmetrisch und dicht definiert. Dann gelten:*

(a) $\mathcal{D}(T) = H \Rightarrow T \in \mathcal{L}\,(H)$ *selbstadjungiert (Satz von Hellinger und Toeplitz).*

(b) T *selbstadjungiert und injektiv* $\Rightarrow \overline{\mathcal{R}\,(T)} = H$ *und* T^{-1} *selbstadjungiert.*

(c) $\overline{\mathcal{R}(T)} = H \Rightarrow T$ *injektiv.*

(d) $\mathcal{R}(T) = H \Rightarrow T$ selbstadjungiert und injektiv, $T^{-1} \in \mathcal{L}\,(H)$.

Beweis. (a) Da $T \subset T^*$ und $D\,(T) = H$, ist $T = T^*$. Damit ist T abgeschlossen nach (16)(a). Nach (6) ist $T \in \mathcal{L}\,(H)$.

(b) Sei $y \perp \mathcal{R}(T)$. Nach (18) ist $y \in \mathcal{N}\,(T^*)$. Weil T selbstadjungiert ist, folgt $Ty = 0$, und weil T injektiv ist, folgt $y = 0$. Damit ist $\overline{\mathcal{R}(T)} = H$. — Für den inversen Operator gilt $\mathcal{G}(T^{-1*}) = \iota\,\mathcal{G}(T^{-1})^\perp = \iota^2\,\mathcal{G}(-T)^\perp$ nach (16)(a) und (16)(b). Dies ist weiter gleich $\mathcal{G}\,(-T)^\perp = \mathcal{G}\,(-T^*)^\perp = \iota\,\mathcal{G}\,(-T) = \mathcal{G}\left(T^{-1}\right)$, weil T selbstadjungiert und somit abgeschlossen ist. Damit ist $T^{-1*} = T^{-1}$, weil ihre Graphen übereinstimmen.

(c) Nach (18) ist $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$. Weil $T \subset T^*$ ist auch $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, weshalb T injektiv ist.

(d) T ist injektiv nach (c) und daher $D\left(T^{-1}\right) = H$. Zu $x, y \in H$ existieren somit $u, v \in D\,(T)$ mit $x = Tu$, $y = Tv$. Daraus folgt $\left\langle T^{-1}x, y\right\rangle = \langle u, Tv\rangle = \langle Tu,\, v\rangle = \left\langle x, T^{-1}y\right\rangle$, wobei die zweite Gleichung wegen der Symmetrie von T gilt. Also ist T^{-1} symmetrisch und die Behauptung folgt nach (a). □

(20) Abschließbarkeit. Ein Operator T heißt abschließbar, falls ein Operator $\overline{T}$ in H existiert mit $\mathcal{G}\left(\overline{T}\right) = \overline{\mathcal{G}\,(T)}$. Dieser Operator $\overline{T}$ ist offenbar eindeutig und heißt der Abschluss von T. Die folgenden Aussagen dazu sind nahezu offensichtlich.

(a) *Eine Menge* $M \subset H \bigoplus H$ *ist der Graph eines Operators genau dann, wenn* M *ein Untervektorraum mit* $M \cap (\{0\} \bigoplus H) = \{(0,0)\}$ *ist.*

(b) T *ist abschließbar genau dann, wenn* $\overline{\mathcal{G}(T)}$ *der Graph eines Operators ist.*

(c) T *ist abschließbar genau dann, wenn* $Tx_n \to 0$ *für alle Folgen* (x_n) *in* $\mathcal{D}(T)$*, die gegen* 0 *konvergieren und wofür* (Tx_n) *konvergiert.*

(d) *Ist* T *abschließbar, dann ist* $T \subset \overline{T}$ *und* $\overline{T}$ *ist abgeschlossen.*

(e) T *ist abschließbar genau dann, wenn* $S = \overline{S}$ *existiert mit* $T \subset S$.

(f) T *ist abgeschlossen genau dann, wenn* $T = \overline{T}$.

(21) Abschließbarkeit und Adjunktion. *Sei* T *ein dicht definierter Operator in* H*. Dann gilt:*

$$T \textit{ abschließbar } \Leftrightarrow \overline{\mathcal{D}(T^*)} = H \Rightarrow \overline{T}^* = T^*, \ \overline{T} = T^{**}.$$

Beweis. Es gilt: $z \perp \mathcal{D}(T^*) \Leftrightarrow \langle (0,z), (-T^*y, y) \rangle = 0 \ \forall \ y \in \mathcal{D}(T^*) \Leftrightarrow (0,z) \in \iota\, \mathcal{G}(T^*)^{\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)}$ nach (16)(a). Hieraus erkennt man, das $\overline{\mathcal{G}(T)}$ genau dann der Graph eines Operators ist, wenn $z = 0$ und somit wenn $\overline{D(T^*)} = H$ ist. — Sei nun T abschließbar. Weil $\iota\, \overline{\mathcal{G}(T)}^{\perp}$ gleich $\iota\, \mathcal{G}(T)^{\perp} = \mathcal{G}(T^*)$ und auch gleich $\iota\, \mathcal{G}(\overline{T})^{\perp} = \mathcal{G}\left(\overline{T}^*\right)$ ist, folgt damit $\overline{T}^* = T^*$. Weiter gilt $\mathcal{G}(T^{**}) = \iota\, \mathcal{G}(T^*)^{\perp} = \iota^2\, \mathcal{G}(T)^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T})$ und somit $T^{**} = \overline{T}$. $\square$

Ein Operator T in H wird **positiv** genannt, wenn $\langle x, Tx \rangle \geq 0 \ \forall \ x \in \mathcal{D}(T)$. Man schreibt dafür $T \geq 0$. Entsprechend bezeichnet $T > 0$ einen **strikt positiven** Operator. — Es folgt ein entscheidendes Ergebnis von J. v. Neumann.

(22) Selbstadjungiertheit von T^*T. *Sei* T *ein abgeschlossener dicht definierter Operator in* H *und sei* $Q := I + T^*T$.

(a) *Dann existiert ein Operator* B *in* H *mit* $BQ \subset QB = I$*. Daraus folgen die Aussagen* (b) – (d).

(b) B *ist eindeutig,* $B \in \mathcal{L}(H)$*,* $B = B^*$*,* $B > 0$*,* $TB \in \mathcal{L}(H)$ *und* $\|Bx\|^2 + \|TBx\|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \forall x \in H$*. Weiter sind* Q *und* B *injektiv,* $\mathcal{R}(Q) = H$ *und* $Q = B^{-1}$ *selbstadjungiert.*

(c) T^*T *ist positiv und selbstadjungiert.*

(d) *Sei* $T' := T|D(T^*T)$. *Dann ist* $\overline{\mathcal{G}(T')} = \mathcal{G}(T)$, *d.h.* T' *ist abschließbar mit* $\overline{T'} = T$.

Beweis. (a) Nach (17) existieren zu jedem $z \in H$ genau ein $z_1 \in \mathcal{D}(T)$ und genau ein $z_2 \in \mathcal{D}(T^*)$ derart, dass $(0, z) = (-Tz_1, z_1) + (z_2, T^*z_2)$ mit $(-Tz_1, z_1) \perp (z_2, T^*z_2)$. Setze $Bz := z_1$ und $Cz := z_2$. Offenbar sind B, C Operatoren in H mit $\mathcal{D}(B) = H$, $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{D}(C) = H$, $\mathcal{R}(C) \subset D(T^*)$ und

$$(0, z) = (-TBz, Bz) + (Cz, T^*Cz), \quad (-TBz, Bz) \perp (Cz, T^*Cz). \qquad (\star)$$

Aus $(\star)$ folgt $C = TB$, $I = B + T^*C$. Daher ist $I = B + T^*TB = (I + T^*T)B = QB$, weshalb $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T)$. Es gilt sogar $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(T^*T)$, denn ist $u \in \mathcal{D}(T^*T)$, so ist $u \in \mathcal{D}(T)$, und für $z := u + T^*Tu$ ist $z_1 := Bz \in \mathcal{D}(T)$ nach $(\star)$ das einzige Element aus $\mathcal{D}(T)$ mit $z = z_1 + T^*Cz = z_1 + T^*Tz_1$, weshalb $u = z_1 \in R(B)$. — Daher existiert zu jedem $y \in \mathcal{D}(Q)$ ein $z \in H$ mit $y = Bz$. Dafür gilt $Qy = QBz = z$ (siehe oben) und somit $BQy = Bz = y$. Folglich ist $BQ \subset I$.

(b) Sei nun B ein Operator in H mit $BQ \subset QB = I$. Weil $QB = I$, ist $R(Q) = H = \mathcal{D}(B)$. Seien $z, z' \in H$ vorgegeben. Dann existieren $x, x' \in \mathcal{D}(Q)$ mit $z = Qx$, $z' = Qx'$ und $\langle z, Bz' \rangle = \langle Qx, BQx' \rangle = \langle Qx, x' \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle T^*Tx, x' \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle Tx, Tx' \rangle$, weil $x' \in \mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T) \subset \mathcal{D}(T)$. Ebenso folgt $\langle z', Bz \rangle = \langle x', x \rangle + \langle Tx', Tx \rangle$ durch Vertauschung von z mit z'. Damit ist $\langle Bz, z' \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle Tx, Tx' \rangle = \langle z, Bz' \rangle$ und speziell $\langle z, Bz \rangle = \langle x, x \rangle + \langle Tx, Tx \rangle > 0$ für $z \neq 0$, da $x \neq 0$.

Nun ist B nach dem Satz von Hellinger und Toeplitz (19)(a) stetig und selbstadjungiert. Außerdem ist $B > 0$. Aus $\mathcal{D}(B) = H$ und $BQ \subset I$ folgt $\mathcal{R}(B) \supset \mathcal{D}(Q)$, und aus $QB = I$ folgt $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(Q)$. Daher ist $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(Q)$. Weiter folgt aus $QB = I$, dass B injektiv ist und deshalb $B^{-1} = IB^{-1} = QBB^{-1} = Q|\mathcal{R}(B) = Q|\mathcal{D}(Q) = Q$. Somit sind B eindeutig, Q injektiv, $\mathcal{R}(Q) = H$ und $B^{-1} = Q$ selbstadjungiert nach (19)(b).

Aus der Eindeutigkeit von B folgt $(\star)$ und daraus $\|Bz\|^2 + \|TBz\|^2 \leqslant \|z\|^2$ für alle $z \in H$, weshalb $\|TB\| \leqslant 1$. Also ist $TB \in \mathcal{L}(H)$.

(c) Weil $T^*T = Q - I$ und Q selbstadjungiert ist, ist auch T^*T selbstadjungiert. Für $x \in \mathcal{D}(T^*T)$ gilt $\langle x, T^*Tx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle \geqslant 0$, weshalb $T^*T \geq 0$.

(d) Da T abgeschlossen ist, ist $\mathcal{G}(T) = \overline{\mathcal{G}(T)}$ ein Hilbertraum. Sei $(x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$ mit $(x, Tx) \perp \mathcal{G}(T')$ in $\mathcal{G}(T)$. Für alle $x' \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(Q)$ gilt daher $0 = \langle (x, Tx), (x', Tx') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle Tx, Tx' \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle x, T^*Tx' \rangle = \langle x, Qx' \rangle$. Weil $\mathcal{R}(Q) = H$ ist, muss $x = 0$ sein. □

(23) Maximal symmetrisch. Ein symmetrischer Operator T heißt maximal symmetrisch, wenn T keine echte symmetrische Fortsetzung besitzt, d.h. wenn $T = S$ für jeden symmetrischen Operator S mit $T \subset S$ gilt. *Jeder selbstadjungierte Operator ist maximal symmetrisch.*

Beweis. Seien T selbstadjungiert und S eine symmetrische Fortsetzung. Dann ist $S^* \subset T^* = T$, weshalb $S \subset S^* \subset T \subset S$. Also ist $T = S$. □

(24) Hauptlemma. *Sei T symmetrisch (aber nicht notwendigerweise dicht definiert). Dann gelten:*

(a) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \ \forall \ x \in \mathcal{D}(T)$.

(b) $T = \overline{T} \Leftrightarrow R\,(T + iI) = \overline{R\,(T + iI)}$.

(c) $\mathcal{N}(T + iI) = \{0\}$.

(d) $\mathcal{R}(T + iI) = H \Rightarrow T$ *maximal symmetrisch.*

(e) *Die Aussagen* (a)–(d) *gelten für $-i$ anstelle von i.*

Beweis. (a) $\|Tx + ix\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 + \langle Tx, ix\rangle + \langle ix, Tx\rangle$, und $\langle ix, Tx\rangle = -i\,\langle x, Tx\rangle = -i\,\langle Tx, x\rangle = -\,\langle Tx, ix\rangle$, weil T symmetrisch ist. — (b) Die Abbildung $R\,(T + iI) \to \mathcal{G}\,(T)\,, (T + iI)\,x \mapsto (x, Tx)$ ist eine surjektive Isometrie nach (a). — (c) Folgt aus (a). — (d) Sei S eine echte Fortsetzung von T. Dann sind $\mathcal{D}(T) \subsetneqq \mathcal{D}\,(S)$ und $T + iI \subsetneqq S + iI$. Weil $T + iI$ surjektiv ist, kann $S + iI$ nicht injektiv sein, weshalb S nach (c) nicht symmetrisch ist. — (e) ist klar. □

Die Cayley Transformation

Diese Transformation tritt als wesentliches Hilfsmittel bei der Theorie der Fortsetzung unbeschränkter symmetrischer Operatoren auf.

(25) Cayley Transformierte. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \partial\mathbb{D}\setminus\{1\}\,, t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$ ist eine Bijektion mit Umkehrabbildung $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Mit dem Funktionenkalkül folgt:

- *Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, so ist $U := (T - iI)\,(T + iI)^{-1}$ unitär.*
- *Ist $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär und ist $I - U$ bijektiv, so ist $T := i\,(I + U)\,(I - U)^{-1}$ selbstadjungiert.*

Diese Beziehung wird nun fortgesetzt zu einer Bijektion zwischen symmetrischen Operatoren und Isometrien ohne Fixpunkte. Sei T ein symmetrischer Operator. Nach (24) ist $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|Tx - ix\|^2 \ \forall \ x \in \mathcal{D}\,(T)$. Daraus folgt, dass

$$\mathcal{R}\,(T + iI) \to \mathcal{R}\,(T - iI)\,, \quad (T + iI)x \mapsto (T - iI)x$$

eine Isometrie U von $\mathcal{D}\,(U) := \mathcal{R}\,(T + iI)$ auf $\mathcal{R}\,(U) := \mathcal{R}\,(T - iI)$ bestimmt. Da $(T + iI)^{-1} : \mathcal{D}\,(U) \to \mathcal{D}(T)$ bijektiv ist, folgt

$$U = (T - iI)\,(T + iI)^{-1}\,.$$

Der Operator U heißt die **Cayley Transformierte** von T.

(26) Isometrischer Operator. *Sei V ein isometrischer Operator in H. Dann gilt:*

(a) $\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle$ *für alle* $x, y \in \mathcal{D}(V)$.

(b) $\overline{\mathcal{R}(I-V)} = H \Rightarrow I - V$ *injektiv, d.h. V ist fixpunktfrei.*

(c) *Ist einer der drei Räume $\mathcal{D}(V), \mathcal{R}(V), \mathcal{G}(V)$ abgeschlossen, so sind es alle drei.*

Beweis. (a) $\langle Vx, Vy\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\,\|\zeta Vx + Vy\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\,\|V(\zeta x + y)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\zeta^4=1}\zeta\,\|\zeta x + y\|^2 = \langle x, y\rangle$. — (b) Sei $x \in \mathcal{D}(V)$ mit $(I-V)x = 0$. Dann ist $x = Vx$ und damit $\langle x, (I-V)y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, Vy\rangle = \langle Vx, Vy\rangle - \langle Vx, Vy\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{D}(V)$. Wegen der Voraussetzung folgt $x = 0$. — (c) Zunächst ist $\mathcal{D}(V)$ abgeschlossen genau dann, wenn $V(\mathcal{D}(V)) = \mathcal{R}(V)$ abgeschlossen ist, weil H vollständig und V isometrisch sind. Daher konvergiert eine Folge $(x_n, Vx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}(V)$ gegen ein (x,y) genau dann, wenn $x_n \in \mathcal{D}(V)$ und $x_n \to x$ (denn damit auch $Vx_n \to y$). Also ist $\mathcal{G}(V)$ abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{D}(V)$ abgeschlossen ist. □

(27) Eigenschaften der Cayley Transformation. *Sei U die Cayley Transformierte eines symmetrischen Operators T. Dann gelten:*

(a) U ist abgeschlossen genau dann, wenn T abgeschlossen ist.

(b) $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(T)$, $I - U$ *ist injektiv (d.h. U ist fixpunktfrei) und es gilt die Umkehrsformel* $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$.

(c) U *unitär* $\Leftrightarrow$ T *selbstadjungiert.*

Umgekehrt ist V die Cayley Transformierte eines symmetrischen Operators, wenn V isometrisch und $I - V$ injektiv ist.

Beweis. (a) Nach dem Hauptlemma (24)(b) ist T abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{R}(T+iI) = \overline{\mathcal{R}(T+iI)}$, und nach (26)(c) ist U abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{D}(U) = \overline{\mathcal{D}(U)}$. Damit folgt die Aussage, weil $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T+iI)$.

(b) Für $x \in \mathcal{D}(T)$ sei $z := Tx + ix$. Nach Definition ist $Uz = Tx - ix$. Daher sind $(I-U)z = 2ix$, $(I+U)z = 2Tx$. Daraus folgen $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(T)$ und die Injektivität von $I-U$, denn $\mathcal{D}(I-U) = \mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T+iI)$ nach Definition von U und weil $(I-U)z = 0$ zunächst $x = 0$ und damit $z = 0$ ergibt. Somit bildet $(I-U)^{-1}$ den Raum $\mathcal{D}(T)$ bijektiv auf $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}(I+U)$ ab, so dass $2Tx = (I+U)z = (I+U)(I-U)^{-1}2ix$.

(c) Sei T selbstadjungiert. Dann ist $\mathcal{R}\left(I+T^2\right) = H$ nach (22). Weiter ist $(T+iI)(T-iI) = I + T^2 = (T-iI)(T+iI)$ auf $\mathcal{D}\left(T^2\right)$ definiert. Daraus folgt $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T+iI) \supset \mathcal{R}\left(I+T^2\right) = H$, d.h. $\mathcal{D}(U) = H$, und $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(T-iI) \supset \mathcal{R}\left(I+T^2\right) = H$, d.h. $\mathcal{R}(U) = H$, weshalb U unitär ist.

— Sei umgekehrt U unitär. Dann ist $\mathcal{R}(I-U)^{\perp} = \mathcal{N}\left((I-U)^*\right)$ nach (18) und $\mathcal{N}(I-U) = \{0\}$ nach (b). Für einen normalen Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ ist $\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(S^*)$, denn $\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle x, S^*Sx\rangle = \langle x, SS^*x\rangle = \langle S^*x, S^*x\rangle = \|S^*x\|^2$. Deshalb folgt $\overline{\mathcal{R}(I-U)} = H$. Nach (b) ist somit $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$, womit T^* definiert ist. Nach (11) ist $T \subset T^*$.

Sei nun $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Weil $\mathcal{R}(T+iI) = \mathcal{D}(U) = H$, existiert $y_0 \in \mathcal{D}(T)$ mit $(T^*+iI)\,y = (T+iI)\,y_0$. Weiter ist $(T^*+iI)\,y = (T^*+iI)\,y_0$, weil $T \subset T^*$. Also ist $y - y_0 \in \mathcal{N}(T^*+iI) = \mathcal{R}(T-iI)^{\perp}$ nach (18). Weil $\mathcal{R}(T-iI) = \mathcal{R}(U) = H$, folgt $y - y_0 = 0$. Also ist $y \in \mathcal{D}(T)$. Dies zeigt $\mathcal{D}(T) \supset \mathcal{D}(T^*)$. Folglich ist $T = T^*$.

Zum Beweis der letzten Behauptung sei V isometrisch und $I - V$ injektiv. Dann ist die Abbildung $\mathcal{R}(I-V) \to \mathcal{D}(V)$, $x \mapsto z := (I-V)^{-1}x$ bijektiv. Definiere damit $\mathcal{D}(S) := \mathcal{R}(I-V)$, $Sx := i\,(z+Vz)$ für $x = z - Vz$, $z \in \mathcal{D}(V)$. Seien auch $x' \in \mathcal{D}(S)$, $z' \in \mathcal{D}(V)$ mit $x' = z' - Vz'$. Dann ist $\langle Sx, x'\rangle = -i\,\langle z+Vz, z'-Vz'\rangle = -i\,\langle z, z'\rangle + i\,\langle Vz, Vz'\rangle + i\,\langle z, Vz'\rangle - i\,\langle Vz, z'\rangle$ und $\langle x, Sx'\rangle = i\,\langle z-Vz, z'+Vz'\rangle = i\,\langle z, z'\rangle - i\,\langle Vz, Vz'\rangle - i\,\langle Vz, z'\rangle + i\,\langle z, Vz'\rangle$. Wegen $\langle z, z'\rangle = \langle Vz, Vz'\rangle$ ist $\langle Sx, x'\rangle = \langle x, Sx'\rangle$. Also S ist symmetrisch.

Schließlich folgt aus $Sx = i\,(z+Vz)$, $x = z - Vz$, dass $Sx - ix = 2iVz$, $Sx + ix = 2iz$, weshalb $Sx - ix = 2iVz = V\,(2iz) = V\,(Sx+ix)$ für alle $x \in \mathcal{D}(S)$. Weiter folgt $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(S+iI)$, weil $2iz = Sx + ix \in \mathcal{R}(S+iI)$ und $2iz' := Sx + ix = i\,(z+Vz) + i\,(z-Vz) = 2iz \in \mathcal{D}(V)$. Damit ist V die Cayley Transformierte von S. □

Defektindizes

(28) Fortsetzung der Cayley Transformierten. *Seien U, U_1 die Cayley Transformierten der symmetrischen Operatoren T, T_1. Dann ist $T \subsetneqq T_1$ genau dann, wenn $U \subsetneqq U_1$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass $(T+iI)^{-1}$ den Raum $\mathcal{D}(U)$ bijektiv auf $\mathcal{D}(T)$ abbildet. □

Daher ist ein symmetrischer Operator T genau dann symmetrisch fortsetzbar, wenn seine Caley Transformierte U isometrisch und fixpunktfrei fortsetzbar ist. Stets gilt $\overline{U} \supset U$ und $\mathcal{D}\left(\overline{U}\right) = \overline{\mathcal{D}(U)}$ nach (2) aber im Allgemeinen ist $\overline{U}$ nicht mehr fixpunktfrei, selbst wenn $\overline{\mathcal{D}(U)} = H$ gilt, wie folgendes Beispiel zeigt.

(29) Nicht abschließbarer symmetrischer Operator. Seien $H = \ell^2$, (e_n) die Standardbasis und $a := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n \in H$. Weiter sei V der durch $Va := a$ und $Vx := -x \;\; \forall\, x \in \{a\}^{\perp}$ bestimmte unitäre Operator. Der Untervektorraum $\mathcal{D}(U) := \{x \in H : \langle e_n, x\rangle = 0$ bis auf endlich viele $n\}$ liegt dicht in H und der Operator $U := V|\mathcal{D}(U)$ ist isometrisch. Außerdem ist U fixpunktfrei, denn ist $Ux = x$ für $x \in \mathcal{D}(U)$, dann ist $Vx = x$ und $x = x_1 + \alpha a$ mit $x_1 \perp a$. Gemäß der Definition von V ist daher $x_1 + \alpha a = -x_1 + \alpha a$, weshalb $x_1 = 0$ und damit $x = \alpha a$. Wegen $x \in \mathcal{D}(U)$ folgt $\alpha = 0$ und somit $x = 0$. — Trotzdem hat $\overline{U} = V$ den Fixpunkt a.

Sei T die Cayley Rücktransformierte von U. Dann folgt aus (28) und (27)(a), dass T ein nicht dicht definierter symmetrischer Operator ist, der nicht abschließbar ist. Siehe jedoch den folgenden Satz.

Aufgabe 45 Bestimme die Cayley Rücktransformierte von U aus (29).

(30) Cayley Transformierte des Abschlusses. *Seien T ein dicht definierter symmetrischer Operator und U die Cayley Transformierte von T. Dann sind T abschließbar, $\overline{T}$ symmetrisch und $\overline{U}$ die Cayley Transformierte von $\overline{T}$.*

Beweis. Weil $T \subset T^*$ ist T^* ist dicht definiert. Damit existiert T^{**} und nach (21) ist $\overline{T} = T^{**} \subset T^* = \overline{T}^*$, weshalb $\overline{T}$ symmetrisch ist. Sei V die Cayley Transformierte von $\overline{T}$. Aus (27)(a), (28) folgt $V = \overline{V}$ und $U \subset V$, weshalb $\overline{U} \subset V$. Nach (27)(b) sind V und damit $\overline{U}$ fixpunktfrei und es existiert die Cayley Rücktransformierte T_1 von $\overline{U}$. Nach (27)(a), (28) ist dann $T \subset T_1 = \overline{T}_1 \subset \overline{T}$. Also $T_1 = \overline{T}$. □

(31) Defektindizes. Sei T ein symmetrischer, abgeschlossener und dicht definierter Operator. Aus (24)(b) folgt, dass $\mathcal{R}(T \pm iI)$ abgeschloßen sind. Die Cayley Transformierte $U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$ von T bildet $\mathcal{R}(T + iI)$ isomorph auf $\mathcal{R}(T - iI)$ ab. Die Räume

$$H_+ := \mathcal{D}(U)^{\perp} = \mathcal{R}(T + iI)^{\perp} = \mathcal{N}(T^* - iI)$$

$$H_- := \mathcal{R}(U)^{\perp} = \mathcal{R}(T - iI)^{\perp} = \mathcal{N}(T^* + iI)$$

heißen die Defekträume von T. Es gilt $H_+ \cap H_- = \{0\}$. Die Zahlen $n_\pm := \dim H_\pm$ nennt man die Defektindizes von T.

Man nennt einen dicht definierten Operator T **wesentlich selbstadjungiert**, wenn T abschließbar ist und $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.

(32) Bedeutung der Defektindizes. *Sei T dicht definiert und symmetrisch. Dann gilt mit $n_\pm = n_\pm\left(\overline{T}\right)$:*

(a) *T ist wesentlich selbstadjungiert genau dann, wenn $n_+ = n_- = 0$.*

(b) *T ist maximal symmetrisch genau dann, wenn $T = \overline{T}$ und $n_+ n_- = 0$.*

(c) *T hat eine selbstadjungierte Fortsetzung genau dann, wenn $n_+ = n_-$.*

Beweis. Nach (30) ist $\overline{T}$ symmetrisch und dicht definiert. Ist S selbstadjungiert mit $S \supset T$ dann folgt $S \supset \overline{T}$ weil $S = \overline{S}$ nach (16). Daher sei im Folgenden ohne Einschränkung T abgeschlossen.

(a) folgt aus (24)(b), (27)(c). — Zu (b), (c) sei U die Cayley Transformierte von T. Nach (27)(b) ist U ist isometrisch und fixpunktfrei. Zunächst seien n_+ und n_- positiv. Damit existieren $x_\pm \in H_\pm$ mit $\|x_\pm\| = 1$. Dann definiert $\tilde{U}x_+ := x_-$ und $\tilde{U}|\mathcal{D}(U) := U$ eine echte isometrische Fortsetzung $\tilde{U}$ von U. Sie ist fixpunktfrei, denn U ist fixpunktfrei und $\overline{\mathcal{R}(I-U)} = \overline{\mathcal{D}(T)} = H$ nach (27)(b), weshalb $\overline{\mathcal{R}(I-\tilde{U})} = H$ und somit $\tilde{U}$ fixpunktfrei nach (26)(b). Falls $n_+ = 0$ oder $n_- = 0$ gilt, kann es keine echte isometrische Fortsetzung $\tilde{U}$ von U geben. Seien nun $n_+ = n_- > 0$. Weil H_+ isomorph zu H_- ist, existiert eine unitäre Fortsetzung $\tilde{U}$ von U. Diese ist fixpunktfrei nach (27)(b), (26)(b).

Mit (28) ist damit (b) klar und (c) folgt wegen (27)(c). □

(33) Beispiel Rechtsverschiebung. Seien $H = \ell^2$, (e_n) die Standardbasis und V die durch $Ve_n := e_{n+1}$ bestimmte Rechtsverschiebung. Diese ist offensichtlich eine Isometrie und auch fixpunktfrei. Denn aus $Vx = x$ folgt $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_{n+1} = \sum_{n=2}^\infty \alpha_{n-1} e_n$, weshalb $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ für alle $n \geqslant 2$. Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2$ folgt daraus $\alpha_n = 0 \ \forall\, n$, was $x = 0$ bedeutet.

Damit ist V die Cayley Transformierte eines symmetrischen Operator T. Da $V \in \mathcal{L}(H)$ ist $V = \overline{V}$ und folglich $T = \overline{T}$. Weiter sind $n_+(T) = \dim \mathcal{D}(V)^\perp = 0$, $n_-(T) = \dim \mathcal{R}(V)^\perp = \dim \mathbb{C}e_1 = 1$. Wir zeigen anschließend, dass T dicht definiert ist. Damit ist T nach (32)(b) maximal symmetrisch aber nicht selbstadjungiert.

Weil $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(I-V)$ und $\overline{\mathcal{R}(I-V)} = \mathcal{N}(I-V^*)^\perp$, betrachte man $x \in \mathcal{N}(I-V^*)$. Dafür ist $x = V^*x$ und somit $Vx = VV^*x$. Weil VV^* die orthogonale Projektion auf $\mathcal{R}(V)$ ist und $\|x\| = \|Vx\| = \|VV^*x\|$, folgt $Vx = x$. Weil V fixpunktfrei ist, ist $x = 0$.

Aufgabe 46 Bestimme die Cayley Rücktransformierte der Rechtsverschiebung V aus dem Beispiel in (33).

(34) Alle abgeschlossenen symmetrischen Fortsetzungen. *Sei T ein dicht definierter abgeschlossener symmetrischer Operator. Zwischen der Menge der partiellen Isometrien von H_+ in H_- und der Menge der abgeschlossenen symmetrischen Fortsetzungen von T besteht die Bijektion $W \mapsto T_W$ mit*

$$\mathcal{D}(T_W) := \left\{ x + (I-W)\,y : x \in \mathcal{D}(T)\,, y \in \mathcal{N}(W)^\perp \right\},$$

$$T_W(x + (I-W)\,y) := Tx + i\,(I+W)\,y.$$

Falls $\dim \mathcal{N}(W)^\perp < \infty$ *ist, so sind* $n_\pm(T_W) = n_\pm(T) - \dim \mathcal{N}(W)^\perp$.

Beweis. Nach (31) ist $H = \mathcal{D}(U) \bigoplus H_+ = \mathcal{R}(U) \bigoplus H_-$. Nun setzt man U isometrisch fort durch $\mathcal{D}(U_W) := \mathcal{D}(U) \bigoplus \mathcal{N}(W)^\perp$, $U_W(z+y) = Uz + Wy$. Nach (27)(b) sind $(I - U_W)(z+y) \in \mathcal{D}(T_W)$ und $x := (I-U)z \in \mathcal{D}(T)$, und es gilt $(I-U_W)(z+y) = z+y-Uz-Wy = (I-U)z+(I-W)y = x+(I-W)y$. Es bleibt, darauf die Umkehrformel für T und T_W aus (27)(b) anzuwenden. □

Aufgabe 47 Bestimme alle selbstadjungierten Fortsetzungen von T_3 aus Beispiel (3.13)

Normale Operatoren

(35) Normalität. Ein dicht definierter Operator T heißt normal, wenn $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt.

(36) Äquivalente Eigenschaft. *Ein dicht definierter Operator T ist genau dann normal, wenn T abgeschlossen ist und $TT^* = T^*T$ gilt.*

Beweis. Sei T ist normal. Dann ist $\mathcal{G}(T) \to \mathcal{G}(T^*)$, $(x, Tx) \mapsto (x, T^*x)$ eine Isomorphie. Weil T^* abgeschlossen ist nach (16), erhält man mit (21): $\mathcal{G}(T^*) = \overline{\mathcal{G}(T^*)} \Rightarrow \mathcal{G}(T) = \overline{\mathcal{G}(T)} \Rightarrow T = \overline{T} \Rightarrow T = T^{**}$. Setze $D := \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$. Weil $\langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle \ \forall\, x \in D$, folgt $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle \ \forall\, x, y \in D$. Damit ergibt sich für $y \in D$ und $x \in \mathcal{D}(T^*T)$, dass $\langle T^*x, T^*y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle$, weshalb $T^*x \in \mathcal{D}(T^{**}) = D$ und somit $x \in \mathcal{D}(TT^*)$. Daher ist $\mathcal{D}(T^*T) \subset \mathcal{D}(TT^*)$ und $\langle T^*x, T^*y\rangle = \langle TT^*x, y\rangle$, weshalb $T^*T \subset TT^*$. Ebenso folgt $TT^* \subset T^*T$.

Umgekehrt sei nun $T = \overline{T}$ und $TT^* = T^*T$. Für $x \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(TT^*)$ folgt $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle x, TT^*x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$. Nach (22)(d) gilt für die Restriktion $T' := T|\mathcal{D}(T^*T)$, dass $\overline{\mathcal{G}(T')} = \mathcal{G}(T)$ ist. Damit existiert zu $(x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$ eine Folge $(x_n, Tx_n) \in \mathcal{G}(T')$ mit $(x_n, Tx_n) \to (x, Tx)$. Wegen $\|Tx_n - Tx_m\| = \|T^*x_n - T^*x_m\|$ ist (T^*x_n) eine Cauchy Folge, die daher gegen ein $y \in H$ konvergiert. Weil T^* abgeschlossen ist, ist $x \in \mathcal{D}(T^*)$ und $y = T^*x$, woraus $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ und $\|Tx\| = \lim \|Tx_n\| = \lim \|T^*x_n\| = \|T^*x\|$ folgen. — Weil $T^{**} = \overline{T} = T$, liegen die Voraussetzungen an T ebenso für T^* vor, weshalb auch $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$ gilt. □

4 Integral bezüglich eines PV-Maßes

Integral für unbeschränkte Funktionen

(1) Definition. Seien $(Z, \mathcal{A})$ ein Messraum, E ein PV-Maß auf Z in H und $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar. Das **Integral** $\int f \mathrm{d}E$ von f bez. E ist eine Abbildung von

$$\mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right) := \left\{x \in H : \int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x < \infty\right\}$$

in H mit der in (2.9) definierten Wirkung $\left(\int f \mathrm{d}E\right) x$. — Hier sei an die **Verabredung** (2.10) erinnert. Zur messbaren Funktion f wird eine Folge (u_n) elementarer Abbildungen derart gewählt, dass $u_n \to f$ punktweise und $|u_n| \leq 2\,|f|$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt insbesondere $\int |u_n - f|^2 \, \mathrm{d}E_x \to 0 \;\forall\, x \in \mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$, woraus $\left(\int f \mathrm{d}E\right) x = \lim\limits_n \left(\int u_n \mathrm{d}E\right) x$ folgt.

(2) Eigenschaften 1. *Seien $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar und E ein PV-Maß auf Z in H. Für $c \geqslant 0$ sei $\Delta_c := \{z \in Z : |f(z)| \leqslant c\}$. Dann gelten die Aussagen* (a)–(i).

(a) *$\mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ ist ein dichter Untervektorraum und $\int f \mathrm{d}E$ ist linear. Für $x \in H$ ist $E(\Delta_c)\, x \in \mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ und $\left(\int f \mathrm{d}E\right) E(\Delta_c)\, x = \left(\int f 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E\right) x$ (siehe* (2.11-a)*). Für $x \in \mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ ist $\lim_{c\to\infty} \left(\int f \mathrm{d}E\right) E(\Delta_c)\, x = \left(\int f \mathrm{d}E\right) x$.*

(b) *Für $x, y \in \mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ ist $\left\langle x, \left(\int f \mathrm{d}E\right) y\right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\zeta^4=1} \zeta \int f \mathrm{d}E_{\zeta x+y}$, speziell $\left\langle x, \left(\int f \mathrm{d}E\right) x\right\rangle = \int f \mathrm{d}E_x$, und $\left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x$.*

(c) *$\int f \mathrm{d}E$ ist normal und $\left(\int f \mathrm{d}E\right)^* = \int \overline{f} \mathrm{d}E$.*

(d) *Sei $g : Z \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $\int f \mathrm{d}E = \int g \, \mathrm{d}E$ genau dann, wenn $E(\{f \neq g\}) = 0$.*

(e) *Es ist $\mathcal{N}\left(\int f \mathrm{d}E\right) = \mathcal{R}\left(E(\{z \in Z : f(z) = 0\})\right)$. Ist $\int f \mathrm{d}E$ injektiv, dann ist der inverse Operator $\left(\int f \mathrm{d}E\right)^{-1} = \int \frac{1}{f} \, \mathrm{d}E$.*

(f) *$\int f \mathrm{d}E$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $E(\{z \in Z : f(z) \notin \mathbb{R}\}) = 0$.*
$\int f \mathrm{d}E$ ist genau dann unitär, wenn $E(\{z \in Z : |f(z)| \neq 1\}) = 0$.

(g) *$\int f \mathrm{d}E$ beschränkt $\Leftrightarrow \|f\|_{E,\infty} < \infty \Leftrightarrow \mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right) = H$.*

(h) *$1_\Delta E_x = E_{E(\Delta)x} \;\forall\, \Delta \in \mathcal{A}, \forall\, x \in H$.*
$E(\Delta) \left(\int f \mathrm{d}E\right) \subset \left(\int f \mathrm{d}E\right) E(\Delta) = \int f 1_\Delta \mathrm{d}E$.

(i) $\int f \mathrm{d}E \geqslant 0 \iff E\left(\{z \in Z : f(z) \notin [0,\infty[\}\right) = 0.$

Beweis. Sei $D_f := \mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$.

(a) Da $E_{\alpha x} = |\alpha|^2 E_x$, $E_{x+y} \leqslant 2E_x + 2E_y$ ist D_f ein Untervektorraum. Da $\int u_n \,\mathrm{d}E$ linear ist für jedes n, ist auch $\int f \,\mathrm{d}E$ linear. — Für $x \in H$ sei $x_c := E\left(\Delta_c\right) x$. Sei (s_n) eine Folge von Elementarfunktionen mit $s_n \uparrow |f|$. Mit monotoner Konvergenz folgt $\int s_n^2 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E_x \to \int |f|^2 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E_x \leqslant c^2 \|x\|^2 < \infty$. Nach (2.7-b), (2.7-d) ist $\int s_n^2 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E_x = \left\|\left(\int s_n 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \left\|\left(\int s_n \mathrm{d}E\right)\left(\int 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \left\|\left(\int s_n \mathrm{d}E\right) x_c\right\|^2 = \int s_n^2 \mathrm{d}E_{x_c}$, was monoton gegen $\int |f|^2 \,\mathrm{d}E_{x_c}$ konvergiert. Damit ist $x_c \in D_f$. Für $x \in H$ ist daher $x_N = E\left(\Delta_N\right) x \in D_f$ mit $x_N \to x$. Das zeigt $\overline{D}_f = H$. Mit (2.7-d) ist $\left(\int f \mathrm{d}E\right) E\left(\Delta_c\right) x = \lim_n \left(\int u_n \mathrm{d}E\right) E\left(\Delta_c\right) x = \lim_n \left(\int u_n 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E\right) x = \left(\int f 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E\right) x$. — Für $x \in D_f$ ist $\|\left(\int f \,\mathrm{d}E\right) E(\Delta_c)x - \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x\|^2 = \lim_n \|\left(\int f 1_{\Delta_c} \mathrm{d}E\right) x - \left(\int u_n \,\mathrm{d}E\right) x\|^2$. Mit (2.11-b) ergibt dies $\lim_n \|\left(\int (f 1_{\Delta_c} - u_n)\, dE\right) x\|^2 = \lim_n \int |f 1_{\Delta_c} - u_n|^2 \,dE_x = \int |f 1_{\Delta_c} - f|^2 \,dE_x$, was für $c \to \infty$ verschwindet.

(b) Zunächst gilt $\left\langle x, \left(\int u_n \mathrm{d}E\right) y\right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\zeta^4=1} \zeta \int u_n \mathrm{d}E_{\zeta x + y}$ nach (2.7-a). Weil $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int 1 \mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \left(\int |f|^2 \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} < \infty$ für ein endliches Maß μ, erfolgt der Grenzübergang mit majorisierter Konvergenz. — Nach Definition gilt $\left\|\left(\int u_n \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 \to \left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right) x\right\|^2$. Nach (2.7-b) ist außerdem $\left\|\left(\int u_n \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \int |u_n|^2 \,\mathrm{d}E_x \to \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x$.

(c) Offenbar ist $D := D_f = D_{\overline{f}}$. Für alle $x, y \in D$ gilt $\left\langle x, \left(\int f \mathrm{d}E\right) y\right\rangle = \lim_n \left\langle x, \left(\int u_n \mathrm{d}E\right) y\right\rangle = \lim_n \left\langle \left(\int \overline{u}_n \mathrm{d}E\right) x, y\right\rangle = \left\langle \left(\int \overline{f} \mathrm{d}E\right) x, y\right\rangle$, weshalb $\int \overline{f} \mathrm{d}E \subset \left(\int f \mathrm{d}E\right)^*$. — Sei jetzt $x \in \mathcal{D}\left(\left(\int f \mathrm{d}E\right)^*\right)$. Setze $x^* := \left(\int f \mathrm{d}E\right)^* x$. Für $y \in H$ ist $E\left(\Delta_N\right) y \in D$ nach (a). Damit ist $\langle E(\Delta_N) x^*, y\rangle = \langle x^*, E(\Delta_N) y\rangle = \langle x, \left(\int f \,\mathrm{d}E\right) E(\Delta_N) y\rangle = \langle x, \left(\int f 1_{\Delta_N} dE\right) y\rangle = \langle \left(\int \overline{f} 1_{\Delta_N} dE\right) x, y\rangle$ nach (a) und (2.11-c). Daher ist $E(\Delta_N) x^* = \left(\int \overline{f} 1_{\Delta_N} dE\right) x$. Mit (2.11-b) und monotoner Konvergenz folgt daraus $\|x^*\|^2 \geq \int \left|\overline{f} 1_{\Delta_N}\right|^2 dE_x \to \int |f|^2 dE_x$, weshalb $x \in D$. Also ist $\left(\int f \mathrm{d}E\right)^* = \int \overline{f} \mathrm{d}E$. — Schließlich ist $\int f \, dE$ normal, weil $D_f = D_{\overline{f}}$ und $\|\left(\int \overline{f} \,\mathrm{d}E\right) x\|^2 = \int |\overline{f}|^2 dE_x = \int |f|^2 dE_x = \|\left(\int f \,\mathrm{d}E\right) x\|^2$.

(d) Sei $\int f \mathrm{d}E = \int g \,\mathrm{d}E$. Setze $\Gamma := \{f \neq g\}$, $\Gamma_N := \Gamma \cap \{|f| \leqslant N, |g| \leqslant N\}$. Da $\Gamma_N \uparrow \Gamma$, genügt es $E\left(\Gamma_N\right) = 0 \;\forall\; N$ zu zeigen. Aus (a) folgt $\mathcal{R}\left(E\left(\Gamma_N\right)\right) \subset D_f = D_g$ und weiter $\left(\int f 1_{\Gamma_N} \mathrm{d}E\right) x = \left(\int f \mathrm{d}E\right) E\left(\Gamma_N\right) x = \left(\int g \,\mathrm{d}E\right) E\left(\Gamma_N\right) x = \left(\int g 1_{\Gamma_N} \mathrm{d}E\right) x$ für alle $x \in H$. Somit ist $E\left(\Gamma_N\right) = 0$ nach (2.11-d). — Umgekehrt sei nun $E\left(\{f \neq g\}\right) = 0$. Offenbar ist dann $E_x\left(\{f \neq g\}\right) = 0 \;\forall\, x$ und $D := D_f = D_g$. Mit (b) folgt daraus $\left\langle x, \left(\int f \mathrm{d}E\right) y\right\rangle = \left\langle x, \left(\int g \,\mathrm{d}E\right) y\right\rangle \;\forall\; x, y \in D$, weshalb $\int f \mathrm{d}E = \int g \,\mathrm{d}E$, da $\overline{D} = H$.

(e) Offenbar gilt: $x \in \mathcal{N}\left(\int f \mathrm{d}E\right) \Leftrightarrow 0 = \left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right) x\right\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \Leftrightarrow E_x\left(\{f = 0\}\right) = \|x\|^2 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}\left(E\left(\{f = 0\}\right)\right)$. — Sei nun $\int f \mathrm{d}E$ injektiv. Wie eben gezeigt ist $E\left(\{f = 0\}\right) = 0$. Daher sei o. E. $f\left(z\right) \neq 0 \;\forall\; z \in Z$. Für $\Gamma_n := \{1/n \leqslant |f\left(z\right)| \leqslant n\}$ gilt $E\left(\Gamma_n\right) x \to x$ für $n \to \infty \;\forall\; x \in H$. Aus (a) und (2.11-b) folgen $\left(\int f \mathrm{d}E\right) E\left(\Gamma_n\right) x = \left(\int f 1_{\Gamma_n} \mathrm{d}E\right) x = E\left(\Gamma_n\right) \left(\int f 1_{\Gamma_n} \mathrm{d}E\right) x \in D_{1/f}$ und

$\left(\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}E\right)\left(\int f\mathrm{d}E\right)E(\Gamma_n)\,x = \left(\int \frac{1}{f}1_{\Gamma_n}\mathrm{d}E\right)\left(\int f1_{\Gamma_n}\mathrm{d}E\right)x = \left(\int \frac{1}{f}1_{\Gamma_n}f\mathrm{d}E\right)x = \left(\int 1_{\Gamma_n}\mathrm{d}E\right)x = E(\Gamma_n)\,x \to x\ \forall\ x \in H$. Setze $y_n := \left(\int f\mathrm{d}E\right)E(\Gamma_n)\,x$. Sei nun $x \in D_f$. Dann gilt $y_n \to \left(\int f\mathrm{d}E\right)x$ nach (a). Wie oben gezeigt gilt außerdem $\left(\int \frac{1}{f}\mathrm{d}E\right)y_n \to x$. Weiter ist $\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}E$ abgeschlossen, da normal nach (c). Daher folgt $\left(\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}E\right)y_n \to \left(\int \frac{1}{f}\,\mathrm{d}E\right)\left(\int f\mathrm{d}E\right)x = x$ für alle $x \in D_f$. Zusammen mit diesem Ergebnis für $\frac{1}{f}$ anstelle von f ergibt sich die Behauptung.

(f) Die Aussagen folgen aus (c) und (d) bzw. (c), (e) und (d).

(g) Sei $\int f\mathrm{d}E$ beschränkt. Aus $\overline{D}_f = H$ und $\int f\mathrm{d}E$ abgeschlossen folgt $D_f = H$. Weiter sei $\Gamma_N := \{|f| > N\}$. Für $x \in \mathcal{R}(E(\Gamma_N))$ gelten $\int |f|^2\,\mathrm{d}E_x = \left\|\left(\int f\mathrm{d}E\right)x\right\|^2 \leqslant \left\|\int f\mathrm{d}E\right\|^2 \|x\|^2$ und $\int |f|^2\,\mathrm{d}E_x > N^2\int \mathrm{d}E_x = N^2\,\|x\|^2$ nach (b), weil $\left(\int f1_{\Delta_N}\mathrm{d}E\right)x = 0$ nach (a). Für $N \geq \left\|\int f\mathrm{d}E\right\|$ ist daher $x = 0$. Das bedeutet $E(\Gamma_N) = 0$ und f somit E–essentiell beschränkt. — Wenn f E–essentiell beschränkt ist, ist $\int f dE$ beschränkt nach (d) und (2.11-a). — Sei $D_f = H$. Weil $\int f\mathrm{d}E$ abgeschlossen ist, ist $\int f\mathrm{d}E$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen beschränkt.

(h) Für $x \in H$ und $\Delta, \Gamma \in \mathcal{A}$ ist $(1_\Delta E_x)(\Gamma) = \int 1_\Gamma\,\mathrm{d}1_\Delta E_x = \int 1_\Gamma 1_\Delta \mathrm{d}E_x = E_x(\Gamma \cap \Delta) = E_{E(\Delta)x}(\Gamma)$. Also ist $1_\Delta E_x = E_{E(\Delta)x}$. Damit folgt: $x \in D_{1_\Delta f} \Leftrightarrow \infty > \int |1_\Delta f|^2\,\mathrm{d}E_x = \int |f|^2\,\mathrm{d}1_\Delta E_x = \int |f|^2\,\mathrm{d}E_{E(\Delta)x} \Leftrightarrow E(\Delta)\,x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}\left(\left(\int f\mathrm{d}E\right)E(\Delta)\right)$. Für $x \in D_{1_\Delta f} = \mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E\right)E(\Delta)$ gilt: $\left(\int f1_\Delta\mathrm{d}E\right)x \leftarrow \left(\int u_n 1_\Delta\mathrm{d}E\right)x = \left(\int u_n\mathrm{d}E\right)E(\Delta)\,x \to \left(\int f\mathrm{d}E\right)E(\Delta)\,x$. Ist sogar $x \in D_f$, dann $\left(\int u_n 1_\Delta\mathrm{d}E\right)x = E(\Delta)\left(\int u_n\mathrm{d}E\right)x \to E(\Delta)\left(\int f\mathrm{d}E\right)x$.

(i) Sei $T := \int f\mathrm{d}E \geqslant 0$, d.h. $\langle x, Tx\rangle \geqslant 0\ \forall\ x \in D_f$. Dann folgt: $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \Rightarrow \langle T^*x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \Rightarrow \langle (T^* - T)\,x, x\rangle = 0\ \forall\ x \in D_f$. Mit der Polaridentität folgt $\langle (T^* - T)\,x, y\rangle = 0\ \forall\ x, y \in D_f$. Da $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ nach (c) folgt daraus $T = T^*$. Wegen (f) sei f o.E. reellwertig. Sei $\Gamma := \{f < 0\}$ und $x \in D_f$. Nach (b) ist $0 \leqslant \langle x, Tx\rangle = \int f\mathrm{d}E_x$ und nach (h) gilt $E(\Gamma)\,x \in D_f$ und $0 \leqslant \langle E(\Gamma)\,x, T\,E(\Gamma)\,x\rangle = \int f\mathrm{d}E_{E(\Gamma)x} = \int f\mathrm{d}\,(1_\Gamma E_x) = \int f1_\Gamma\mathrm{d}E_x$, wobei $f1_\Gamma < 0$ für $z \in \Gamma$ ist. Damit ist $E_x(\Gamma) = 0$ für alle $x \in D_f$, also $E(\Gamma) = 0$.— Die Umkehrung folgt mit (d) und (b). □

(3) Eigenschaften 2. *Seien $f, g : Z \to \mathbb{C}$ messbar. Dann gelten*

(a) $\int f\mathrm{d}E + \int g\,\mathrm{d}E \subset \int (f+g)\,\mathrm{d}E$ *und* $\mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E + \int g\,\mathrm{d}E\right) = \mathcal{D}\left(\int g\,\mathrm{d}E\right) \cap \mathcal{D}\left(\int (f+g)\,\mathrm{d}E\right)$.

(b) $\int \alpha f\mathrm{d}E = \alpha \int f\mathrm{d}E$ *für alle* $\alpha \neq 0$.

(c) $E_{(\int g\,\mathrm{d}E)x} = |g|^2 E_x\ \forall\ x \in \mathcal{D}\left(\int g\,\mathrm{d}E\right)$.
$\int f\mathrm{d}E \int g\,\mathrm{d}E \subset \int fg\,\mathrm{d}E$ *und* $\mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E \int g\,\mathrm{d}E\right) = \mathcal{D}\left(\int g\,\mathrm{d}E\right) \cap \mathcal{D}\left(\int fg\,\mathrm{d}E\right)$.
Ist g beschränkt, dann gilt insbesondere $\int f\mathrm{d}E \int g\,\mathrm{d}E = \int fg\,\mathrm{d}E$.

(d) $\int \overline{f}\,\mathrm{d}E \int f\,\mathrm{d}E = \int |f|^2\,\mathrm{d}E$.

Ist $\int f\mathrm{d}E \geqslant 0$ (siehe (2)(i)), dann gilt insbesondere $\left(\int \sqrt{f}\mathrm{d}E\right)^2 = \int f\mathrm{d}E$. Folglich existiert eine positive Wurzel von $\int f\mathrm{d}E$.

Beweis. (a) Für $x \in \mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E + \int g\mathrm{d}E\right) = D_f \cap D_g$ sind $\int |f|^2 \mathrm{d}E_x < \infty$ und $\int |g|^2 \mathrm{d}E_x < \infty$. Weil $|f+g|^2 \leqslant 2|f|^2 + 2|g|^2$, folgt daraus $D_f \cap D_g \subset D_{f+g}$. Daher gilt auch $D_{f+g} \cap D_g \subset D_{(f+g)-g} = D_f$. Hieraus folgt $D_f \cap D_g \subset D_{f+g} \cap D_g \subset D_f$, weshalb $D_f \cap D_g = D_{f+g} \cap D_g$. — Für $x \in D_f \cap D_g$ folgt $\int |(u_n+v_n)-(f+g)|^2 \mathrm{d}E_x \to 0$ mit majorisierter Konvergenz wegen $|(u_n+v_n)-(f+g)|^2 \leqslant 2|u_n - f|^2 + 2|v_n - f|^2$. Die restliche Behauptung folgt daher wegen (2.7-c).

(b) gilt offensichtlich.

(c) Offenbar gilt: $x \in \mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E \int g\,\mathrm{d}E\right) \Leftrightarrow x \in D_g$, $\left(\int g\,\mathrm{d}E\right)x \in D_f \Leftrightarrow \int |g|^2 \mathrm{d}E_x < \infty$, $\int |f|^2 \mathrm{d}E_{(\int g\,\mathrm{d}E)x} < \infty$. Sei $\Delta \in \mathcal{A}$. Wegen (2)(h),(b) gilt weiter $E_{(\int g\,\mathrm{d}E)x}(\Delta) = \left\|E(\Delta)\left(\int g\,\mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \left\|\left(\int g 1_\Delta \mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \int |g1_\Delta|^2 dE_x = \left(|g|^2 E_x\right)(\Delta)$. Das zeigt $E_{(\int g\mathrm{d}E)x} = |g|^2 E_x$. Als Folge ist $\int |f|^2 \mathrm{d}E_{(\int g\mathrm{d}E)x} = \int |f|^2 |g|^2 \mathrm{d}E_x$. Insgesamt ergibt sich $\mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E \int g\,dE\right) = D_g \cap D_{fg}$. — Sei nun $x \in \mathcal{D}\left(\int f\mathrm{d}E \int g\,\mathrm{d}E\right)$. Nach (2.7-d) und (2)(h) ist $\left(\int u_n \mathrm{d}E\right)\left(\int v_m \mathrm{d}E\right) = \left(\int u_n v_m \mathrm{d}E\right)$ mit Grenzwert $\int u_n \mathrm{d}E\left(\int g\,\mathrm{d}E\right)x = \left(\int u_n g\,\mathrm{d}E\right)x$ für $m \to \infty$. Die linke Seite strebt für $n \to \infty$ gegen $\int f dE\left(\int g\,\mathrm{d}E\right)x$. Für die rechte Seite gilt $\left\|\left(\int u_n g\,\mathrm{d}E\right)x - \left(\int fg\,\mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \left\|\left(\int (u_n g - fg)\,\mathrm{d}E\right)x\right\|^2 = \int |u_n g - fg|^2 \mathrm{d}E_x$, was mit majorisierter Konvergenz gegen Null strebt.

(d) Sei $T := \int f\mathrm{d}E$. Dann ist $T^* = \int \overline{f}\mathrm{d}E$ nach (2)(c). Nach (3.22-c) ist T^*T selbstadjungiert. Weiter ist $S := \int |f|^2 \mathrm{d}E$ selbstadjungiert nach (2)(f) und $T^*T \subset S$ nach (c). Damit ist $T^*T = S$, weil ein selbstadjungierter Operator keine echte selbstadjungierte Fortsetzung besitzt. □

Aussagen zum Spektrum

(4) Spektrum. Sei T ein Operator in H. Die Resolventenmenge von T ist

$$\rho(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injektiv, } R(T-\lambda I) = H \text{ und } (T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\right\}$$

und das Spektrum von T ist $\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$.

(5) Beispiel. Sei T ein dicht definierter abgeschlossener Operator in H. Dann ist $-1 \in \rho(T^*T)$ nach (3.22).

Wir erinnern an den Begriff des Trägers $\operatorname{supp}\mu$ eines Maßes μ auf der σ–Algebra der Borelmengen eines topologischen Raums. Der Träger ist das Komplement der Vereinigung aller offenen μ–Nullmengen. Ebenso ist der Träger eines PV–Maßes definiert.

(6) Essentieller Wertebereich. Seien E ein PV-Maß, $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar und $f(E)$ das Bild–PV–Maß. Der essentielle Wertebereich $\operatorname{ess} f(Z)$ von f ist der Träger von $f(E)$, d.h. $\operatorname{ess} f(Z) := \mathbb{C} \setminus \bigcup \left\{ U \subset \mathbb{C} : U \text{ offen}, \ E\left(f^{-1}(U)\right) = 0 \right\}$.

$\mathbb{C} \setminus \operatorname{ess} f(Z)$ ist die größte offene Nullmenge bezüglich $f(E)$, denn $\mathbb{C}$ hat eine abzählbare Basis der Topologie und somit ist die obige Vereinigung eine abzählbare Vereinigung von offenen $f(E)$–Nullmengen.

Damit ist $\operatorname{ess} f(Z)$ die kleinste abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{C}$ derart, dass es eine E–Nullmenge Δ gibt mit $f(Z \setminus \Delta) \subset C$. Diese Beschreibung erklärt die Bezeichnung essentieller Wertebereich.

Die Elemente von $\operatorname{ess} f(Z)$ lassen sich offenbar auch so charakterisieren:

$$\lambda \in \operatorname{ess} f(Z) \ \Leftrightarrow \ E\left(\{z \in \mathbb{C} : |f(z) - \lambda| < \delta\}\right) \neq 0 \ \forall\, \delta > 0$$

(7) Essentieller Wertebereich und Spektrum. *Sei E ein PV-Maß und seien $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gelten*

(a) $f(E)(\{\lambda\}) \neq 0 \iff \int f \mathrm{d}E - \lambda I$ *nicht injektiv.*

(b) *Sei $\lambda \in \operatorname{ess} f(Z)$ mit $f(E)(\{\lambda\}) = 0$. Dann ist $\int f \mathrm{d}E - \lambda I$ injektiv und $\mathcal{R}\left(\int f \mathrm{d}E - \lambda I\right)$ ist dicht, aber ungleich H. Weiter ist $\left(\int f \mathrm{d}E - \lambda I\right)^{-1}$ nicht beschränkt und es existiert eine Folge (x_n) in $\mathcal{D}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right) x_n - \lambda x_n\right\| \to 0$.* Die Folge (x_n) heißt **approximativer Eigenvektor** zum Spektralwert λ.

(c) $\sigma\left(\int f \mathrm{d}E\right) = \operatorname{ess} f(Z) = \operatorname{supp} f(E)$.

Beweis. Wir können offenbar stets o.E. $\lambda = 0$ annehmen. — (a) folgt aus (2)(e).

(b) Es ist $E\left(\Delta_{1/n}\right) \neq 0$, da $0 \in \operatorname{ess} f(z)$. Sei $x_n \in \mathcal{R}\left(E\left(\Delta_{1/n}\right)\right)$ mit $\|x_n\| = 1$. Nach (2)(a) ist $\left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right) x_n\right\|^2 = \left\|\left(\int f 1_{\Delta_{1/n}} \mathrm{d}E\right) x_n\right\|^2 = \int_{\Delta_{1/n}} |f|^2 \mathrm{d}E_{x_n} \leqslant n^{-2} \|x_n\|^2 = n^{-2}$. — Der Operator $\int f \mathrm{d}E$ ist injektiv nach (a). Weiter ist $\left(\int f \mathrm{d}E\right)^{-1}$ nicht beschränkt, denn mit $y_n := \left(\int f \mathrm{d}E\right) x_n$ folgt sonst der Widerspruch $1 = \|x_n\| = \left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right)^{-1} y_n\right\| \leqslant C \|y_n\| \to 0$. Nach (2)(e) ist $\left(\int f \mathrm{d}E\right)^{-1} = \int \frac{1}{f} \mathrm{d}E$, weshalb $\mathcal{D}\left(\int \frac{1}{f} \mathrm{d}E\right) = \mathcal{R}\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ nach (2)(a) dicht ist aber nach (2)(g) ungleich H ist.

(c) Aus (a) und (b) folgt, dass $\operatorname{ess} f(Z) \subset \sigma\left(\int f \mathrm{d}E\right)$. Sei nun o.E. $0 \notin \operatorname{ess} f(Z)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $E(\Gamma) = 0$ für $\Gamma := \{|f(z)| < \varepsilon\}$. Damit ist $\frac{1}{f}$ E–essentiell beschränkt und folglich $0 \in \rho\left(\int f \mathrm{d}E\right)$ wegen (2)(e),(g). $\square$

5 Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren

Wurzel positiver Operatoren

Sei T ein Operator in H. Wir erinnern, dass definitionsgemäß T positiv ist, was mit $T \geq 0$ bezeichnet wird, wenn $\langle x, Tx \rangle \geqslant 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$. — Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Ist $T \geqslant 0$, dann ist T auch selbstadjungiert, denn aus $\langle x, Tx \rangle \geqslant 0$ folgt $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle$, weshalb $\langle T^*x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle$ für alle x und woraus mit der Polaridentität $T^* = T$ folgt. Damit läßt sich auf T der Spektralsatz (2.16) anwenden. Danach ist $T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E$. Aus (4.2)(i) und (4.7)(c) folgt, dass $T \geq 0$ genau dann, wenn $\sigma(T) \subset [0, \infty[$. Weiter gilt nach (4.3)(d), dass $R := \int \sqrt{\mathrm{id}}\, \mathrm{d}E$ positiv mit $R^2 = T$ ist. Man beachte, dass $E(\mathbb{C} \setminus [0, \infty[) = 0$ ist. Mit (3.22)(c) schließen wir daher, dass $T \geq 0$ genau dann, wenn $R \in \mathcal{L}(H)$ mit $T = R^*R$ existiert, d.h. dass T gemäß (1.32) positiv ist als Element der Algebra mit Involution $\mathcal{L}(H)$.

(1) Wurzel beschränkter positiver Operatoren. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ positiv. Dann existiert genau ein positiver Operator $R \in \mathcal{L}(H)$ mit $R^2 = T$. Es ist $R = \int \sqrt{\mathrm{id}}\, \mathrm{d}E$, wobei E das Spektralmaß von T ist.*

Beweis. Die Existenz der Wurzel wurde gerade gezeigt. — Zur Eindeutigkeit sei $S \in \mathcal{L}(H)$ positiv mit $S^2 = T$ eine weitere Wurzel. Dafür folgt $ST = SS^2 = S^2S = TS$. Man betrachte die von den kommutierenden selbstadjungierten Elementen S, T erzeugte Unter-C^*-Algebra A von $\mathcal{L}(H)$. Sie ist kommutativ und enthält $C^*(T)$. Außerdem ist $R \in A$, da $R \in C^*(T)$ nach dem Funktionenkalkül. Nun wende man die Gelfandstransformation (1.37) auf A an. Danach ist $\hat{T} = \widehat{S^2} = \hat{S}^2$, wobei $\hat{S} \geqslant 0$ nach (1.25)(b), weil $\sigma(S) \subset [0, \infty[$. Das Gleiche gilt für $\hat{R}$. Aus $\hat{S}^2 = \hat{R}^2$ folgt daher $\hat{S} = \hat{R}$ und damit $S = R$. □

Auf dem Weg zum Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren ist das nächste Ziel der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der positiven Wurzel eines unbeschränkten positiven selbstadjungierten Operators.

Die Abbildung $k : [0, \infty[\to [0, 1[\,,\ k(x) := \frac{x}{1+x}$ ist eine Bijektion. Ihre Umkehrabbildung lautet $\kappa : [0, 1[\to [0, \infty[\,,\ \kappa(x) := \frac{x}{1-x}$.

(2) Die κ–Transformation 1.

(a) *Sei T ein positiver selbstadjungierter Operator in H. Dann definiert $S := T\,(I+T)^{-1} = I-(I+T)^{-1}$ einen positiven Operator in $\mathcal{L}(H)$ mit $\|Sx\| < \|x\|\ \forall\ x \in H\backslash\{0\}$.*

(b) *Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ positiv mit $\|Sx\| < \|x\|\ \forall\ x \in H\backslash\{0\}$. Dann ist $T := (I-S)^{-1}S = S\,(I-S)^{-1}$ positiv und selbstadjungiert und es gilt $T = \int \kappa\,\mathrm{d}F$, wobei F das Spektralmaß von S bezeichnet.*

(c) *Ist T ein positiver selbstadjungierter Operator in H und $S := T\,(I+T)^{-1}$ gemäß* (a)*, dann gilt $T = (I-S)^{-1}S$. Ist $S \in \mathcal{L}(H)$ positiv mit $\|Sx\| < \|x\|\ \forall\ x \in H\backslash\{0\}$ und $T := (I-S)^{-1}S$ gemäß* (b)*, dann gilt $S = T\,(I+T)^{-1}$.*

(d) *Sei T ein positiver selbstadjungierter Operator in H. Dann existiert genau ein PV-Maß E auf $\mathbb{C}$ mit $T = \int \mathrm{id}\ \mathrm{d}E$.*

Beweis. (a) Für $x \in \mathcal{D}(T)$ ist $\|(I+T)\,x\|^2 = \langle x+Tx, x+Tx\rangle = \|x\|^2 + \langle x, Tx\rangle + \langle Tx, x\rangle + \|Tx\|^2 \geqslant \|x\|^2$, weshalb $I+T$ injektiv und $(I+T)^{-1}$ beschränkt ist. Weiter ist $I+T$ selbstadjungiert, weil T selbstadjungiert ist. Nach (3.19)(b) ist $(I+T)^{-1}$ selbstadjungiert. Also ist $(I+T)^{-1}$ beschränkt, dicht definiert und abgeschlossen. Es folgt $\mathcal{D}((I+T)^{-1}) = H$. Damit ist $(I+T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ und selbstadjungiert. Weil $S = T\,(I+T)^{-1} = (I+T-I)\,(I+T)^{-1} = I-(I+T)^{-1}$ ist auch $S \in \mathcal{L}(H)$ und selbstadjungiert. — Sei $x \in H$ und $y := (I+T)^{-1}x$. Dann gilt $\langle x, Sx\rangle = \langle (I+T)\,y, Ty\rangle = \langle y, Ty\rangle + \|Ty\|^2 \geqslant 0$. Also ist $S \geqslant 0$. Weiter gilt $\|x\|^2 = \|(I+T)\,y\|^2 = \|y\|^2 + \langle y, Ty\rangle + \langle Ty, y\rangle + \|Ty\|^2 = \|y\|^2 + 2\,\langle y, Ty\rangle + \|Sx\|^2$. Daraus folgt $\|Sx\| < \|x\|$ für $x \neq 0$.

(b) $I-S$ ist selbstadjungiert, weil S selbstadjungiert ist. Weiter ist $I-S$ injektiv, denn $(I-S)\,x = 0$ impliziert $x = Sx$ und damit $\|x\| = \|Sx\|$, weshalb $x = 0$ wegen der Voraussetzung. Nach (3.19)(b) ist $(I-S)^{-1}$ selbstadjungiert. Nach dem Spektralsatz (2.16) ist $S = \int \mathrm{id}\,\mathrm{d}F$, wobei F das Spektralmaß von S bezeichnet. Daraus folgt $I-S = \int (1-\mathrm{id})\,\mathrm{d}F$ und $(I-S)^{-1} = \int \frac{1}{1-\mathrm{id}}\mathrm{d}F$ nach (4.2)(e). Laut (4.3)(c) ist dann $T = (I-S)^{-1}S = \int \kappa\,\mathrm{d}F$, weil S beschränkt ist. Wegen $\|Sx\| \leqslant \|x\|$ ist $\|S\| \leqslant 1$ und somit $\sigma(S) \subset [0,1]$ nach (2.11)(f), (e) und (4.7)(c). Außerdem ist $E(\{1\}) = 0$ nach (4.2)(e), weil $I-S$ injektiv ist. Folglich ist $\kappa \geqslant 0$ F-fast überall und daher $T \geqslant 0$ nach (4.2)(i).

Aus $T = (I-S)^{-1}S$ folgt $I+T = (I-S)^{-1}S + (I-S)^{-1}(I-S) \subset (I-S)^{-1}(S+I-S) = (I-S)^{-1}$. Nach (a) ist $\mathcal{R}(I+T) = \mathcal{D}((I+T)^{-1}) = H$. Damit folgen $I+T = (I-S)^{-1}$ und $I-S = (I+T)^{-1}$. Das ergibt $S(I-S)^{-1} = (I-(I+T)^{-1})(I+T) = I+T-I = T$.

(c) Weil $S = T\,(I+T)^{-1} = I-(I+T)^{-1}$ nach (a), ist $I-S = (I+T)^{-1}$, womit $(I-S)^{-1} = I+T$ und $(I-S)^{-1}S = (I+T)\left(I-(I+T)^{-1}\right) = T$, weil $\mathcal{R}((I+T)^{-1}) = \mathcal{D}(T)$. — Umgekehrt gilt $T = S\,(I-S)^{-1}$ nach (b), womit

$I+T=(I-S+S)\,(I-S)^{-1}=(I-S)^{-1}$. Also ist $(I+T)^{-1}=I-S$ und $S=I-(I+T)^{-1}$.

(d) Nach (b) und (c) und (2.15) ist $T=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}\kappa(F)$. Zur Eindeutigkeit sei $T=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E$ und setze $S':=\int k\,\mathrm{d}E=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}k(E)$. Man beachte, dass $E(\mathbb{C}\setminus[0,\infty[)=0$ nach (4.2)(i). Weil $0\leqslant k<1$ ist $S'\in\mathcal{L}(H)$, $\|S'\|\leq 1$, und $S'\geqslant 0$ nach (2.11)(e), (4.2)(g), (i). Es folgt auch $\|S'x\|<\|x\|$ für alle $x\neq 0$, denn für $\|S'x\|=\|x\|$ ist $\int k^2\mathrm{d}E_x=\int 1\mathrm{d}E_x$, d.h. $\int\left(1-k^2\right)\mathrm{d}E_x=0$. Da $1-k^2>0$ ist $E_x=0$ und somit $x=0$. Nach (b) folgt $(I-S')^{-1}S'=\int\kappa\,\mathrm{d}k(E)=\int\kappa\circ k\,\mathrm{d}E=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E=T$. Nach (c) folgt schließlich $S=S'$ und somit $k\,(E)=F$, d.h. $E=\kappa\,(F)$. □

Die Aussagen (a)–(c) des vorangegangenen Lemmas besagen, dass

$$\{T:\,T\geq 0,\,T=T^*\}\to\{S\,:S\geq 0,\|Sx\|<\|x\|\;\forall\,x\neq 0\},\;T\mapsto T\,(I+T)^{-1}$$

eine Bijektion mit der Umkehrabbildung $S\mapsto(I-S)^{-1}\,S$ ist. Die Aussage (d) erweitert den Spektralsatz auf unbeschränkte selbstadjungierte positive Operatoren. Dieses Ergebnis erhält man auch in ähnlicher Weise unter Verwendung der Cayley Transformation anstelle der κ–Transformation.

(3) Wurzel unbeschränkter positiver Operatoren. *Sei T positiv und selbstadjungiert. Dann existiert genau ein positiver selbstadjungierter Operator R mit $R^2=T$.*

Beweis. Nach (2)(d) ist $T=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E$, wobei $\mathrm{id}\geqslant 0$ E-fast überall nach (4.2)(i). Dann ist $R:=\int w\,\mathrm{d}E=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}w(E)$ mit $w\,(x):=\sqrt{x}$ eine Wurzel von T nach (4.3)(d). — Sei nun R eine Wurzel von T. Nach dem Spektralsatz (2)(d) gibt es ein PV–Maß F derart, dass $R=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}F$. Nach (4.3)(d) ist $T=R^2=\int q\,\mathrm{d}F=\int \mathrm{id}\,\mathrm{d}q(F)$ mit $q\,(x):=x^2$. Nach (2)(d) ist daher $q(F)=E$. Weil nach (4.2)(i) $\mathrm{id}\geqslant 0$ auch F-fast überall, folgt daraus $F=w(E)$. □

Sei T ein selbstadjungierter Operator in H. Wie im beschränkten Fall schließt man nun, das $T\geq 0$ genau dann, wenn $\sigma(T)\subset[0,\infty[$ und auch genau dann, wenn es einen dicht definierten abgeschlossenen Operator R gibt mit $T=R^*R$. In der Tat folgt die Existenz von R aus (3), wo R die positive selbstadjungierte Wurzel von T ist.

Polarzerlegung und κ–Transformation

(4) Polarzerlegung abgeschlossener Operatoren. *Sei T dicht definiert und abgeschlossen. Dann gibt es genau einen positiven selbstadjungierten Operator S und eine partielle Isometrie V derart, dass $T=VS$ und $\mathcal{N}\,(V)=\mathcal{R}\,(S)^{\perp}$.*

Beweis. Zur Existenz setze $S := \sqrt{T^*T}$ gemäß (3.22)(c) und (3). Es wird zunächst $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$ gezeigt. Nach (3.22)(d) existiert zu $x \in \mathcal{D}(T)$ eine Folge (x_n) in $\mathcal{D}(T^*T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to Tx$. Weil $\mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(S^2)$, folgt $\|Sx_n - Sx_m\|^2 = \langle S(x_n - x_m), S(x_n - x_m)\rangle = \langle x_n - x_m, S^2(x_n - x_m)\rangle = \langle x_n - x_m, T^*T(x_n - x_m)\rangle = \|Tx_n - Tx_m\|^2 \to 0$ für $n, m \to \infty$. Weil $S = \overline{S}$, folgt $x \in \mathcal{D}(S)$ und $Sx_n \to Sx$, weshalb $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$. Ähnlich folgt $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$. Setze $D := \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$. — Mit einer analogen Rechnung folgt $\|Sx_n\| = \|Tx_n\|$ und somit $\|Sx\| = \|Tx\|$ für alle $x \in D$. Daher ist $\mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(T)$, $Sx \mapsto Tx$ eine wohldefinierte Isometrie V, die sich auf die Abschlüsse $\overline{\mathcal{R}(S)}$ und $\overline{\mathcal{R}(T)}$ fortsetzt. Schließlich setzt man $\mathcal{N}(V) := \mathcal{R}(S)^\perp$.

Zur Eindeutigkeit schließt man mit (3.9)(b), dass $T^* = (VS)^* = S^*V^*$. Daher ist $T^*T = SV^*VS$. Weil V^*V die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathcal{N}(V)^\perp$ ist, folgt $T^*T = S^2$. Damit ist $S = \sqrt{T^*T}$ wegen der Eindeutigkeit der Wurzel nach (3). Also liegt S fest und somit auch V. $\square$

Man schreibt $|T| := \sqrt{T^*T}$ für $T = \overline{T}$ mit $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$. Also ist

$$T = V\,|T|\,,$$

wobei V eine partielle Isometrie mit $\mathcal{N}(V) = \mathcal{R}(|T|)^\perp$ ist. Daraus ergibt sich $T^* = |T|\,V^*$. Ersetzt man hier T durch T^*, erhält man $T = |T^*|\,V^*$.

(5) Polarzerlegung eines normalen Operators. *Sei T ein dicht definierter, abgeschlossener Operator und $T = V\,|T|$ seine Polarzerlegung. Dann ist T genau dann normal, wenn $V\,|T| = |T|\,V$.*

Beweis. Sei T normal. Aus $T = V\,|T|$ folgt $T^* = |T|\,V^*$ nach (3.9)(b). Daher ist $T^*T = TT^* = V\,|T|\,|T|\,V^*$ und somit $|T|^2 = V\,|T|^2\,V^*$. Der positive Operator $V\,|T|\,V^*$ ist selbstadjungiert, denn mit (3.9)(b) ist $(V(|T|\,V^*))^* = (|T|\,V^*)^*\,V^* = T^{**}V^* = TV^* = V\,|T|\,V^*$. Da V^*V die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(|T|)}$ ist, gilt weiter $(V\,|T|\,V^*)^2 = V\,|T|\,V^*V\,|T|\,V^* = V\,|T|\,|T|\,V^* = V\,|T|^2\,V^*$. Also ist $V\,|T|\,V^*$ die Wurzel von $V\,|T|^2\,V^*$. Wegen der Eindeutigkeit der Wurzel folgt $|T| = V\,|T|\,V^*$. Damit folgt $|T|\,V = V\,|T|\,V^*V$, was gleich $V\,|T|$ ist, denn V^*V ist die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(|T|)} = \mathcal{N}(|T|)^\perp$.

Sei umgekehrt $V\,|T| = |T|\,V$. Es gilt $T^*T = |T|\,V^*V\,|T| = |T|^2$ und auch $TT^* = V\,|T|\,|T|\,V^* = |T|^2\,VV^* = |T|^2$, weil VV^* die othogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(T)}$ ist. Daher ist T normal nach (3.36). $\square$

Die Abbildung $k : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $k(z) := \frac{z}{1+|z|}$ ist eine Bijektion. Ihre Umkehrabbildung lautet $\kappa : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $\kappa(z) := \frac{z}{1-|z|}$.

(6) Die κ–Transformation 2. *Die Zuordnung $T \mapsto S := T\,(I + |T|)^{-1}$ ist eine Bijektion von der Menge der dicht definierten abgeschlossenen Operatoren in H auf die Menge der Operatoren $S \in \mathcal{L}(H)$ mit der Eigenschaft $\|Sx\| < \|x\|$*

$\forall\ x \in H \setminus \{0\}$. *Die Umkehrabbildung lautet* $S \mapsto T := S\,(I - |S|)^{-1}$. *Ist* T *normal, so ist* S *normal und umgekehrt. Ist* S *normal und* F *das Spektralmaß von* S, *dann ist* $T = S\,(I - |S|)^{-1} = \int \kappa\, \mathrm{d}F$ *und* $\kappa(F)$ *das Spektralmaß von* T.

Beweis. Sei $\overline{\mathcal{D}\,(T)} = H$, $T = \overline{T}$ und $T = V\,|T|$ die Polarzerlegung. Nach (2)(a) ist $B := |T|\,(I + |T|)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ positiv und $S := T\,(I + |T|)^{-1} = VB$ erfüllt $\|Sx\| = \|VBx\| \leqslant \|Bx\| < \|x\|$ für $x \neq 0$. Offensichtlich ist $\mathcal{R}\,(|T|) = \mathcal{R}\,(B)$ und daher $\mathcal{N}\,(V) = \mathcal{R}\,(|T|)^{\perp} = \mathcal{R}\,(B)^{\perp}$. Damit ist $S = VB$ die Polarzerlegung von S. Wegen (5) gilt daher: T normal $\Leftrightarrow V\,|T| = |T|\,V \Leftrightarrow V\,(I + |T|) = (I + |T|)\,V \Leftrightarrow (I + |T|)^{-1}\,V = V\,(I + |T|)^{-1} \Leftrightarrow VB = BV$ (weil $B = I - (I + |T|)^{-1}$ nach (2)(a)) $\Leftrightarrow S$ normal.

Sei nun $S \in \mathcal{L}\,(H)$ mit $\|Sx\| < \|x\|$ für alle $x \neq 0$ und $S = V\,|S|$ die Polarzerlegung. Weil $\mathcal{N}\,(V)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}\,(|S|)}$, ist $\||S|\,x\| = \|V\,|S|\,x\| = \|Sx\| < \|x\|$ für alle $x \neq 0$. Nach (2)(b) ist $B := |S|\,(I - |S|)^{-1}$ positiv und selbstadjungiert. Offenbar ist $\mathcal{R}\,(B) = \mathcal{R}\,(|S|)$. Daher ist $T := VB = S\,(I - |S|)^{-1}$ dicht definiert mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(B)$. Weiter ist T abgeschlossen. Zum Nachweis sei $(x_n, y_n) \in G\,(T)$ mit $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Es folgt $x_n \in \mathcal{D}(B)$, $y_n = Tx_n \to y$. Weil $y_n = VBx_n$ und V^*V die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(|S|)} = \overline{\mathcal{R}(B)}$ ist, gilt $V^*y_n = V^*VBx_n = Bx_n \to V^*y$, weshalb $x \in \mathcal{D}\,(B) = \mathcal{D}\,(T)$ und $Tx_n = VBx_n \to VBx = Tx$, weil B abgeschlossen ist. Wegen $Tx_n \to y$ ist $Tx = y$. Damit ist $G\,(T)$ abgeschlossen. — Außerdem ist $T = VB$ die Polarzerlegung von T, weil $\mathcal{N}\,(V)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}\,(|S|)} = \overline{\mathcal{R}(B)}$.

Jetzt wird die Bijektivität der Abbildung nachgewiesen. Für T vorgegeben, sei $T = V|T|$ die Polarzerlegung und $S := T\,(I + |T|)^{-1}$. Wie im ersten Beweisteil gezeigt ist $S = V|S|$ die Polarzerlegung. Damit folgt $|S| = |T|\,(I + |T|)^{-1}$. Nach (2)(c) ist $|T| = |S|\,(I - |S|)^{-1}$, womit $T = V\,|T| = V\,|S|\,(I - |S|)^{-1} = S\,(I - |S|)^{-1}$. — Sei nun S vorgegeben, $S = V|S|$ die Polarzerlegung und $T := S\,(I - |S|)^{-1}$. Wie im zweiten Beweisteil gezeigt ist $T = V|T|$ die Polarzerlegung. Damit folgt $|T| = |S|\,(I - |S|)^{-1}$. Nach (2)(c) ist $|S| = |T|\,(I + |T|)^{-1}$ und daher $S = V\,|S| = V\,|T|\,(I + |T|)^{-1} = T\,(I + |T|)^{-1}$.

Zum letzten Teil der Behauptung sei S normal. Für das Spektralmaß F von S gilt $S = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}F$ nach (2.16). Nach (4.3)(d) ist $S^*S = \int b^2 \mathrm{d}F$ und $|S| = \int b\, \mathrm{d}F$ mit $b(z) := |z|$. Damit ist $I - |S| = \int (1 - b)\, \mathrm{d}F$ und $(I - |S|)^{-1} = \int \frac{1}{1-b}\, \mathrm{d}F$ nach (4.2)(e). Weiter ist $T = S\,(I - |S|)^{-1} \subset \int \frac{\mathrm{id}}{1-b}\, \mathrm{d}F = \int \kappa\, \mathrm{d}F =: T'$ nach (4.3)(c). Da $T \subset T'$ und T, T' normal sind, folgt $T = T'$. In der Tat sind $T'^* \subset T^*$, $\mathcal{D}\,(T) = \mathcal{D}\,(T^*)\,, \mathcal{D}\,(T') = \mathcal{D}\,(T'^*)$, womit $\mathcal{D}\,(T) \subset \mathcal{D}\,(T') = \mathcal{D}\,(T'^*) \subset \mathcal{D}\,(T^*) = \mathcal{D}\,(T)$. Also $\mathcal{D}\,(T) = \mathcal{D}\,(T')$ und somit $T = T'$. — Die letzte Aussage gilt, weil $T = \int \kappa\, \mathrm{d}F = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}\kappa(F)$. $\square$

Der Spektralsatz

(7) Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren. *Sei T ein normaler Operator in H. Dann existiert genau ein PV-Maß E auf $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ in H mit*

$$T = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E.$$

Es gilt $E(\sigma(T)) = I, \quad E(\Delta)\, T \subset TE(\Delta) \ \forall\ \Delta \in \mathcal{B}$ *und für* $B \in L(H)$:

$$BT \subset TB \ \Leftrightarrow\ BE(\Delta) = E(\Delta)\, B \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{B}.$$

Das PV–Maß E heißt das **Spektralmaß** von T.

Beweis. Nach (6) existiert genau ein beschränkter normaler Operator S mit $\|Sx\| < \|x\|$ für alle $x \neq 0$ und $T = S\,(I - |S|)^{-1}$. Für das Spektralmaß F von S ist $T = \int \kappa\, \mathrm{d}F$ nach (6). Daher gilt $T = \int \mathrm{id}\, d\kappa(F)$, womit die Existenz eines PV-Maßes gezeigt ist. — Zur Eindeutigkeit des PV-Maßes sei $T = \int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E$. Dazu definiert man den normalen Operator $S' := \int k\, \mathrm{d}E = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}k(E)$. Weil $k(\mathbb{C}) \subset \mathbb{D}$ ist $\|S'\| \leqslant 1$. Es ist auch $\|S'x\| < \|x\|$ für alle $x \neq 0$, denn aus $\|S'x\| = \|x\|$ folgt $\int |k|^2\, \mathrm{d}E_x = \int 1\, \mathrm{d}E_x$, weshalb $\int \left(1 - |k|^2\right) \mathrm{d}E_x = 0$. Da $1 - |k|^2 > 0$ E–fast überall, folgt $E_x = 0$ und somit $x = 0$. Nun läßt sich (6) anwenden. Es folgt $S'\,(I - |S'|)^{-1} = \int \kappa\, \mathrm{d}k(E) = \int \kappa \circ k\, \mathrm{d}E = \int \mathrm{id}\, \mathrm{d}E = T$, weshalb $S = S'$ und somit $k(E) = F$ und $E = \kappa(F)$. — Sei also $T = \int \mathrm{id}\,\mathrm{d}E = \int \kappa\, \mathrm{d}F$. Nach (4.7)(c) ist $\sigma(T) = \operatorname{supp} \kappa(F)$, weshalb $I = \kappa(F)(\sigma(T)) = E(\sigma(T))$. — Nach (4.2)(h) gilt $E(\Delta)\, T \subset TE(\Delta)$ für alle $\Delta \in \mathcal{B}$.

Jetzt sei $B \in \mathcal{L}(H)$ mit $BT \subset TB$. Nach (4.2)(a) ist $TE(\Delta_c) \in \mathcal{L}(H)$ und $E(\Delta_c)\, T \subset TE(\Delta_c)$ für $\Delta_c := \{|z| \leqslant c\}$. Damit ist $(E(\Delta_c)\, BE(\Delta_c))\, TE(\Delta_c)$ auf ganz H definiert und wird von $E(\Delta_c)\, BTE(\Delta_c) \subset E(\Delta_c)\, TBE(\Delta_c) \subset TE(\Delta_c)\, BE(\Delta_c)$ fortgesetzt. Daher stimmen $(E(\Delta_c)\, BE(\Delta_c))\, TE(\Delta_c)$ und $TE(\Delta_c)\, (E(\Delta_c)\, BE(\Delta_c))$ überein. Aus (4.2)(a) folgt, dass $\Delta \mapsto E_c(\Delta) := E(\Delta_c \cap \Delta)$ das Spektralmaß von $TE(\Delta_c)$ ist. Nach dem Spektralsatz (2.16) vertauscht $E(\Delta_c)\, BE(\Delta_c)$ mit allen $E_c(\Delta)$. Sei Δ beschränkt und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\Delta \subset \Delta_n$. Dann $E(\Delta_n)\, BE(\Delta) = E(\Delta_n)\, BE(\Delta_n)\, E(\Delta) = E(\Delta)\, E(\Delta_n)\, BE(\Delta_n) = E(\Delta)\, BE(\Delta_n)$. Mit $n \to \infty$ folgt $BE(\Delta) = E(\Delta)\, B$. Diese Vertauschbarkeit gilt für alle beschränkten $\Delta \in \mathcal{B}$. Damit folgt sie auch für alle $\Delta \in \mathcal{B}$.

Schließlich gelte $BE(\Delta) = E(\Delta)\, B$ für alle $\Delta \in \mathcal{B}$. Dann folgt umgekehrt aus (2.16), dass $BTE(\Delta_c) = TE(\Delta_c)\, B$ für alle c. Sei $x \in \mathcal{D}(T)$ und $x_n := E(\Delta_n)\, x$. Dann ist $x_n \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx_n \to Tx$ nach (4.2)(a). Weiter folgt $y_n := E(\Delta_n)\, Bx \in \mathcal{D}(T)$. Weil $y_n \to Bx$ und $Ty_n = TE(\Delta_n)\, Bx = BTx_n \to BTx$, folgt $Bx \in \mathcal{D}(T)$ und $TBx = BTx$. $\square$

Aufgabe 48 Seien T ein normaler Operator in H und $M \subset \mathcal{D}(T)$ ein Untervektorraum mit $T(M) \subset \overline{M}$. Weiter sei der Abschluss des Operators $M \to \overline{M}, x \mapsto Tx$ ein normaler Operator in $\overline{M}$. Dann gelten $P(\operatorname{Re} T) \subset (\operatorname{Re} T) P$, $P(\operatorname{Im} T) \subset (\operatorname{Im} T) P$ und $PT \subset TP$ für die orthogonale Projektion P auf $\overline{M}$.

Aufgabe 49 Seien T normal, E das Spektralmaß von T, M ein abgeschlossener Untervektorraum und P die orthogonale Projektion auf M. Dann gilt $PT \subset TP$ genau dann, wenn $T(M \cap \mathcal{D}(T)) \subset M$ und der Operator S in M mit $\mathcal{D}(S) := M \cap \mathcal{D}(T)$ und $Sx := Tx$ normal ist. Weiter folgt aus $PT \subset TP$, dass das Spektralmaß F von S in M durch $\Delta \mapsto F(\Delta), F(\Delta)x := PE(\Delta)x$ gegeben ist.

Aufgabe 50 Seien T normal, $S \subset T$, $\mathcal{R}(S) \subset \overline{\mathcal{D}(S)}$ und $x \mapsto Sx$ normal in $\overline{\mathcal{D}(S)}$. Dann gilt $\mathcal{D}(S) = \overline{\mathcal{D}(S)} \cap \mathcal{D}(T)$.

(8) Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform. *Sei T ein normaler Operator in H. Dann existieren ein essentieller Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (d.h. jede messbare Menge positiven Maßes enthält eine messbare Menge endlichen positiven Maßes), eine messbare Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ und ein Hilbertraum Isomorphismus $\beta : H \to L^2(\mu)$ derart, dass $T = \beta^{-1} \circ M_\varphi \circ \beta$, wobei M_φ der Operator in $L^2(\mu)$ mit $\mathcal{D}(M_\varphi) := \left\{f \in L^2(\mu) : \varphi f \in L^2(\mu)\right\}$ und $M_\varphi f := \varphi f$ ist. Im Fall, dass H separabel ist, kann $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mu)$ und μ endlich gewählt werden.*

Beweis. Der Beweis erfolgt wie der Beweis von (2.24). □

(9) Funktionenkalkül für einen unbeschränkten normalen Operator. Seien T ein normaler Operator und E sein Spektralmaß und sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ messbar. Dann nennt man den normalen Operator

$$h[T] := \int h \, dE$$

die Funktion h von T. Wegen $E(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$ genügt es, dass h auf $\sigma(T)$ definiert ist. Es gelten die folgenden Aussagen.

(a) *$h(E)$ ist das Spektralmaß von $h[T]$, weil $\int h \, dE = \int \mathrm{id} \, dh(E)$ nach* (2.15).

(b) *Ist $h' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ messbar, dann gilt offenbar $h' \circ h[T] = h'[h[T]]$.*

(c) $\sigma(h[T]) = E\text{–}\operatorname{ess} h(\mathbb{C})$ *nach* (4.7)(c).

(d) *Sind F ein PV–Maß auf $(Z, \mathcal{A})$ in H und $f : Z \to \mathbb{C}$ messbar, dann*

$$h\left[\int f \, dF\right] = \int h \circ f \, dF,$$

denn $h[\int f \, dF] = h[\int \mathrm{id} \, df(F)] = \int h \, df(F) = \int h \circ f \, dF$ nach (2.15).

(e) Ist $V : H \to H'$ ein Hilbertraum Isomorphismus, dann gilt offensichtlich $Vh[T]V^{-1} = h[VTV^{-1}]$.

(10) Beispiel κ–Transformation. Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ normal mit $\|Sx\| < \|x\|$ für $x \neq 0$ und $T := S(I - |S|)^{-1}$ die κ–Transformierte von S. Dann ist $T = \kappa[S]$ und $k[T] = S$. Dies folgt aus (6) und (9)(a), (b).

(11) Multiplikationsoperatoren. Wir gehen näher auf die Multiplikationsoperatoren ein (vgl. (2.19) für beschränkte Multiplikationsoperatoren). Viele Ergebnisse lassen sich für Multiplikationsoperatoren leicht direkt beweisen, die dann aufgrund des Spektralsatzes (8) auch allgemein für normale Operatoren gelten.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein essentieller Maßraum (siehe (8)) und E^{kan} bezeichne das kanonische Spektralmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ in $L^2(\mu)$. Sei weiter $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$–messbare Funktion. Dann heißt der Operator M_φ in $L^2(\mu)$ mit $\mathcal{D}(M_\varphi) := \{f \in L^2(\mu) : \varphi f \in L^2(\mu)\} = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \sqrt{1 + |\varphi|^2}\, f \in L^2(\mu)\}$ und Wirkung $M_\varphi f := \varphi f$ der Multiplikationsoperator mit φ. Gelegentlich schreiben wir $M(\varphi)$ statt M_φ. Es gelten folgende Aussagen.

- $M_\varphi = \int \varphi \, dE^{\text{kan}}$.

- *M_φ ist normal, $E := \varphi(E^{kan})$ ist das Spektralmaß von M_φ. Explizit ist $E : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(L^2(\mu)),\ E(\Delta) = M(1_{\varphi^{-1}(\Delta)}) = M(1_\Delta \circ \varphi) = 1_\Delta[M_\varphi]$. E und $\varphi(\mu)$ haben offenbar die gleichen Nullmengen. Daher ist*

$$\sigma(M_\varphi) = \text{supp } E = \text{supp } \varphi(\mu) = \text{ess } \varphi(\mathbb{C}).$$

- *$h[M_\varphi] = M_{h \circ \varphi}$ für $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ messbar.*

- *Es ist $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$ und M_φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $Im(\varphi) = 0$ μ–fast überall, und genau dann unitär, wenn $|\varphi| = 1$ μ–fast überall. Weiter ist M_φ genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $\varphi \in \{0, 1\}$ μ–fast überall.*

Die erste dieser Aussagen liegt fast auf der Hand. Die drei folgenden sind einige der Eigenschaften des Integrals bezüglich eines PV–Maßes (2.2), (4.7)(c), (9).

- *Sei $p \in \mathbb{C}[X, X']$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ über $\mathbb{C}$ in zwei Unbestimmten und p_H sein Hauptteil, d.h. die Summe aller Monome vom Grad n. Dann gilt $p(M_\varphi, M_\varphi^*) \subset M(p \circ (\varphi, \overline{\varphi}))$. Falls $p_H(z, \overline{z}) \neq 0$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$, dann ist $p(M_\varphi, M_\varphi^*) = M(p \circ (\varphi, \overline{\varphi}))$.*

Beweis. Mit Induktion nach den Exponenten folgt leicht $\mathcal{D}((M_\varphi)^i (M_\varphi^*)^j) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \sqrt{1 + |\varphi|^{2(i+j)}}\, f \in L^2(\mu)\}$, was $V := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \sqrt{1 + |\varphi|^{2n}}\, f \in L^2(\mu)\}$ umfasst, weil für alle $a \geq 0$ und $0 \leq r \leq s$ gilt $1 + a^r \leq 2(1 + a^s)$. Daher ist $\mathcal{D}(p(M_\varphi, M_\varphi^*)) = V$. — Da $\overline{\lim}_{|z| \to \infty} |z|^{-n} |p(z, \overline{z})| < \infty$ existiert $C > 0$ mit $1 + |p \circ (\varphi, \overline{\varphi})|^2 \leq C(1 + |\varphi|^{2n})$. Daher gilt $\mathcal{D}(M(p \circ (\varphi, \overline{\varphi}))) \supset V$. Zusammen folgt der erste Teil der Behauptung. — Wegen der Zusatzvoraussetzung ist $\inf\{|p_H(z, \overline{z})| : z \in \partial\mathbb{D}\} > 0$ und $\underline{\lim}_{|z| \to \infty} |z|^{-n} |p(z, \overline{z})| > 0$. Deshalb existiert

$c > 0$ mit $c(1+|\varphi|^{2n}) \leq 1 + |p\circ(\varphi,\overline{\varphi})|^2$. Daraus folgt $V \supset \mathcal{D}(M(p\circ(\varphi,\overline{\varphi})))$.□

Sei T ein normaler Operator und E sein Spektralmaß. Für $q(\lambda) := p(\lambda,\overline{\lambda})$ mit $p_H(\lambda,\overline{\lambda}) \neq 0 \; \forall \; |\lambda| = 1$ folgt aus Obigem aufgrund des Spektralsatzes (8)

$$p(T,T^*) = q[T].$$

Die Bedingung an p_H liegt z.B. vor, wenn p ein Polynom einer Variablen ist.

- *Ist* $\mathrm{Im}(\varphi) = 0$ *μ–fast überall, dann ist die Cayley Transformierte U von M_φ gleich $M\left(\frac{i-\varphi}{-i-\varphi}\right)$.*

Beweis. Nach obigem Ergebnis ist $iI - M_\varphi = M(i-\varphi)$ und $-iI - M_\varphi = M(-i-\varphi)$. Sei $f \in \mathcal{D}(M(-i-\varphi))$. Aus $M(-i-\varphi)f = (-i-\varphi)f = 0$ folgt offenbar $f = 0$. Sei nun $g \in L^2(\mu)$. Dann ist $f := (-i-\varphi)^{-1}g \in \mathcal{D}(M(-i-\varphi))$ mit $M(-i-\varphi)f = g$. Das beweist, dass $M(-i-\varphi)$ invertierbar ist mit $(M(-i-\varphi))^{-1} = M\left(\frac{1}{-i-\varphi}\right) \in \mathcal{L}(L^2(\mu))$. Also ist $M\left(\frac{1}{-i-\varphi}\right)g \in \mathcal{D}(M(i-\varphi))$ und $M(i-\varphi)\,M\left(\frac{1}{-i-\varphi}\right)g = (i-\varphi)\frac{1}{-i-\varphi}g = M\left(\frac{i-\varphi}{-i-\varphi}\right)g$. □

Daraus schließen wir wieder allgemein für einen selbstadjungierten Operator T, dass $\gamma[T]$ für $\gamma(x) := \frac{i-x}{-i-x}$ die Cayley Transformierte von T ist.

Sei $C := \mu$–$\operatorname{ess\,sup}|\varphi|$. Dann sind äquivalent

- $C < \infty$
- M_φ stetig
- $\mathcal{D}(M_\varphi) = L^2(\mu)$
- $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(\mu))$

wobei im letzten Punkt $\|M_\varphi\| = C$ gilt. Dies folgt aus (4.2)(g) und (2.11)(e).

Direkter Beweis. Sei $C < \infty$. Dann ist $\|M_\varphi f\| = \|\varphi f\| \leq C\,\|f\| \; \forall f \in \mathcal{D}(M_\varphi)$ und offenbar ist $\mathcal{D}(M_\varphi) = L^2(\mu)$. Die Menge $|\varphi|^{-1}(]C-\epsilon,\infty])$ ist für jedes $\epsilon > 0$ keine μ–Nullmenge und enthält damit eine Teilmenge $\mathsf{A}_\epsilon \in \mathcal{A}$ mit positivem endlichen Maß. Weil $\|M_\varphi 1_{\mathsf{A}_\epsilon}\| = \|\varphi 1_{\mathsf{A}_\epsilon}\| \geq (C-\epsilon)\,\|1_{\mathsf{A}_\epsilon}\|$ folgt $\|M_\varphi\| = C$. — Sei $C = \infty$. Dann existiert zu jedem $K \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq K$ derart, dass die Menge $|\varphi|^{-1}([n,n+1[)$ keine μ–Nullmenge ist und damit eine Teilmenge $\mathsf{A}_n \in \mathcal{A}$ mit positivem endlichen Maß enthält. Dann ist offenbar $1_{\mathsf{A}_\epsilon} \in \mathcal{D}(M_\varphi)$ und $\|M_\varphi 1_{\mathsf{A}_n}\| = \|\varphi 1_{\mathsf{A}_n}\| \geq K\,\|1_{\mathsf{A}_n}\|$. Daher ist M_φ unbeschränkt. — Sei $\mathcal{D}(M_\varphi) = L^2(\mu)$. Der Operator M_φ ist normal und damit insbesondere abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist M_φ stetig. — Die verbleibenden Inklusionen beweist man ähnlich. □

- M_φ invertierbar $\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\{0\})$ μ–Nullmenge.
- M_φ stetig invertierbar $\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$ μ–Nullmenge für eine offene 0–Umgebung $U \subset \mathbb{C}$.

Direkter Beweis. Ist $\mu\left(\varphi^{-1}(\{0\})\right) = 0$, so ist M_φ injektiv mit $(M_\varphi)^{-1} = M_\psi$, wobei $\psi(x) := (\varphi(x))^{-1}$ für $x \notin \varphi^{-1}(\{0\})$ und $\psi(x) := 0$ für $x \in \varphi^{-1}(\{0\})$. — Ist $\mu\left(\varphi^{-1}(\{0\})\right) \neq 0$, so gibt es eine Teilmenge $\mathsf{A} \subset \varphi^{-1}(\{0\})$, $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$ mit positivem endlichen Maß. Dann liegt $1_\mathsf{A} \neq 0$ im Kern von M_φ. Also ist M_φ nicht invertierbar.

Ist M_φ invertierbar, so ist M_ψ wie oben die Inverse. Die Inverse ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{ess\,sup} |\psi| < \infty$. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\mu\left(\varphi^{-1}(U)\right) = 0$ für eine offene 0–Umgebung $U \subset \mathbb{C}$. Erfüllt φ letzteres, so ist M_φ nach dem ersten Punkt invertierbar. $\square$

- $M_\varphi \subset 0 \Rightarrow \varphi = 0$ μ–fast überall.

Beweis. Angenommen $\varphi \neq 0$. Dann gibt es für ein $N \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $\mathsf{A} \subset |\varphi|^{-1}(]0,\ N])$, $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$ mit positivem endlichen Maß. Damit ist $1_\mathsf{A} \in \mathcal{D}(M_\varphi)$ und $M_\varphi 1_\mathsf{A} = \varphi 1_\mathsf{A} \neq 0$, was den Widerspruch ergibt. $\square$

6 Halbgruppen von Operatoren

Hauptsatz für stetige Halbgruppen

(1) Einparametrige Halbgruppe. Seien X ein Banachraum und (a)–(c) Eigenschaften einer Abbildung $[0, \infty[\to \mathcal{L}(X)\,,\ t \mapsto Q(t)$.

(a) $Q(0) = I$

(b) $Q(s+t) = Q(s)\,Q(t)$ für alle $t, s \geqslant 0$

(c) $\lim\limits_{0 \leqslant t \to 0} \|Q(t)\,x - x\| = 0$ für alle $x \in X$.

Gelten (a) und (b), so heißt Q eine einparametrige Halbgruppe. Gilt außerdem (c), so heißt Q eine stetige Halbgruppe. Die Eigenschaft (c) bedeutet, dass $I = \lim_{t \to 0} Q(t)$ bezüglich der punktweisen Konvergenz, d.i. die Konvergenz in der sogenannten starken Operatortopologie.

(2) Beispiel. Seien $X = \mathbb{C}^d$ und Q eine stetige Halbgruppe. Dann existiert $A \in \mathbb{C}^{d,d}$ mit $Q(t) = \mathrm{e}^{tA}$ für alle $t \geqslant 0$. Es gilt $A = Q'(0) = \lim \frac{1}{\varepsilon}(Q(\varepsilon) - E_d)$.

Aufgabe 51 Man beweise (2).

(3) Infinitesimale Erzeugende. Seien $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Setze $A_\varepsilon x := \frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon)\,x - x]\,,\ \mathcal{D}(A) := \left\{x \in X : \exists\, y \in X \text{ mit } \|A_\varepsilon x - y\| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0\right\}$ und

$$Ax := \lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon x \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A).$$

A ist offensichtlich linear und heißt die infinitesimale Erzeugende von Q.

Einschub zum Bochner Integral

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und X ein normierter Raum versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen. Man nennt $u : \Omega \to X$ eine **elementare Abbildung**, wenn u messbar und $u(\Omega)$ endlich ist. Sie heißt **integrierbar**, wenn $\int \|u(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty$. Ist u integrierbar, dann ist

$$\int u\,\mathrm{d}\mu := \sum_{x \in u(\Omega)} \mu\left(u^{-1}(\{x\})\right) x.$$

das **Integral** von u.

Offensichtlich ist jede elementare Abbildung u von der Art $u = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} x_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, $x_i \in X$ und $n \in \mathbb{N}$. Sie ist integrierbar genau dann, wenn $\mu(A_i) < \infty$ falls $x_i \neq 0$. Man zeigt leicht, dass $\int u \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) x_i$. Dabei gilt $\infty \cdot 0 = 0$.

(4) Satz. *Sei $f : \Omega \to X$ eine Abbildung. Dann gelten:*

(a) *Es existiert eine Folge (u_n) integrierbarer elementarer Abbildungen mit $u_n \to f$ punktweise und $\int \|(f - u_n)(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu(\omega) \to 0$ genau dann, wenn f messbar, $f(\Omega)$ separabel und $\int \|f(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty$ ist.*

(b) *Ist X ein Banachraum und sind $(u_n), (v_n)$ Folgen zu f wie in* (a)*, dann sind $(\int u_n \, \mathrm{d}\mu)_n$ und $(\int v_n \, \mathrm{d}\mu)_n$ konvergent und* $\lim \int u_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int v_n \, \mathrm{d}\mu$.

(5) Bochner Integral. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum und $f : \Omega \to X$ eine Abbildung. Dann heißt f integrierbar, wenn f messbar, $f(\Omega)$ separabel und $\int \|f(w)\| \, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty$ sind. Ist f integrierbar, so ist das Bochner Integral von f durch

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \lim_{n \to \infty} \int u_n \, \mathrm{d}\mu$$

mit (u_n) wie in (a) erklärt. Für $A \in \mathcal{A}$ sei $\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int 1_A f \, \mathrm{d}\mu$.

(6) Eigenschaften des Bochner Integrals. *Sei $f : \Omega \to X$ integrierbar.*

(a) *Das Bochner Integral ist linear.*

(b) *Das Bochner Integral ist σ–additiv, d.h. sind $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $A := \bigcup A_i$, dann ist $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu$.*

(c) *Sind Y ein Banachraum und $T : X \to Y$ stetig und linear, so gilt $T\left(\int f \, \mathrm{d}\mu\right) = \int T \circ f \, \mathrm{d}\mu$.*

(d) *Es gilt $\| \int f \, \mathrm{d}\mu\| \leq \int \|f(\omega)\| \, \mathrm{d}\mu(\omega)$. Ist $\sup\limits_{\omega \in A} \|f(\omega)\| < \infty$ für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, so gilt $\left\|\int_A f \, \mathrm{d}\mu\right\| \leqslant \mu(A) \sup\limits_{\omega \in A} \|f(\omega)\|$.*

Aufgabe 52 Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, H und K Hilberträume und T ein abgeschlossenere Operator von H in K (d.h. $\mathcal{D}(T)$ ist ein Untervektorraum von H und $T : \mathcal{D}(T) \to K$ ist eine lineare Abbildung mit abgeschlossenem Graphen $\mathcal{G}(T)$). Weiter sei $f : \Omega \to H$ integrierbar mit $f(\Omega) \subset \mathcal{D}(T)$ und $T \circ f$ integriebar. Dann ist $\int f \, \mathrm{d}\mu \in \mathcal{D}(T)$ und es gilt $T\left(\int f \, \mathrm{d}\mu\right) = \int T \circ f \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis. Indem man T auf $\overline{\mathcal{D}(T)}$ einschränkt, bleibt T abgeschlossen und man erkennt, dass T o.E. dicht definiert angenommen werden kann. Dann ist T^* dicht definiert und $T^{**} = T$. Sei nun $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Mit (6)(c) folgt $\langle y, \int T \circ f \,\mathrm{d}\mu\rangle = \int \langle y, T \circ f(\omega)\rangle \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int \langle T^* y, f(\omega)\rangle \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \langle T^* y, \int f \,\mathrm{d}\mu\rangle$. Das zeigt, dass $\int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathcal{D}(T^{**})$ und $\int T \circ f \,\mathrm{d}\mu = T^{**}\left(\int f \,\mathrm{d}\mu\right)$, was die Behauptung ergibt. $\square$

Wir fahren mit der Theorie der Halbgruppen fort.

(7) Hauptsatz. *Sei Q eine stetige Halbgruppe. Dann gelten* (a)–(d).

(a) $[0, \infty[\to X,\ t \mapsto Q(t)x$ ist stetig für jedes $x \in X$.

(b) $\overline{\mathcal{D}(A)} = X,\ A = \overline{A}$.

(c) Für jedes $x \in \mathcal{D}(A)$ ist $Q(t)\,x \in \mathcal{D}(A)$ und $\frac{d}{dt}Q(t)\,x = A\,Q(t)x = Q(t)\,Ax$, wobei $\frac{d}{dt}Q(t)\,x := \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(Q(t+h) - Q(t)\right)x$.

(d) $Q(t)\,x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}x\right)$ *gleichmäßig in $t \in [0, T]$ für jedes $x \in X$ und jedes $T \geqslant 0$, wobei die Exponentialfunktion für $B \in \mathcal{L}(X)$ über die Reihe* $\mathrm{e}^B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B^n$ *definiert ist.*

Beweis. Zunächst erfolgen zwei Vorüberlegungen. Angenommen zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ mit $\|Q(t_n)\| > n$. Wegen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit existiert dann ein $x \in X$, wofür $\left(\|Q(t_n)\,x\|\right)_n$ unbeschränkt ist, was (1)(c) widerspricht. Daher existieren $\delta > 0$ und $\gamma_0 < \infty$ derart, dass $\|Q(t)\| \leqslant \gamma_0$ für alle $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Sei $s \in [0, 1]$. Dann ist $s = n\delta + \delta'$ mit $0 \leqslant \delta' < \delta$, $0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{\delta}$, weshalb $\|Q(s)\| = \|Q(\delta)^n\, Q(\delta')\| \leqslant \gamma_0^{n+1} \leqslant \gamma_0^{1+1/\delta} < \infty$. Damit ist $\gamma := \sup_{0\leq s\leq 1}\|Q(s)\| < \infty$. Weil $Q(0) = I$ ist $\gamma \geqslant 1$. Damit folgt

$$\|Q(t)\| \leqslant \gamma^{t+1} \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{①}$$

weil für $t = n + t'$ mit $0 \leqslant t' < 1$ gilt $\|Q(t)\| \leqslant \|Q(1)^n\, Q(t')\| \leqslant \gamma^{n+1} \leqslant \gamma^{t+1}$.

Aus $tA_\varepsilon = \frac{t}{\varepsilon}Q(\varepsilon) - \frac{t}{\varepsilon}I$ folgt $\mathrm{e}^{tA_\varepsilon} = \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^n\frac{Q(n\varepsilon)}{n!}$. Damit und wegen ① ist $\left\|\mathrm{e}^{tA_e}\right\| \leqslant \mathrm{e}^{-t/\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^n\frac{1}{n!}\gamma^{n\varepsilon+1} = \gamma\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}\left(\gamma^\varepsilon - 1\right)\right)$. Für $0 < \varepsilon \leqslant 1$ gilt $\gamma^\varepsilon - 1 \leqslant \varepsilon(\gamma - 1)$, denn $\gamma^\varepsilon = \mathrm{e}^{\varepsilon\ln\gamma} = 1 + \varepsilon\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon^{n-1}\frac{(\ln\gamma)^n}{n!} \leqslant 1 + \varepsilon\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln\gamma)^n}{n!} = 1 + \varepsilon\left(\mathrm{e}^{\ln\gamma} - 1\right) = 1 + \varepsilon(\gamma - 1)$. Damit gilt

$$\left\|\mathrm{e}^{tA_\varepsilon}\right\| \leqslant \gamma\mathrm{e}^{t\gamma} \ \text{ für } 0 < \varepsilon \leqslant 1,\ 0 \leqslant t < \infty. \tag{②}$$

(a) Sei $0 \leqslant s \leqslant t$. Dann gilt $\|Q(t)\,x - Q(s)\,x\| = \|Q(s)\,(Q(t-s)\,x - x)\| \leqslant \|Q(s)\|\,\|Q(t-s)\,x - x\| \leqslant \gamma^{t+1}\,\|Q(t-s)\,x - x\| \to 0$ für $s \to t$ oder $t \to s$, wobei die zweite Unlgeichung nach ① gilt. Das beweist, dass Q stark stetig ist.

Nach (5) ist das Bochner Integral $M_t x := \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)\,x\,\mathrm{d}s$ für alle $t>0$ definiert, da $s \mapsto Q(s)\,x$ nach (a) stetig ist. Insbesondere ist $\{Q(s)\,x : 0 \leqslant s \leqslant t\} \subset \{Q(s)\,x : 0 \leqslant s \leqslant t, s \in \mathbb{Q}\}$ separabel und beschränkt. Mit (6)(d) und ① folgt $M_t \in \mathcal{L}(X)$. Es gilt

$$A_\varepsilon M_t = A_t M_\varepsilon = M_t A_\varepsilon \quad \forall\, t, \varepsilon > 0, \qquad ③$$

denn aus $\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} = \int_0^t + \int_t^{t+\varepsilon}$ nach (6)(b) folgt $\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} - \int_0^t = \int_t^{t+\varepsilon} - \int_0^\varepsilon$. Die linke Seite ergibt $\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} Q(s)\,x\,\mathrm{d}s - \int_0^t Q(s)\,x\,\mathrm{d}s = \int_0^t (Q(s+\varepsilon)\,x - Q(s)\,x)\,\mathrm{d}s = [Q(\varepsilon) - I]\int_0^t Q(s)\,x\,\mathrm{d}s = \varepsilon A_\varepsilon t M_t$ nach (6)(a), (c). Die rechte Seite erhält man, indem man ε und t vertauscht. Schließlich gilt $A_\varepsilon M_t = M_t A_\varepsilon$, weil alle $Q(s)$ vertauschen.

(b) Mit (6)(d) und wegen (a) folgt $\|M_t x - x\| = \left\|\frac{1}{t}\int_0^t (Q(s)\,x - x)\,\mathrm{d}s\right\| \leqslant \frac{1}{t}t\sup_{0\leq s\leq t}\|Q(s)\,x - x\| \to 0$ für $t \to 0$. Mit ③ folgt daraus $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon M_t x = A_t \lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon x = A_t x$. Somit ist $M_t x \in \mathcal{D}(A)$ und $AM_t x = A_t x$ für jedes $x \in X$ und $t > 0$. Weil $M_t x \to x$, $t \to 0$ für jedes $x \in X$, liegt daher $\mathcal{D}(A)$ dicht in X. Außerdem folgt

$$M_t A x = A_t x \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A) \qquad ④$$

denn wegen ③ ist $M_t A x = M_t \lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon M_t x = A_t x$. Sei nun (x_n) eine Folge in $\mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$. Dann ist $M_t A x_n = A_t x_n$ und somit $M_t y = A_t x$. Es gilt daher $A_t x \to y$ für $t \to 0$. Das bedeutet nach Definition von A, dass $x \in \mathcal{D}(A)$ und $y = Ax$. Damit ist A abgeschlossen.

(c) Für $x \in \mathcal{D}(A)$, $t > 0$ gilt $A_\varepsilon Q(t)\,x = Q(t)\,A_\varepsilon x \to Q(t)\,Ax$, weshalb $Q(t)\,x \in \mathcal{D}(A)$ und $A\,Q(t)\,x = Q(t)\,Ax$. Nach ④ ist $\int_0^t Q(s)\,Ax\,\mathrm{d}s = Q(t)\,x - x$. Weil der Integrand stetig ist, folgt $\frac{d}{dt}Q(t)x = \frac{d}{dt}\int_0^t Q(s)\,Ax\,\mathrm{d}s = Q(t)\,Ax$.[6]

(d) Sei zunächst $x \in \mathcal{D}(A)$ und sei $0 < s \leq t$. Nach der Produktregel[7] und wegen (c) folgt $\frac{d}{ds}\left[\mathrm{e}^{(t-s)A_\varepsilon} Q(s)\,x\right] = \mathrm{e}^{(t-s)A_\varepsilon}(-A_\varepsilon)\,Q(s)\,x + \mathrm{e}^{(t-s)A_\varepsilon} Q(s)\,Ax =$

[6]Allgemein sei f stetig und $F(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. Dann ist F differenzierbar und $F'(t) = f(t)$. Denn aus den Eigenschaften (6)(b), (a), (d) des Bochner Integrals folgt $\left\|\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right) - f(t)\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}[f(s) - f(t)]\,\mathrm{d}s\right\| \leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_t^{t+h}\|f(s) - f(t)\|\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \frac{1}{|h|}|t+h-t|\sup\{\|f(s) - f(t)\| : s \text{ zwischen } t \text{ und } t+h\} \to 0$ für $h \to 0$.

[7]Zum Nachweis der Produktregel für das Produkt Gf einer $\mathcal{L}(X)$–wertigen Funktion G und einer X–wertigen Funktion f geht man von der üblichen Umformung $\frac{1}{h}(G(t+h)\,f(t+h) - G(t)\,f(t)) = \frac{1}{h}(G(t+h) - G(t))f(t+h) + G(t)\,\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$ des Differenzenquotienten aus. Vorausgesetzt ist, dass $G'(t) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(G(t+h) - G(t))$ und $f'(t) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$ als Normlimites in $\mathcal{L}(X)$ bzw. X existieren. Damit folgen $\left\|\frac{G(t+h)-G(t)}{h}f(t+h) - G'(t)\,f(t)\right\| \leqslant \left\|\frac{G(t+h)-G(t)}{h} - G'(t)\right\|\|f(t+h)\| + \|G'(t)\|\,\|f(t+h) - f(t)\| \to 0$ und $G(t)\,\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \to G(t)\,f'(t)$. — Im Speziellen Fall

$e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)(Ax - A_\varepsilon x)$. Setze

$$s(t,\varepsilon) := Q(t) - e^{tA_\varepsilon}.$$

Gemäß dem HDI[8] ist $\int_0^t \frac{d}{ds}\left[e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)\,x\right]\mathrm{d}s = e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)\,x\,\Big|_{s=0}^{s=t} = s(t,\varepsilon)\,x$. Daher ist $s(t,\varepsilon)\,x = \int_0^t e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)\,[Ax - A_\varepsilon x]\,ds$. Der Integrand hat nach ① und ② eine Norm $\left\|e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)\,[Ax - A_\varepsilon x]\right\| \leqslant \gamma^{s+1}\gamma\, e^{(t-s)\gamma}\,\|Ax - A_\varepsilon x\|$. Damit und wegen $\gamma^{s+1} \leqslant \gamma^{t+1}$ folgt $\|s(t,\varepsilon)\,x\| \leqslant K(t)\,\|Ax - A_\varepsilon x\|$, wobei $K(t) := \gamma^{t+1}(e^{t\gamma} - 1)$ eine monoton wachsende Funktion von t ist.

Sei nun $T > 0$ fest. Nach Definition von $s(t,\varepsilon)$ und wegen ①, ② existiert $K_0 \geqslant 0$ derart, dass $\|s(t,\varepsilon)\| \leqslant K_0$ für alle $0 \leqslant t \leqslant T$ und $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Zu $x \in X$ und $\eta > 0$ sei $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\eta}{2K_0}$. Damit ergibt sich $\|s(t,\varepsilon)\,x\| \leqslant \|s(t,\varepsilon)\,x_0\| + \|s(t,\varepsilon)\,(x - x_0)\| \leqslant K(T)\,\|Ax_0 - A_\varepsilon x_0\| + \frac{\eta}{2}$. Weil $A_\varepsilon x_0 \to Ax_0$, existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\|s(t,\varepsilon)\,x\| \leqslant \eta$ für alle $0 \leqslant t \leqslant T$ und alle $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, woraus die Behauptung folgt. □

(8) Normstetige Halbgruppe. *Seien Q eine stetige Halbgruppe und A ihre infinitesimale Erzeugende. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathcal{D}(A) = X$.

(b) $\lim\limits_{t\to 0}\|Q(t) - I\| = 0$.

(c) $A \in \mathcal{L}(X)$, $Q(t) = e^{tA}$ für alle $t \geqslant 0$.

Beweis. Sei $\mathcal{D}(A) = X$. Dann gilt $A_{t_n}x \to Ax$ falls $t_n \to 0$ für jedes $x \in X$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass $(\|A_{t_n}\|)$ beschränkt ist. Daher gilt $\frac{1}{t_n}\|Q(t_n)\,x - x\| \leqslant C\,\|x\|\ \forall\ x$, weshalb $\|Q(t_n) - I\| \to 0$ für $n \to \infty$. — Jetzt gelte $\lim_{t\to 0}\|Q(t) - I\| = 0$. Mit (6)(d) folgt $\|M_t - I\| \to 0$, $t \to 0$ für $M_t x = \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)\,x\,\mathrm{d}s$. Damit existiert ein $t_0 > 0$ derart, dass M_t bijektiv ist und $M_t^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ für $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Aus ③ in (7) folgt

$$A_\varepsilon = M_t^{-1}A_t M_\varepsilon. \qquad (\star)$$

Daher gilt $A_\varepsilon x \to M_t^{-1}A_t x$, $\varepsilon \to 0\ \forall\ x \in X$. Das bedeutet $A = M_t^{-1}A_t \in \mathcal{L}(X)$. Somit gilt $\|A_\varepsilon - A\| = \left\|M_t^{-1}A_t M_\varepsilon - M_t^{-1}A_t\right\| \leqslant \left\|M_t^{-1}A_t\right\|\,\|M_\varepsilon - I\| \to$

---

ist $G(t) = e^{tS}$ für $S \in \mathcal{L}(X)$. Dafür erhält man $\frac{1}{h}\left[e^{(t+h)S} - e^{tS}\right] = e^{tS}\frac{e^{hS} - I}{h} = e^{tS}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{n-1}}{n!}S^n\right) \to e^{tS}S$ für $h \to 0$ als Normlimes in $\mathcal{L}(X)$.

[8] Zum Beweis des HDI für das Bochner Integral sei f stetig differenzierbar. Definiere $u_n(s) := \sum_{j=0}^{n-1} 1_{[t_j,t_{j+1}[}(s)\,\frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t/n}$ für $t_j = j\frac{t}{n}$ und $j = 0, \ldots, n-1$. Für s_0 zwischen s und $s+h$ gilt $\left\|\frac{f(s+h) - f(s)}{h} - f'(s_0)\right\| \leqslant C\,|h|$, wobei $C := \sup\{\|f'(r) - f'(s_0)\| :$ r zwischen s und $s+h\}$, siehe z.B. *Dieudonné, Op. Cit., (8.6.2)*. Wegen der Stetigkeit von f' ist $\tilde{C} := \sup\limits_{r,s_0\in[0,t]}\|f'(r) - f'(s_0)\| < \infty$ und somit $\|u_n(s_0) - f'(s_0)\| \leqslant \tilde{C}\,\frac{t}{n} \to 0$ gleichmäßig für $n \to \infty$. Damit ist nach Definition des Bochner Integrals $\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^t u_n(s)\,\mathrm{d}s = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t/n}(t_{j+1} - t_j) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(t_n) - f(t_0)) = f(t) - f(0)$.

0 für $\varepsilon \to 0$. Da $A = M_t^{-1} A_t$ mit A_ε vertauscht, ergibt sich $\left\| \mathrm{e}^{tA_\varepsilon} - \mathrm{e}^{tA} \right\| = \left\| \mathrm{e}^{tA} \left(\mathrm{e}^{t(A_\varepsilon - A)} - I \right) \right\| \leqslant \left\| \mathrm{e}^{tA} \right\| \left\| \mathrm{e}^{t(A_\varepsilon - A)} - I \right\| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Nach (7)(d) ist daher $Q(t) = \mathrm{e}^{tA}$. — Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) ist klar. $\square$

(9) Normstetige Gruppe. *Ist die infinitesimale Erzeugende $A \in \mathcal{L}(X)$ (siehe (8)), dann ist $\tilde{Q}(t) := \mathrm{e}^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und erfüllt $\tilde{Q}(s+t) = \tilde{Q}(s)\,\tilde{Q}(t)\ \forall\ s, t \in \mathbb{R}$. Damit ist $\tilde{Q}$ offenbar die einzige normstetige Gruppe, die Q fortsetzt.*

Normale Halbgruppen

Ab hier beschäftigen wir uns mit dem Fall, dass $X = H$ ein Hilbertraum ist.

(10) Normale Halbgruppe. *Sei H ein Hilbertraum und $Q(t) \in \mathcal{L}(H)$, $t \geq 0$.*

(a) *Sei Q eine stetige Halbgruppe derart, dass $Q(t)$ normal für alle $t \geqslant 0$ ist. Dann ist die infinitesimale Erzeugende A normal und es existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \gamma$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Weiter gilt $Q(t) = \mathrm{e}^{tA} := \int \mathrm{e}^{t\lambda} dE(\lambda)$, wobei E das Spektralmaß von A ist. Schließlich ist $Q(t)$ unitär für alle $t \geqslant 0$ genau dann, wenn $Q(t)$ unitär für ein $t > 0$ ist und auch genau dann, wenn $\frac{1}{i}A$ selbstadjungiert ist.*

(b) *Sei A ein nomaler Operator mit $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leqslant \gamma\}$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann ist $Q(t) := \mathrm{e}^{tA}$, $t \geqslant 0$, im Sinne des Funktionenkalküls eine stetige Halbgruppe, wofür $Q(t)$ normal für alle $t \geqslant 0$ ist und deren infinitesimale Erzeugende A ist.*

Beweis. (a) Weil $Q(s)$ und $Q(t)$ kommutieren, folgt nach dem Satz von Fuglede, Putnam, Rosenblum (2.13)(e), dass auch $Q(s)$ und $Q(t)^*$ kommutieren. Damit erzeugt $\{Q(s) : s \geqslant 0\}$ eine kommutative Unter-C^*-Algebra von $\mathcal{L}(H)$. Gemäß (2.14) seien Δ ihr Strukturraum, E ihr Spektralmaß und $q_t := \widehat{Q(t)}$, $a_\varepsilon := \widehat{A_\varepsilon}$ bezeichnen die entsprechenden Gelfand Transformierten. Dann ist $a_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(q_\varepsilon - 1), \varepsilon > 0$ und damit

$$a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} a_\varepsilon^2\,, \tag{①}$$

denn $\frac{\varepsilon}{2} a_\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left(q_\varepsilon^2 - 2q_\varepsilon + 1\right) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(q_{2\varepsilon} - 1 - 2(q_\varepsilon - 1)\right)$. Für $h \in \Delta$ definiere $b(h) := \lim\limits_{n\to\infty} a_{2^{-n}}(h)$ falls der Limes existiert und $b(h) := 0$ sonst. Dann ist $b : \Delta \to \mathbb{C}$ messbar. Gemäß (4.2)(c) ist $B := \int b\,\mathrm{d}E$ mit $\mathcal{D}(B) = \left\{x \in H : \int |b|^2 \,\mathrm{d}E_x < \infty\right\}$ normal. Das Ziel ist, $A = B$ nachzuweisen.

Sei $x \in \mathcal{D}(A)$. Dafür ist $\{\|A_\varepsilon x\| : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ für hinreichend kleines ε_0 beschränkt. Damit existiert eine Konstante C_x mit

$$\int |a_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}E_x = \|A_\varepsilon x\|^2 \leqslant C_x \quad \text{für } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{②}$$

wobei die Gleichung nach (2.14), (2.11)(b) gilt. Aus ① folgt $\int |a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon| \,\mathrm{d}E_x \leqslant \frac{\varepsilon}{2} C_x$. Für $\varepsilon = 2^{-n}$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ ist $\int \left(\sum_{n=n_0}^\infty |a_{2^{-n+1}} - a_{2^{-n}}|\right) \mathrm{d}E_x \leqslant \sum_{n=n_0}^\infty \frac{2^{-n}}{2} C_x \leqslant \frac{1}{2} C_x < \infty$. Daher ist $\sum_{n=n_0}^\infty |a_{2^{-n+1}} - a_{2^{-n}}| < \infty$ E_x-fast überall. Weil $a_{2^{-N}} = \sum_{n=n_0}^N (a_{2^{-n}} - a_{2^{-n+1}}) + a_{2^{-n_0+1}}$, folgt $b = \lim_{N\to\infty} a_{2^{-N}}$ E_x-fast überall. Das Lemma von Fatou liefert $\int |b|^2 \,\mathrm{d}E_x = \int \lim\limits_{N\to\infty} |a_{2^{-N}}|^2 \,\mathrm{d}E_x \leqslant \liminf\limits_{N\to\infty} \int |a_{2^{-N}}|^2 \,\mathrm{d}E_x \leqslant C_x$ nach ②. Damit ist $x \in \mathcal{D}(B)$ und $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ gezeigt.

Für $0 < \varepsilon \leqslant 1$ ist $\left\|e^{A_\varepsilon}\right\| \leqslant \gamma_1$ mit $\gamma_1 \geq 1$ nach ② in (7), woraus $\left|e^{a_\varepsilon(h)}\right| \leqslant \gamma_1 \;\forall\; h \in \Delta$ folgt, weil die Gelfand Transformation ein Isomorphismus auf $\left(C(\Delta), \|\cdot\|_\infty\right)$ ist. Dann ist $\left|e^{b(h)}\right| \leqslant \gamma_1$ und somit

$$\operatorname{Re} b(h) \leqslant \gamma \quad \forall\, h \in \Delta, \tag{③}$$

wobei $\gamma := \ln \gamma_1$. Sei $e^{tB} := \int e^{tb} dE \in \mathcal{L}(H)$ nach (2.11)(a). Nach dem Spektralsatz (2.14) ist $e^{tA_\varepsilon} = \int e^{ta_\varepsilon} dE$, womit $e^{tA_\varepsilon} - e^{tB} = \int \left(e^{ta_\varepsilon} - e^{tb}\right) dE$ nach (2.11)(b). Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt $\left\|e^{tA_\varepsilon}x - e^{tB}x\right\|^2 = \int \left|e^{ta_\varepsilon} - e^{tb}\right|^2 dE_x \to 0$ für $\varepsilon = 2^{-n}, n \to \infty$ mit majorisierter Konvergenz, weil $\left|e^{ta_\varepsilon(h)} - e^{tb(h)}\right|^2 \leqslant 4\gamma_1^{2t}$. Daraus folgt aus (7)(d), dass $Q(t)x = e^{tB}x \;\forall\; x \in \mathcal{D}(A)$. Da $Q(t), e^{tB} \in \mathcal{L}(H)$ und $\mathcal{D}(A)$ dicht ist, gilt $Q(t) = e^{tB} \;\forall\; t \geqslant 0$.

Sei nun $x \in \mathcal{D}(B)$. Dann ist $\|A_\varepsilon x - Bx\|^2 = \left\|\left(\frac{1}{\varepsilon}(e^{\varepsilon B} - I) - B\right)x\right\|^2 = \int \left|\frac{e^{\varepsilon b}-1}{\varepsilon} - b\right|^2 dE_x$. Der Integrand verschwindet punktweise für jedes $h \in \Delta$ für $\varepsilon \to 0$. Weiter ist die Funktion $\frac{e^z-1}{z}$ auf der Halbebene $\operatorname{Re} z \leqslant \gamma$ beschränkt, denn $\left|\frac{e^z-1}{z}\right| = \left|\int_0^1 e^{\lambda z} d\lambda\right| \leqslant \int_0^1 \left|e^{\lambda z}\right| d\lambda \leqslant \int_0^1 e^{\gamma} d\lambda = e^{\gamma}$. Nach ③ ist damit $\left|\frac{e^{\varepsilon b}-1}{\varepsilon} - b\right|^2 = \left|\frac{e^{\varepsilon b}-1}{\varepsilon b} - 1\right|^2 |b|^2 \leqslant (e^\gamma + 1)^2 |b|^2$ für $0 < \varepsilon \leq 1$. Daher folgt mit majorisierten Konvergenz $\|A_\varepsilon x - Bx\| \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Also ist $x \in \mathcal{D}(A)$ und $B \subset A$. Insgesamt ist $A = B$ gezeigt.

Nun folgt noch mit (4.7)(c) und ③ sofort $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma\left(\int b dE\right) = \operatorname{ess} b(\Delta) \subset \{z : \operatorname{Re} z \leqslant \gamma\}$. — Schließlich ist $Q(t) = \int e^{t\lambda} dE(\lambda)$ für ein $t > 0$ oder für alle $t \geq 0$ nach (4.2)(f) genau dann unitär, wenn $|e^{t\lambda}| = 1$ für E–fast alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. wenn E–fast alle λ rein imaginär sind. Nach (4.2)(f) ist dies äquivalent dazu, dass $\frac{1}{i}A = \int \frac{1}{i}\lambda \, dE(\lambda)$ selbstadjungiert ist.

(b) Für $\lambda \in \sigma(A)$ ist $\left|e^{t\lambda}\right| \leqslant e^{t\gamma}$. Nach (2.16), (2.11)(a), (c), (b) ist $Q(t) = \int e^{t\lambda} dE(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$ normal, $Q(t+s) = \int e^{(t+s)\lambda} dE(\lambda) = \int e^{t\lambda} e^{s\lambda} dE(\lambda) = Q(t)Q(s)$ und $Q(0) = \int 1\, dE(\lambda) = I$. Weiter schließt man $\|Q(t)x - x\|^2 = \left\|\left(\int \left(e^{t\lambda} - 1\right) dE(\lambda)\right)x\right\|^2 = \int \left|e^{t\lambda} - 1\right|^2 dE_x(\lambda) \to 0$ für $t \to 0$ mit majorisierter Konvergenz, weil $\left|e^{t\lambda} - 1\right|^2 \to 0$ für $t \to 0$ und $\left|e^{t\lambda} - 1\right|^2 \leqslant (e^\gamma + 1)^2$ auf $\sigma(A)$ für $0 < t \leq 1$. Also ist Q eine normale stetige Halbgruppe. — Sei $\tilde{A}$ die infinitesimale Erzeugende von Q und sei $x \in \mathcal{D}(A)$. Wie oben gezeigt ist $\left|\frac{e^{t\lambda}-1}{t} - \lambda\right| \leqslant (e^\gamma + 1)|\lambda|$ auf $\{\operatorname{Re} \lambda \leqslant \gamma\}$ und $0 < t \leqslant 1$. Weiter ist $\int |\lambda|^2 dE_x(\lambda) < \infty$, weil $x \in \mathcal{D}(A)$, weshalb $\int \left|\frac{e^{t\lambda}-1}{t} - \lambda\right|^2 dE_x(\lambda) \to 0$ für $t \to 0$ mit majorisierter Konvergenz. Hieraus folgt $\tilde{A} \supset A$ und folglich $\tilde{A} = A$, weil A und $\tilde{A}$ normal sind. □

Wir erhalten das nächste Ergebnis als Korollar.

(11) Unitäre Halbgruppe (Satz von M.H. Stone). *Seien Q eine stetige Halbgruppe und $Q(t)$ unitär $\forall\; t \geq 0$. Dann ist $Q(t) = e^{tA}$ mit $\frac{1}{i}A$ selbstadjungiert. Sei E das Spektralmaß von A. Dann ist $U(t) := \int e^{t\lambda} dE(\lambda)$ unitär für alle*

$t \in \mathbb{R}$, $U(t+s) = U(t)\,U(s)$ *für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *und* $U(t) = Q(t)$, $U(-t) = Q(t)^*$ $\forall\ t \geq 0$.

Beweis. Weil $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ nach (10) ist auch $\sigma(-A) \subset i\mathbb{R}$. Der Rest der Behauptung folgt aus (10) und mit (2.11). $\square$

Demnach ist U eine einparametrige unitäre Gruppe, die Q fortsetzt. Man schreibt $U(t) = \mathrm{e}^{itS}$, $t \in \mathbb{R}$ mit $S := \frac{1}{i}A$. Man nennt S die infinitesimale Erzeugende von U.

Aufgabe 53 Seien U eine unitäre einparametrige Gruppe und M eine totale Menge in H, d.h. die lineare Hülle von M liegt dicht in H. Es gelte $\langle x, U(t)\,x\rangle \to \|x\|^2$ für $t \to 0$ und alle $x \in M$. Man zeige, dass U stetig ist.
Beweis. Für $x \in M$ ist $\|U(t)\,x - x\|^2 = \|U(t)\,x\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, U(t)\,x\rangle = 2\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, U(t)\,x\rangle \to 0$ für $t \to 0$ nach Voraussetzung. Also gilt $U(t)\,x \to x\ \forall\ x \in M$.

Zu $x \in H, \varepsilon > 0$ existiert ein y aus dem linearen Span von M mit $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$. Offenbar gilt $U(t)\,y \to y$. Weil $\|U(t)\,x - x\| \leqslant \|U(t)\,x - U(t)\,y\| + \|U(t)\,y - y\| + \|y - x\| \leqslant 2\|y - x\| + \|U(t)\,y - y\| \leqslant 2\varepsilon + \|U(t)\,y - y\|$ folgt $\limsup_{t\to 0} \|U(t)\,x - x\| \leqslant 2\varepsilon$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe 54 Seien U eine unitäre einparametrige Gruppe und S die infinitesimale Erzeugende von U. Sei $B \in L(H)$ mit $BU(t) = U(t)B\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass B mit den Projektionsoperatoren des Spektralmaßes von S vertauscht.
Beweis. Es gilt $B\frac{1}{is}\big(U(s) - I\big)x = \frac{1}{is}\big(U(s) - I\big)Bx\ \forall\ x \in H$. Ist $x \in \mathcal{D}(S)$, so ergibt der Grenzübergang $s \to 0$ auf der linken Seite BSx. Rechts existiert daher der Limes auch, was $Bx \in \mathcal{D}(S)$ bedeutet und SBx liefert. Daher ist $BS \subset SB$. Die Behauptung folgt nun aus (5.7). $\square$

Abschließend folgt ein Kriterium zur wesentlichen Selbstadjungiertheit. Ist T ein abgeschlossener Operator, D ein dichter Untervektorraum mit $D \subset \mathcal{D}(T)$ und $\overline{T|D} = T$, dann heißt D ein **Core** für T.

(12) Satz. *Seien T selbstadjungiert und D ein dichter Untervektorraum mit $D \subset \mathcal{D}(T)$, $\mathrm{e}^{itT}(D) \subset D$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist D ein Core für T.*

Beweis. Sei $S := T|D$. Es genügt zu zeigen, dass S wesentlich selbstadjungiert ist. Denn dann ist bereits $\overline{S} = T$ wegen $\overline{S} \subset \overline{T} = T$ und damit $T = T^* \subset \overline{S}^* = \overline{S} \subset T$.

Wir zeigen nach (3.32)(a), dass $\mathcal{N}(S^* \pm iI) = \{0\}$. Sei also $y \in \mathcal{D}(S^*)$ mit $(S^* - iI)\,y = 0$. Weiter seien $U(t) := \mathrm{e}^{itT}$, $x \in D$ und $f(t) := \langle U(t)\,x, y\rangle$ für $t \in \mathbb{R}$. Aus dem Hauptsatz folgt $\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\langle U(t+h)\,x, y\rangle - \langle U(t)\,x, y\rangle\right] = \left\langle \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U(h) - I)U(t)\,x, y\right\rangle = \langle iTU(t)\,x, y\rangle$, und nach Voraussetzung ist $\langle iTU(t)\,x, y\rangle = \langle iSU(t)\,x, y\rangle = -i\,\langle U(t)\,x, S^*y\rangle = -i\,\langle U(t)\,x, iy\rangle = \langle U(t)\,x, y\rangle$. Demzufolge gilt $f' = f$, weshalb $f(t) = f(0)\,\mathrm{e}^t$. Weiter ist f beschränkt, denn

$|f(t)| \leqslant \|U(t)x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$. Also ist $0 = f(0) = \langle x, y \rangle$. Weil D dicht in H liegt, folgt daraus $y = 0$. Ebenso folgt $N(S^* + iI) = \{0\}$. $\square$

7 Unitäre Äquivalenz unbeschränkter normaler Operatoren

Ringe orthogonaler Projektionsoperatoren

Wir beginnen mit Ringen orthogonaler Projektionsoperatoren auf einem Hilbertraum H. Ab (4) wird dieser als separabel vorausgesetzt.

(1) Ring von orthogonalen Projektionsoperatoren. Eine nichtleere Menge $\mathcal{R}$ von orthogonalen Projektionsoperatoren auf H heißt kommutativer σ-Ring in H, hier im Folgenden kurz Ring genannt, wenn für alle $P, Q, P_n \in \mathcal{R}$ gilt

(a) $PQ = QP$

(b) $PQ \in \mathcal{R}$, $P - PQ \in \mathcal{R}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathcal{R}$ falls $P_n P_m = 0$ für alle $n \neq m$.

Dabei ist $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ im Sinne der starken Operatortopologie gemeint. Aus der σ-Additivität folgt die Additivität wegen $0 \in \mathcal{R}$ nach (b).

Aufgabe 55 Für $P_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ existiert der $\lim_{n\to\infty} (P_1 \dots P_n)$ im starken Sinn und liegt in $\mathcal{R}$.

Beweis. Nach (1)(b) ist $Q_n := P_1 \cdots P_n - P_1 \cdots P_{n+1} \in \mathcal{R}$. Für $n > m$ folgt mit (1)(a) $Q_n Q_m = P_1 \cdots P_n P_1 \cdots P_m - P_1 \cdots P_{n+1} P_1 \cdots P_m - P_1 \cdots P_n P_1 \cdots P_{m+1} + P_1 \cdots P_{n+1} P_1 \cdots P_{m+1} = P_1 \cdots P_n - P_1 \cdots P_{n+1} - P_1 \cdots P_n + P_1 \cdots P_{n+1} = 0$. Weil $\sum_{n=1}^{N} Q_n = P_1 - P_1P_2 + P_1P_2 - P_1P_2P_3 + \dots - P_1 \cdots P_{N+1} = P_1 - P_1 \cdots P_{N+1}$, existiert $\lim_N (P_1 - P_1 \cdots P_{N+1})$ und liegt in $\mathcal{R}$ nach (1)(c). Hieraus folgt die Behauptung. □

(2) Verband der orthogonalen Projektionsoperatoren. Seien $\mathcal{P}$ eine Menge orthogonaler Projektionen. Man bezeichnet mit $\bigwedge_{P\in\mathcal{P}} P$ die orthogonale Projektion auf $\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{R}(P)$ und mit $\bigvee_{P\in\mathcal{P}} P$ die orthogonale Projektion auf den von $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{R}(P)$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum. — Für zwei orthogonale Projektionen P, Q bedeutet $P \leqslant Q$, dass $Q - P \geqslant 0$ oder äquivalent dazu, dass $\langle x, Px\rangle \leqslant \langle x, Qx\rangle \ \forall\, x$ oder auch dass $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(Q)$.

Aufgabe 56 Für $P_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sind $\bigwedge_n P_n \in \mathcal{R}$ und $\bigvee_n P_n \in \mathcal{R}$.

Beweis. Gemäß Aufgabe (55) betrachte $P := \lim_{n\to\infty} (P_1 \dots P_n)$. Offensichtlich ist $P_1 \dots P_m = \bigwedge_{j=1}^m P_j \geq \bigwedge_n P_n$, weshalb $P \geq \bigwedge_n P_n$. Umgekehrt folgt aus $Px = x$ offenbar $P_n x = x \;\forall\, n$, weshalb auch $P \leq \bigwedge_n P_n$ gilt.

Zum zweiten Teil der Behauptung definieren wir rekursiv $Q_1 := P_1$ und $Q_{n+1} := P_{n+1} - P_{n+1} \sum_{j=1}^n Q_j$, $n \geq 1$ und zeigen mit Induktion nach n, dass für $1 \leq m \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $Q_n \in \mathcal{R}$, $Q_n Q_m = 0$ falls $m < n$, und $P_m \leq \sum_{j=1}^n Q_j$.

Für $n = 1$ ist dies offensichtlich erfüllt. Aus der Induktionsvoraussetzung für n folgt mit (1)(c), dass $\sum_{j=1}^n Q_j \in \mathcal{R}$ und damit $Q_{n+1} \in \mathcal{R}$ wegen (1)(b). Weiter folgt für $m \leq n$, dass $Q_{n+1} P_m = P_{n+1} P_m - P_{n+1} P_m = 0$ und somit $Q_{n+1} Q_m = 0$ wegen $Q_m \leq P_m$. Schließlich ist $\sum_{j=1}^{n+1} Q_j = \sum_{j=1}^n Q_j + P_{n+1} - P_{n+1} \sum_{j=1}^n Q_j \geq P_{n+1}$.

Nach (1)(c) ist $Q := \sum_{n=1}^\infty Q_n \in \mathcal{R}$. Wegen $P_m \leq \sum_{j=1}^n Q_j \leq Q$ für $m \leq n$ gilt $\bigvee_n P_n \leq Q$. Wegen $Q_n \leq P_n \;\forall\, n$, gilt auch umgekehrt $Q \leq \bigvee_n P_n$. □

(3) Ringe und PV–Maße. *Ist E ein PV–Maß in H, dann ist offenbar $\mathcal{R} := \{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A}\}$ ein Ring mit $I \in \mathcal{R}$. — Sei umgekehrt $\mathcal{R}$ ein Ring mit $I \in \mathcal{R}$. Dann existiert ein PV–Maß E in H derart, dass $\mathcal{R} = \{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A}\}$. Ist H separabel, dann ist $\mathcal{R} = \{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{B}\}$, wobei E das Spektralmaß der von $\mathcal{R}$ erzeugten Unter-C^*-Algebra A von $\mathcal{L}(H)$ ist.*

Beweis. Weil $\mathcal{R}$ kommutativ ist, ist auch A kommutativ. Bezeichne $X := \Delta(A)$ den Strukturraum von A versehen mit der kompakten Gelfand Topologie und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen von X. Nach dem Spektralsatz (2.14) existiert ein reguläres PV-Maß E auf $(X, \mathcal{B})$ in H derart, dass $T = \int \hat{T} \mathrm{d}E$ für alle $T \in A$. Ist $P \in \mathcal{R} \subset A$ und $P = \int \hat{P} \mathrm{d}E$, dann gilt nach (2.11)(f), dass $\hat{P} = 1_\Gamma$ E–fast überall für eine Borelmenge $\Gamma \in \mathcal{B}$, womit $P = E(\Gamma)$. Also ist $\mathcal{R} \subset \{E(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{B}\}$. Sei

$$\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{B} : E(\Gamma) \in \mathcal{R}\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine Unter-σ–algebra von $\mathcal{B}$ ist, die die E-Nullmengen und die Baireschen Mengen von X entält: Gilt $E(\Gamma) = 0$ für $\Gamma \in \mathcal{B}$, so ist $\Gamma \in \mathcal{A}$, denn $0 \in \mathcal{R}$. Insbesondere ist $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ist $\Gamma \in \mathcal{A}$, so ist $E(\Gamma) \in \mathcal{R}$ und damit $\mathcal{R} \ni I - E(\Gamma) = E(X \backslash \Gamma)$, weshalb $X \backslash \Gamma \in \mathcal{A}$. Seien $\Gamma_n \in \mathcal{A}$. Dann sind $P_n := E(\Gamma_n) \in \mathcal{R}$ und damit $\bigvee_n P_n \in \mathcal{R}$, weshalb $\bigcup_n \Gamma_n \in \mathcal{A}$, denn $E(\bigcup_n \Gamma_n) = \bigvee_n E(\Gamma_n)$. Hieraus folgt bereits, dass wie behauptet $\tilde{E} := E|\mathcal{A}$ ein PV-Maß in H ist mit

$$\mathcal{R} = \left\{\tilde{E}(\Gamma) : \Gamma \in \mathcal{A}\right\}.$$

Es wird nun noch gezeigt, dass $\mathcal{A}$ die Baireschen Mengen enthält. Sei $\tilde{A} := \left\{\int f \,\mathrm{d}\tilde{E} : f : X \to \mathbb{C}\ \mathcal{A}\text{–messbar, beschränkt}\right\}$. Nach (2.12) ist $\tilde{A}$ eine Unter-C^*–Algebra von $\mathcal{L}(H)$, die von den darin enthaltenen Projektionen erzeugt wird. Es ist $\mathcal{R} \subset \tilde{A}$, denn $\tilde{E}(\Gamma) = \int 1_\Gamma \,\mathrm{d}\tilde{E}$ für $\Gamma \in \mathcal{A}$. Damit ist $A \subset \tilde{A}$, weil A von $\mathcal{R}$ erzeugt wird. Sei nun $P \in \tilde{A}$ eine orthogonale Projektion. Dann ist $P = \int 1_\Gamma \,\mathrm{d}\tilde{E}$ mit $\Gamma \in \mathcal{A}$ nach (2.11)(f). Also ist $P = \tilde{E}(\Gamma) \in \mathcal{R}$. Das beweist $A = \tilde{A}$. — Sei nun $f : X \to \mathbb{C}$ stetig. Nach (1.37), (2.14) ist $\int f \mathrm{d}E \in A$. Damit existiert ein

$\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-messbar und beschränkt mit $\int f \mathrm{d}E = \int \tilde{f} \mathrm{d}\tilde{E}$. Da $\int \tilde{f} \mathrm{d}\tilde{E} = \int \tilde{f} \mathrm{d}E$, folgt nach (2.11)(d), dass $\tilde{f} = f$ E-fast überall. Da $\mathcal{A}$ die E-Nullmengen enthält, folgt, dass f $\mathcal{A}$-messbar ist. Also sind alle $f \in C(X)$ $\mathcal{A}$-messbar, weshalb $\mathcal{A}$ die Baireschen Mengen enthält.

Sei nun H separabel. Wähle $\{x_n \in H\backslash\{0\} : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H. Dann ist $\lambda := \sum_n 2^{-n} \|x_n\|^{-2} E_{x_n}$ ein normiertes Maß auf $(X, \mathcal{B})$, das die gleichen Nullmengen wie E hat. Außerdem ist λ regulär, weil E regulär ist. Damit existiert zu $\Gamma \in \mathcal{B}$ eine Bairesche Menge Δ mit $\lambda(\Gamma \vartriangle \Delta) = 0$. Es folgt $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

(Ohne direkten Bezug auf die Bairschen Mengen zu nehmen, kann man auch wie folgt schließen. Zu $\Gamma \in \mathcal{B}$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren U_n offen und K_n kompakt mit $K_n \subset \Gamma \subset U_n$ und $\lambda(U_n \backslash K_n) \subset n^{-1}$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert $h_n : X \to [0,1]$ stetig mit $h_n|K_n = 1$ und $h_n|U_n = 0$. Damit gilt $\int |1_\Gamma - h_n| \,\mathrm{d}\lambda \leqslant n^{-1}$, was $h_n \to 1_\Gamma$ in L^1_λ bedeutet. Damit existiert eine Teilfolge von (h_n), die punktweise λ-fast überall gegen 1_Γ konvergiert. Wie oben gezeigt sind die h_n als stetige Funktionen $\mathcal{A}$-messbar. Damit ist auch 1_Γ $\mathcal{A}$-messbar, d.h. $\Gamma \in \mathcal{A}$.) □

Für den Rest dieses Kapitels ist H stets ein **separabler Hilbertraum**.

Zerlegung in Ringe mit Multiplizität

(4) Maximaloperator eines Rings. *Sei $M := \bigvee_{P \in \mathcal{R}} P$. Dann ist $M \in \mathcal{R}$. Offenbar ist $P \leqslant M$ für alle $P \in \mathcal{R}$. M* heißt der Maximaloperator von $\mathcal{R}$.

Beweis. Sei $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ dicht in H und für $m \in \mathbb{N}$ seien $P_{mn} \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so gewählt, dass $\lim_n \|P_{mn} x_m\| = \sup_{P \in \mathcal{R}} \|P x_m\|$. Dann ist $M := \bigvee_{mn} P_{mn} \in \mathcal{R}$ nach Aufgabe (56) und erfüllt offenbar $\|M x_m\| = \sup_{P \in \mathcal{B}} \|P x_m\|$ für alle m. Daraus folgt $\|Mx\| = \sup_{P \in \mathcal{R}} \|Px\|$ für alle $x \in H$, denn zu $x \in H, \varepsilon > 0$ existiert ein m mit $\|x - x_m\| \leqslant \varepsilon$, womit $\|Px\| \leqslant \|P(x - x_m)\| + \|P x_m\| \leqslant \|x - x_m\| + \|M x_m\| \leqslant \varepsilon + \|M(x_m - x)\| + \|Mx\| \leqslant 2\varepsilon + \|Mx\|$ und somit $\|Px\| \leqslant \|Mx\|$. □

(5) Nebenring. *Sei K eine orthogonale Projektion, die mit dem Ring $\mathcal{R}$ vertauscht, d.h. $KP = PK$ für alle $P \in \mathcal{R}$. Dann ist $K\mathcal{R} := \{KP : P \in \mathcal{R}\}$ ein Ring und KM sein Maximaloperator.* Man nennt $K\mathcal{R}$ den Nebenring zu K von $\mathcal{R}$.

Beweis. Die Eigenschaften (1)(a), (b) eines Rings gelten offenbar für $K\mathcal{R}$. Zu (1)(c) seien P_n, $n \in \mathbb{N}$ mit $(KP_m)(KP_n) = 0$ für $m \neq n$. Seien Q_n, $n \in \mathbb{N}$ wie im Beweis zur Aufgabe (56) definiert. Mit Induktion folgt $KP_n = KQ_n$ $\forall$ n, denn $Q_1 = P_1$ und $KQ_{n+1} = KP_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (KP_{n+1})(KQ_j) = KP_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (KP_{n+1})(KP_j) = KP_{n+1}$ aufgrund der Induktionsvoraussetzung. Damit liegt $\sum_n KP_n = \sum_n KQ_n = K\sum_n Q_n$ in $K\mathcal{R}$ wegen $\sum_n Q_n \in \mathcal{R}$. — Da $KM \in K\mathcal{R}$, $KP \leq KM \ \forall\ P \in \mathcal{R}$, ist KM der Maximaloperator von $K\mathcal{R}$. $\square$

(6) Isomorphie und Orthogonalität von Nebenringen. Seien $K\mathcal{R}$ und $L\mathcal{R}$ Nebenringe von $\mathcal{R}$.

(a) $K\mathcal{R}$ und $L\mathcal{R}$ nennt man isomorph und schreibt $K\mathcal{R} \simeq L\mathcal{R}$, wenn

$$KP = 0 \Leftrightarrow LP = 0 \quad \forall\ P \in \mathcal{R}.$$

(b) $K\mathcal{R}$ und $L\mathcal{R}$ nennt man orthogonal und schreibt $K\mathcal{R} \perp L\mathcal{R}$, wenn

$$(KP)\,(LQ) = 0 \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{R}.$$

Aufgabe 57 Seien $K\mathcal{R}$ und $L\mathcal{R}$ Nebenringe. Man zeige:

(a) $K\mathcal{R} = L\mathcal{R} \Leftrightarrow KM = LM$.

(b) $K\mathcal{R} \perp L\mathcal{R} \Leftrightarrow (\mathrm{K}M)\,(LM) = 0$.

Beweis. (a) Sei $KM = LM$. Dann gilt $KP = KMP = LMP = LP \ \forall\ P \in \mathcal{R}$. — Die Umkehrung ist klar, weil die Maximaloperatoren übereinstimmen.

(b) Sei $(KM)\,(LM) = 0$. Wegen $KP \leqslant KM$ und $LQ \leqslant LM$ folgt $(KP)\,(LQ) = 0$ für alle $P, Q \in \mathcal{R}$. — Die Umkehrung ist klar. $\square$

Aufgabe 58 Zwei Nebenringe $K\mathcal{R}$ und $L\mathcal{R}$ sind genau dann isomorph, wenn die Abbildung $K\mathcal{R} \to L\mathcal{R},\ KP \mapsto LP$ wohldefiniert und ein Ringisomorphismus ist.

Beweis. Wenn die angegebene Abbildung ein Ringisomorphismus ist, dann folgt aus $KP = 0$, dass $KP + KP = KP$ und somit $LP + LP = LP$, weshalb $LP = 0$. Ebenso folgt $KP = 0$ aus $LP = 0$. Damit ist $K\mathcal{R} \simeq L\mathcal{R}$.

Sei nun $K\mathcal{R} \simeq L\mathcal{R}$. Aus $KP = KQ$ für $P, Q \in \mathcal{R}$ folgt $KP = KPP = KQP$, weshalb $K\,(P - QP) = 0$. Nach Voraussetzung ist $L\,(P - QP) = 0$ und damit $LP = LQP$. Ebenso gilt $LQ = LPQ$. Da $PQ = QP$, folgt $LP = LQ$, was die Wohldefiniertheit der Abbildung zeigt. Weil umgekehrt aus $LP = LQ$ in gleicher Weise $KP = KQ$ folgt, ist die Abbildung injektiv. Offensichtlich ist sie surjektiv. Sie ist produkttreu, denn $(KP)\,(KQ) = KPQ \mapsto LPQ = (LP)\,(LQ)$. — Schließlich sei $(KP_n)\,(KP_m) = 0$ für $m \neq n$. Dann ist auch $(LP_n)\,(LP_m) = L(P_nP_m) = 0$ für $m \neq n$, weil $K(P_nP_m) = 0$. Die Operatoren Q_n, $n \in \mathbb{N}$ aus dem Beweis von Aufgabe (56) erfüllen $KQ_n = KP_n$, wie im Beweis von (5) gezeigt, und daher ebenso $LQ_n = LP_n$. Damit folgt $\sum_{n=1}^{\infty} KP_n = \sum_{n=1}^{\infty} KQ_n = K\sum_{n=1}^{\infty} Q_n \mapsto L\sum_{n=1}^{\infty} Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} LQ_n = \sum_{n=1}^{\infty} LP_n$, weil $Q_mQ_n = 0$ für $m \neq n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{R}$. $\square$

(7) Multiplizität. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Der Index $\mathrm{m}(\mathcal{R}) \in \mathbb{N}$ bedeutet, dass es $n = \mathrm{m}(\mathcal{R})$ zu $\mathcal{R}$ isomorphe und paarweise orthogonale Nebenringe $K_1\mathcal{R}, \ldots, K_n\mathcal{R}$ von $\mathcal{R}$ gibt, aber keine $n+1$ solche Nebenringe. Gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ solche Nebenringe, dann setzt man $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = \infty$. Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Man sagt, dass $\mathcal{R}$

die Multiplizität n hat oder n-fach ist, wenn $\mathrm{m}(P\mathcal{R}) = n$ für alle $P \in \mathcal{R}$ mit $P \neq 0$.

(8) Index m($\mathcal{R}$) nichtfallend 1. *Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n < \mathrm{m}(\mathcal{R})$, dann ist $n < \mathrm{m}(P\mathcal{R})\ \forall\ P \in \mathcal{R}$. Gilt $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = \infty$, so ist $\mathcal{R}$ ∞-fach.*

Beweis. Voraussetzungsgemäß existieren $K_1\mathcal{R}, \ldots, K_{n+1}\mathcal{R}$ Nebenringe von $\mathcal{R}$ mit $K_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$ und $K_i\mathcal{R} \perp K_j\mathcal{R}$ für $i, j = 1, \ldots, n+1$, $i \neq j$. Sei $P \in \mathcal{R}$. Dann sind $K_i\,(P\mathcal{R})$, $i = 1, \ldots, n+1$ Nebenringe von $P\mathcal{R}$ mit $K_i\,(P\mathcal{R}) \perp K_j\,(P\mathcal{R})$ für $i \neq j$. Auch gilt $K_i\,(P\mathcal{R}) \simeq P\mathcal{R}$ für jedes i, denn ist $PQ = 0$, so ist $K_i\,(PQ) = 0$, und ist umgekehrt $K_i\,(PQ) = 0$, dann ist $PQ = 0$, denn $PQ \in \mathcal{R}$ und $K_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$. Die restliche Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung. □

(9) Index m($\mathcal{R}$) nichtfallend 2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $L_1\mathcal{R}, L_2\mathcal{R}$,... abzählbar viele Nebenringe von $\mathcal{R}$ mit $L_kL_l = 0$ für $k \neq l$. Sei $L := \sum_k L_k$. Dann gilt

$$\mathrm{m}(L_k\mathcal{R}) > n \quad \forall\ k \ \Rightarrow\ \mathrm{m}(L\mathcal{R}) > n.$$

Beweis. Weil alle L_k mit $\mathcal{R}$ vertauschen, vertauscht auch L mit $\mathcal{R}$. Damit ist $L\mathcal{R}$ ein Nebenring. Für jedes k seien $K_k^i\,(L_k\mathcal{R})\,, i = 1, \ldots, n+1$ paarweise orthogonale zu $L_k\mathcal{R}$ isomorphe Nebenringe von $L_k\mathcal{R}$. Für alle i, k vertauschen $\tilde{K}_k^i := K_k^i L_k M$ mit $\mathcal{R}$ und erfüllen $\tilde{K}_k^i\tilde{K}_l^j = \delta_{kl}\delta_{ij}\tilde{K}_k^i$, denn $\tilde{K}_k^i P = K_k^i L_k M P = L_k M P K_k^i = P L_k M K_k^i = P K_k^i L_k M = P\tilde{K}_k^i$ und $\tilde{K}_k^i\tilde{K}_l^j = K_k^i L_k M K_l^j L_l M = K_k^i L_k M L_l M K_l^j = K_k^i \delta_{kl} L_k M L_k M K_k^j = \delta_{kl}\delta_{ij}\tilde{K}_k^i$. Für jedes i ist $Q_i := \sum_k \tilde{K}_k^i$ eine orthogonale Projektion, da $\tilde{K}_k^i \perp \tilde{K}_l^i$ für $k \neq l$, und vertauscht mit $\mathcal{R}$, weil $\tilde{K}_k^i$ für jedes k mit $\mathcal{R}$ vertauscht. Außerdem ist $Q_i \leqslant LM$, denn $\tilde{K}_k^i = K_k^i L_k M = L_k M K_k^i \leqslant LM\ \forall\ k$. Weiter ist $Q_i \perp Q_j$ für $i \neq j$, da $\tilde{K}_k^i \perp \tilde{K}_l^j$ für jedes k, l und $i \neq j$. Damit sind $Q_i\mathcal{R}$ paarweise orthogonale Nebenringe von $L\mathcal{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q_i\mathcal{R} \simeq L\mathcal{R}$ für $i = 1, \ldots, n+1$: $Q_iP = 0 \Leftrightarrow \tilde{K}_k^i P = 0$ $\forall\ k \Leftrightarrow K_k^i L_k P = 0\ \forall\ k \Leftrightarrow L_k P = 0$ weil $K_k^i\,(L_k\mathcal{R}) \simeq L_k\mathcal{R}\ \forall\ k \Leftrightarrow LP = 0$. □

(10) Index m($\mathcal{R}$) nichtfallend 3. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $P_1\mathcal{R}, P_2\mathcal{R}, \ldots$ abzählbar viele Nebenringe von $\mathcal{R}$ mit $P_k \in \mathcal{R}$. Sei $P := \bigvee_k P_k$. Dann gilt*

$$\mathrm{m}(P_k\mathcal{R}) > n \quad \forall k \ \Rightarrow\ \mathrm{m}(P\mathcal{R}) > n.$$

Beweis. Wie im Beweis zu Aufgabe (56) definieren wir rekursiv $Q_1 := P_1$ und $Q_{k+1} := P_{k+1} - P_{k+1}\sum_{j=1}^k Q_j$. Wie dort gezeigt, gelten $Q_k \in \mathcal{R}\ \forall\ k$, $Q_kQ_l = 0$ für $k \neq l$ und $P = \sum_{k=1}^\infty Q_k$. Daraus folgt auch $Q_k \in P_k\mathcal{R}\ \forall\ k$. Nun ist $Q_k(P_k\mathcal{R}) = Q_k\mathcal{R}$. Wegen (8) gilt daher $\mathrm{m}(Q_k\mathcal{R}) > n\ \forall\ k$. Die Behauptung folgt nun aus (9). □

(11) Zerlegungslemma. *Sei $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $Q, R \in \mathcal{R}$ mit $QR = 0$ und $Q + R = M$ derart, dass $Q\mathcal{R}$ n-fach und $\mathrm{m}(R\mathcal{R}) > n$.*

Beweis. Setze $\mathcal{R}_1 := \{P \in \mathcal{R} : \mathrm{m}(P\mathcal{R}) > n\}$. Da $0 \in \mathcal{R}_1$, ist $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{R}_1$ ein Ring ist. (a) $\mathcal{R}_1$ ist offensichtlich kommutativ. (b) Für $P \in \mathcal{R}_1$ und $Q \in \mathcal{R}$ ist $\mathrm{m}(P\mathcal{R}) > n$ und daher $\mathrm{m}(Q\,(P\mathcal{R})) > n$ nach (8). Weil $Q\,(P\mathcal{R}) = (QP)\,\mathcal{R}$ folgt $QP \in \mathcal{R}_1$. Weiter ist $P - PQ = (P - PQ)\,P = Q'P$ mit $Q' := P - PQ \in \mathcal{R}$, weshalb wie gerade gezeigt $Q'P \in \mathcal{R}_1$. (c) Seien $P_n \in \mathcal{R}_1$, $n \in \mathbb{N}$ mit $P_n P_m = 0$ für $n \neq m$. Dann ist $\sum_n P_n \in \mathcal{R}_1$ nach (10).

Sei nun M_1 der Maximaloperator von $\mathcal{R}_1$. Dann ist $\mathrm{m}(M_1\mathcal{R}) > n$. Weiter ist $Q := M - M_1 \in \mathcal{R}$ ungleich 0, denn sonst würde $M = M_1$ und damit der Widerspruch $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = \mathrm{m}(M_1\mathcal{R}) > n$ folgen. Also ist $M_1 + Q > M_1$, weshalb $Q \notin \mathcal{R}_1$ und daher $\mathrm{m}(Q\mathcal{R}) \leq n$ nach Definition von $\mathcal{R}_1$. Andererseits ist $\mathrm{m}(Q\mathcal{R}) \geq n$ nach (8), weil $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = n$. Zusammen folgt also $\mathrm{m}(Q\mathcal{R}) = n$. — Sei nun $P \in Q\mathcal{R}$ mit $P \neq 0$. Nach (8) ist $\mathrm{m}(PQ\mathcal{R}) \geqslant n$. Weil $P = PQ$ mit $P \neq 0$, ist $P \nleqslant M_1$, weshalb $P \notin \mathcal{R}_1$ und daher $\mathrm{m}(PQ\mathcal{R}) \leqslant n$. Also gilt $\mathrm{m}(PQ\mathcal{R}) = n$. Damit ist $Q\mathcal{R}$ n-fach. Es bleibt $R := M_1$ zu setzen. □

(12) Zerlegungssatz für Ringe. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Dann existieren Projektionsoperatoren $P_\infty, P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit folgenden Eigenschaften für $i, j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:*

(a) *$P_i \perp P_j$ für $i \neq j$.*

(b) *$\bigvee_{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} P_j = M$.*

(c) *$P_i\mathcal{R}$ ist entweder i-fach oder $P_i = 0$.*

(d) *Ist $P \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ mit $P\mathcal{R}$ i-fach, dann ist $P \leqslant P_i$.*

Beweis. Falls $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = \infty$, ist $\mathcal{R}$ ∞-fach nach (8). In diesem Fall setze $P_\infty := M$, $P_n := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit (a)–(d) erfüllt sind.

Sei nun $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = n_1 \in \mathbb{N}$. Nach (11) existiert ein $Q_1 \in \mathcal{R}$ mit $Q_1\mathcal{R}$ n_1-fach und $\mathrm{m}(R_1\mathcal{R}) > n_1$ für $R_1 := M - Q_1$. Ist $\mathrm{m}(R_1\mathcal{R}) = \infty$, setze man $P_\infty := R_1$, $P_{n_1} := Q_1$, $P_n := 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_1\}$ und (a)–(c) sind erfüllt.

Anderenfalls wird dieses Verfahren fortgesetzt. Existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $R_{i+1}\mathcal{R}$ ∞-fach, setze $P_\infty := R_{i+1}$, $P_{n_\iota} := Q_\iota$ für $\iota = 1, \ldots, i+1$, $P_n := 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \ldots, n_{i+1}\}$ und (a)–(c) sind erfüllt.

Anderenfalls setze $P_{n_i} := Q_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $P_n := 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$, $P_\infty := M - \sum_{i=1}^\infty P_i$. Es wird nun nachgewiesen, dass $P_\infty\mathcal{R}$ ∞-fach ist. Damit gelten dann (a)–(c). Angenommen $\mathrm{m}(P_\infty\mathcal{R}) =: n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $n_i > n$. Nach Konstruktion ist $\mathrm{m}((M - \sum_{\iota=1}^{n_i} P_\iota)\,\mathcal{R}) > n_i$. Da $P_\infty \leqslant M - \sum_{\iota=1}^{n_i} P_\iota$ nach Definition von P_∞, ist $P_\infty \in (M - \sum_{\iota=1}^{n_i} P_\iota)\,\mathcal{R}$ und daher $\mathrm{m}(P_\infty\mathcal{R}) > n_i$ nach (8), im Widerspruch zur Annahme.

Es bleibt die Eindeutigkeitsaussage (d) zu beweisen. Seien $i \in \{\infty, 1, 2, \ldots\}$ und $P \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ mit $P\mathcal{R}$ i-fach. Angenommen $P \nleqslant P_i$. Dann ist $(P - P_iP) \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ und somit $(P - P_iP)\,\mathcal{R}$ i-fach wegen $P - P_iP \leqslant P$. Weiter ist $P - P_iP = P\,(M - P_i) \leqslant M - P_i$. Es ist auch $P - P_iP \leqslant M - P_\kappa$ für jedes $\kappa = 1, \ldots, i-1$, da sonst $P - PP_i \nleqslant (M - P_\kappa)\,(P - P_iP) = P - P_\kappa P - P_iP$ wegen $P_\kappa \perp P_i$, weshalb $P_\kappa P \neq 0$ und damit $P_\kappa P\mathcal{R}$ sowohl i-fach wie κ-fach wäre. Also ist $P - P_i P \leq R_i$ mit $R_i := M - \sum_{\kappa=1}^{i} P_\kappa$. Anschließend wird $\mathrm{m}(R_i\mathcal{R}) > i$ gezeigt. Daraus folgt mit (8) der Widerspruch $\mathrm{m}((P - P_iP)\mathcal{R}) > i$.

Angenommen $\mathrm{m}(R_i\mathcal{R}) \leq i$. Nach (11) existiert $Q \in R_i\mathcal{R}$ mit $Q(R_i\mathcal{R})$ k–fach für ein $k \leq i$. Damit ist $QR_i \neq 0$. Beachte, dass $R_i = M - \sum_{\kappa=1}^{i} P_\kappa = P_\infty + \sum_{\kappa > i} P_\kappa$. Daher existiert $j \in \{\infty, i+1, i+2, \dots\}$ mit $QR_iP_j \neq 0$. Das ergibt den Widerspruch, dass $QR_iP_j\mathcal{R}$ sowohl k–fach wie j–fach ist. $\square$

Analyse der Ringe mit Multiplizität

(13) Separierender Vektor. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Ein Vektor $x \in H$ heißt separierend für $\mathcal{R}$, wenn für alle $P \in \mathcal{R}$ gilt: $Px = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

(14) Existenz eines separierenden Vektors. *$\mathcal{R}$ besitzt einen separierenden Vektor in $M(H)$.*

Beweis. Sei $\{x_1, x_2, \dots\}$ dicht in $M(H)$. Setze $y_1 := x_1$. Dann seien V_1 der von $\{Py_1 : P \in \mathcal{R}\}$ erzeugte abgeschlossene Unterraum und K_1 die orthogonale Projektion auf V_1. Nun seien $y_1, \dots, y_n$ und $V_1, \dots, V_n$ sowie $K_1, \dots, K_n$ bereits definiert. Dann setzt man $y_{n+1} := x_{n+1} - (K_1 + \dots + K_n)\, x_{n+1}$, V_{n+1} den von $\{Py_{n+1} : P \in \mathcal{R}\}$ erzeugten abgeschlossene Unterraum und K_{n+1} die orthogonale Projektion auf V_{n+1}. Auf diese Weise erhält man eine Folge $(V_i)_i$ abgeschlossener Unterräume von $M(H)$, die invariant unter $\mathcal{R}$ sind, paarweise orthogonal sind und $\bigoplus_i V_i = M(H)$ erfüllen. Vergleiche (2.18).

Sei nun $z_i := \frac{y_i}{\|y_i\|}$ falls $y_i \neq 0$ und $z_i = 0$ sonst. Setze $z := \sum_i \frac{1}{i} z_i \in M(H)$. Für $P \in \mathcal{R}$ gilt dann: $Pz = 0 \Leftrightarrow \sum_i \frac{1}{i} Pz_i = 0 \Leftrightarrow Pz_i = 0$ (da $Pz_i \in V_i \ \forall\, i$) $\Leftrightarrow Py_i = 0 \ \forall\, i \Leftrightarrow 0 = QPy_i = PQy_i = 0 \ \forall\, Q \in \mathcal{R} \ \forall\, i \Leftrightarrow P(V_i) = \{0\} \ \forall\, i \Leftrightarrow P = 0$. Also ist z ein separierender Vektor für $\mathcal{R}$. $\square$

Aufgabe 59 Seien E ein PV-Maß auf Z in H und z ein separierender Vektor für E, d.h. für den Ring $\{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A}\}$. Dann gilt: $E(\Delta) = 0 \Leftrightarrow E_z(\Delta) = 0$ für alle $\Delta \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 60 Seien $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und W ein Hilbertraum $\neq \{0\}$. Gebe für den Fall, dass μ σ-endlich ist, einen separierenden Vektor für E^{kan} auf $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ in $L^2_\mu(Z, W)$ an. Gibt es einen solchen, falls μ nicht σ-endlich ist?

(15) Basis eines Rings. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $B \subset H \setminus \{0\}$. Dann heißt B eine $\mathcal{R}$–Basis, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) Jedes $x \in B$ ist separierend für $\mathcal{R}$.

(b) $\langle x, Py \rangle = 0 \;\forall\; P \in \mathcal{R} \;\forall\; x, y \in B,\; x \neq y$.

(c) Der von $\{Px : P \in \mathcal{R}, x \in B\}$ erzeugte abgeschlossene Unterraum ist $M(H)$.

Zu bemerken ist, dass eine $\mathcal{R}$–Basis höchstens abzählbar ist, da H separabel ist.

(16) Basis für einen n–fachen Ring. *Sei $\mathcal{R}$ n-fach für $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine $\mathcal{R}$-Basis aus n Elementen.*

Beweis. Seien $K_1\mathcal{R}, \ldots, K_n\mathcal{R}$ paarweise orthogonale, zu $\mathcal{R}$ isomorphe Nebenringe. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ohne Einschränkung sei K_i der Maximaloperator von $K_i\mathcal{R}$. Sei x_i ein separierender Vektor für $K_i\mathcal{R}$ in $K_i(H)$. Da $\mathcal{R} \neq \{0\}$ ist $x_i \neq 0$.

Wir zeigen jetzt, dass $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine $\mathcal{R}$-Basis ist. (a) Jedes x_i ist separierend für $\mathcal{R}$. In der Tat folgt aus $Px_i = 0$, dass $K_iPx_i = 0$, weshalb $K_iP = 0$, da x_i separierend für $K_i\mathcal{R}$ ist. Somit ist $P = 0$, da $K_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$. (b) Seien $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ und $P \in \mathcal{R}$. Dann ist $\langle x_i, Px_j \rangle = 0$, da $x_i \in K_i\,(H)$, $Px_j \in K_j\,(H)$. (c) Sei L_i die orthogonale Projektion auf den von $\{Px_i : P \in \mathcal{R}\}$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Offensichtlich ist $\bigvee_{i=1}^n L_i \leqslant M$. Es ist bleibt $\bigvee_{i=1}^n L_i \geq M$ zu zeigen.

Zunächst gilt $L_iL_j = 0$ für $i \neq j$, weil $L_i \leqslant K_i$. Dann vertauscht L_i mit $\mathcal{R}$, weil $QL_i(Px_i) = QPx_i = L_i(QP_ix_i) = L_iQ(Px_i) \;\forall\; Q, P \in \mathcal{R}$. Schließlich ist $L_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$, denn aus $L_iP = 0$ folgt $0 = L_iPx_i = Px_i = K_iPx_i$, woraus $K_iP = 0$, da x_i separierend für $K_i\mathcal{R}$ ist, und damit $P = 0$, da $K_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$.

Jetzt sei angenommen, dass $M - \sum_{i=1}^n L_i > 0$. Offensichtlich ist $\mathcal{R}_0 := \{P \in \mathcal{R} : (M - \sum L_i)\,P = 0\}$ ein in $\mathcal{R}$ enthaltener Ring. Sei M_0 der Maximaloperator von $\mathcal{R}_0$. Da $M_0 \in \mathcal{R}$ ist $(M - \sum L_i)\,M_0 = 0$ und daher $M_0 \leqslant \sum L_i$. Damit ist $M - M_0 > 0$. Weiter ist $M_0 = \sum L_i$ nicht möglich, da ansonsten $M - M_0 \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ und $L_i\,(M - M_0) = 0$ wäre, obwohl $L_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$. Also ist $M_0 < \sum L_i$.

Betrachte nun die $n+1$ paarweise orthogonalen Nebenringe $(M - \sum L_i)\,\mathcal{R}$, $L_i\,(M - M_0)\,\mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n$ zu dem Ring $(M - M_0)\,\mathcal{R}$. Da $L_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}$ folgt $L_i\,(M - M_0)\,\mathcal{R} \simeq (M - M_0)\,\mathcal{R}$. Es ist auch $(M - \sum L_i)\,\mathcal{R} \simeq (M - M_0)\,\mathcal{R}$, denn $(M - \sum L_i)\,P = 0 \Leftrightarrow P \in \mathcal{R}_0 \Leftrightarrow P \leqslant M_0 \Leftrightarrow (M - M_0)\,P = 0$. Also ist $\mathrm{m}((M - M_0)\,\mathcal{R}) \geqslant n + 1$, obwohl $\mathcal{R}$ n-fach ist. Das ist ein Widerspruch. □

(17) Kontrollmaß für ein PV–Maß u.a. Seien E ein PV-Maß auf dem Messraum $(Z, \mathcal{A})$ in den separablen Hilbertraum H und $\mathcal{R} := \{E\,(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A}\}$ (siehe (3)). Die Begriffe Nebenring, Index $\mathrm{m}(E)$, Multiplizität, separierender Vektor, E-Basis u.s.w. für E werden über den Ring $\mathcal{R}$ definiert. Ein Maß λ auf $(Z, \mathcal{A})$ heißt Kontrollmaß für E, wenn λ σ-endlich ist und die gleichen Nullmengen wie E hat. O.E. kann λ auch endlich angenommen werden, weil es zu einem σ-endlichen Maß stets ein äquivalentes endliches gibt.

(18) PV–Maß mit Basis. *Das PV–Maß E in H besitze eine E-Basis B. Sei W ein d-dimensionaler Hilbertraum mit $d := |B| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und sei λ ein Kontrollmaß für E. Dann ist E bis auf einen Hilbertraum Isomorphismus gleich E^{kan} in $L^2_\lambda(Z, W)$.*

Beweis. Ist $x \in H$ separierend für E, dann ist E_x offensichtlich ein Kontrollmaß von E. Kontrollmaße sind äquivalent, d.h. sie haben die gleichen Nullmengen. Nach dem Satz von Radon/Nikodym folgt daher, dass für jedes $x \in B$ eine messbare Dichte $\rho_x : Z \to]0, \infty[$ mit $E_x = \rho_x \lambda$ existiert. Damit ist $L^2(\lambda) \to L^2(E_x), f \mapsto \rho_x^{-1/2} f$ ein Hilbertraum Isomorphismus, weil $\int |\rho_x^{-1/2} f|^2 \mathrm{d}E_x = \int |f|^2 \rho_x^{-1} \mathrm{d}E_x = \int |f|^2 \mathrm{d}\rho_x^{-1} E_x = \int |f|^2 \mathrm{d}\lambda$. Mit (2.20) folgt, dass $\bigoplus_{x \in B} L^2(\lambda) \to H, (f_x)_{x \in B} \mapsto \sum_{x \in B} \left(\int \rho_x^{-1/2} f_x \, \mathrm{d}E \right) x$ ein Hilbertraum Isomorphismus ist. Mit einer Orthonormalbasis $(e_x)_{x \in B}$ von W ist $L^2_\lambda(Z, W) \to \bigoplus_{x \in B} L^2(\lambda), F \mapsto (F_x)_{x \in B}, F_x(z) := \langle F(z), e_x \rangle_W$ offenbar ein Hilbertraum Isomorphismus. Insgesamt ist $\beta : L^2_\lambda(Z, W) \longrightarrow H$, $\beta(F) := \sum_{x \in B} \left(\int \rho_x^{-1} F_x \, \mathrm{d}E \right) x$ der gesuchte Hilbertraum Isomorphismus, denn $E(\Delta) = \beta E^{\mathrm{kan}}(\Delta) \beta^{-1} \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$. In der Tat gilt für $F \in L^2_\lambda(Z, W)$, dass $E^{\mathrm{kan}}(\Delta) F = 1_\Delta F \mapsto (1_\Delta F_x)_{x \in B} = \left(\bigoplus_{x \in B} E^{\mathrm{kan}}(\Delta) \right) (F_x)_{x \in B}$, woraus die Behauptung mit (2.21) folgt. □

(19) Multiplizität von $E^{\mathbf{kan}}$. *Seien W ein separabler Hilbertraum $\neq \{0\}$, $(Z, \mathcal{A}, \lambda)$ ein σ-endlicher Messraum mit $\lambda \neq 0$ derart, dass $H := L^2_\lambda(Z, W)$ separabel ist (was z.B. der Fall ist, wenn $\mathcal{A}$ ein abzählbares Erzeugendensystem besitzt). Dann ist E^{kan} d–fach mit $d := \dim W$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\lambda(Z) = 1$. Denn es existiert eine messbare Dichte $\rho : Z \to]0, \infty[$ derart, dass $\lambda'(Z) = 1$ für $\lambda' := \rho\lambda$ ist. Dann ist die Abbildung $L^2_\lambda(Z, W) \to L^2_{\lambda'}(Z, W), f \mapsto \rho^{-1/2} f$ ein Hilbertraum Isomorphismus, der E^{kan} auf $E'^{\,\mathrm{kan}}$ transformiert.

Sei $e_1, e_2, \ldots$ eine Orthonormalbasis von W. Setze $f_j := 1_Z e_j$ für alle j. Offenbar ist $\{f_j : j\}$ eine abzählbare d–elementige E^{kan}–Basis. Bezeichne K_j die orthogonale Projektion auf den von $\left\{ E^{\mathrm{kan}}(\Delta) f_j : \Delta \in \mathcal{A} \right\}$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum $\left\{ f \in H : f = \varphi e_j, \, \varphi \in L^2(\lambda) \right\}$. Die Nebenringe $\mathcal{R}_j := K_j \mathcal{R}$ mit $\mathcal{R} := \left\{ E^{\mathrm{kan}}(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A} \right\}$ sind offenbar zu $\mathcal{R}$ isomorph und paarweise orthogonal. Ist d unendlich, so ist also $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = \infty$ und E^{kan} ∞–fach nach (8).

Sei daher $d < \infty$. Es genügt zu zeigen, dass $m(\mathcal{R}) = d$. Denn für jedes $\Delta_0 \in \mathcal{A}$ mit $E(\Delta_0) \neq 0$ ist $E(\Delta_0) E^{\mathrm{kan}}$ das kanonische PV-Maß auf $L^2_{\lambda_0}(\Delta_0, W)$ mit $\lambda_0 := \lambda | \mathcal{A} \cap \Delta_0 \neq 0$, wofür dann ebenfalls die Behauptung gilt. Nach Obigem ist bereits $m(\mathcal{R}) \geqslant d$ gezeigt. Seien also $L_j \mathcal{R}, j = 1, \ldots, d$, zu $\mathcal{R}$ isomorphe und paarweise orthogonale Nebenringe von $\mathcal{R}$. Weil $M = I \in \mathcal{R}$, ist $L_i L_j = 0$ für $i \neq j$ und es bleibt nachzuweisen, dass $\sum_{j=1}^d L_j = I$.

Gemäß (14) sei g_j separierend für $L_j\mathcal{R}$ mit $L_jg_j = g_j$. Nach dem bekannten Schluss im Beweis zu (16) ist g_j separierend für $\mathcal{R}$ und es gilt $\langle g_i, E(\Delta)\, g_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und alle $\Delta \in \mathcal{A}$. Da $\lambda(\Delta) = 0 \Leftrightarrow E^{\mathrm{kan}}(\Delta) = 0 \Leftrightarrow E^{\mathrm{kan}}(\Delta)\, g_j = 0 \Leftrightarrow \int_\Delta \|g_j(z)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z) = 0$, ist $N_j := \{z \in Z : g_j(z) = 0\}$ eine λ-Nullmenge Setze $\tilde{g}_j(z) := \|g_j(z)\|^{-1} g_j(z)$, für alle $z \notin N_j$ und $\tilde{g}_j(z) := e_j$ sonst. Dann ist $z \mapsto \tilde{g}_j(z)$ messbar, $\|\tilde{g}_j(z)\| = 1$ für alle z und somit $\int \|\tilde{g}_j(z)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(z) = 1$. Insbesondere ist $\tilde{g}_j \in H$. Aus $0 = \langle g_i, E(\Delta)\, g_j\rangle = \int_\Delta \langle g_i(z), g_j(z)\rangle \,\mathrm{d}\lambda(z)$ für $i \neq j$ und $\Delta \in \mathcal{A}$ folgt, dass $N_{ij} := \{z \in Z : \langle g_i(z), g_j(z)\rangle \neq 0\}$ λ-Nullmengen sind. Bezeichne N die λ-Nullmenge $\bigcup_{i\neq j} N_{ij}$. Da $\langle \tilde{g}_i(z), \tilde{g}_j(z)\rangle = 0\ \forall\ z \notin N$ folgt schließlich, dass $\{\tilde{g}_1(z), \ldots, \tilde{g}_d(z)\}$ eine Orthonormalbasis von W für alle $z \notin N$ ist. Damit ist

$$e_i = \sum_{j=1}^{d} \langle \tilde{g}_j(z), e_i\rangle\, \tilde{g}_j(z) \qquad (\star)$$

für jedes i und alle $z \notin N$. Seien $f_{ij}(z) := \langle \tilde{g}_j(z), e_i\rangle\, \tilde{g}_j(z)\ \forall\ i, j$. Es ist $f_{ij} \in V_j := \left\{\varphi g_j : \varphi \in L^2\left(E^{\mathrm{kan}}_{g_j}\right)\right\}$, weil $f_{ij}(z) = \langle \tilde{g}_j(z), e_i\rangle \|g_j(z)\|^{-1} g_j(z)\ \forall\ z \notin N_j$, $E^{\mathrm{kan}}_{g_j} = \|g_j(\cdot)\|^2 \lambda$ und $|\langle \tilde{g}_j(z), e_i\rangle| \leqslant \|\tilde{g}_j(z)\| \|e_i\| = 1$. Nach (2.20) wird V_j von $\left\{E^{\mathrm{kan}}(\Delta)\, g_j : \Delta \in \mathcal{A}\right\}$ erzeugt . Offenbar ist $V_j \subset L_j(H)$. Daher besagt $(\star)$, dass $f_i = 1_Z e_i \in \bigoplus_j L_j(H)$. Damit sind auch $E^{\mathrm{kan}}(\Delta)\, f_i \in \bigoplus_j L_j(H)\ \forall\ \Delta \in \mathcal{A}\ \forall\ i$. Da $\{f_i : i\}$ eine E^{kan}–Basis ist, folgt $\bigoplus_j L_j(H) = H$. □

(20) Multiplizität für einen Ring mit Basis. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und B eine $\mathcal{R}$-Basis. Dann ist $\mathcal{R}$ $|B|$–fach.*

Beweis. Seien M der Maximaloperator von $\mathcal{R}$ und $j : M(H) \to H$, $j(x) := x$ die identische Einbettung. Offenbar ist $\mathcal{R}' := \{j^*Pj : P \in \mathcal{R}\}$ ein Ring im Hilbertraum $M(H)$ mit $I_{M(H)} \in \mathcal{R}'$. Nach (3) gibt es ein PV–Maß E auf einem Messraum $(Z, \mathcal{A})$ in $M(H)$ mit $\mathcal{R}' = \{E(\Delta) : \Delta \in \mathcal{A}\}$. Aus der Voraussetzung folgt, dass $j^*(B)$ eine $\mathcal{R}'$–Basis ist. Aus (18), (19) folgt, dass $\mathcal{R}'$ und damit auch $\mathcal{R}$ $|j^*(B)|$–fach ist. Offenbar ist $|B| = |j^*(B)|$. □

(21) Basis für Ring mit Index ∞. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring $\neq \{0\}$ mit $\mathrm{m}(\mathcal{R}) = \infty$. Dann gibt es eine unendliche $\mathcal{R}$–Basis.*

Beweis. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M(H) \setminus \{0\}$ dicht in $M(H)$. Die Menge $\mathcal{R}_1 := \{P \in \mathcal{R} : Px_1 = 0\}$ ist offensichtlich ein Ring. Sei M_1 der Maximaloperator von $\mathcal{R}_1$. Gemäß (14) sei $y_1 \in M_1(H)$ separierend für $\mathcal{R}_1$. Dann ist $z_1 := x_1 + y_1$ separierend für $\mathcal{R}$, denn $Pz_1 = Px_1 + Py_1$ und $\langle Px_1, Py_1\rangle = \langle Px_1, M_1y_1\rangle = \langle M_1Px_1, y_1\rangle = \langle 0, y_1\rangle = 0$, weshalb aus $Pz_1 = 0$ sowohl $Px_1 = 0$ wie $Py_1 = 0$ folgt, was $P \in \mathcal{R}_1$ und somit $P = 0$ ergibt, da y_1 separierend für $\mathcal{R}_1$ ist. Insbesondere ist $z_1 \in M(H) \setminus \{0\}$. Sei K_1 die orthogonale Projektion auf dem von $\{Pz_1 : P \in \mathcal{R}\}$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Dann ist $x_1 \in K_1(H)$, denn $z_1 \in K_1(H)$ und $y_1 = M_1z_1 \in K_1(H)$.

Seien nun $z_1, \ldots, z_n$ mit folgenden Eigenschaften definiert: $z_i \in M(H)\backslash\{0\}$ separierend für $\mathcal{R}$, $\langle z_i, Pz_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ und $P \in \mathcal{R}$ und $x_1, \ldots, x_n$ liegen in dem von $\{Pz_i : P \in \mathcal{R}, i = 1, \ldots, n\}$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Zur Definition von z_{n+1} bezeichne L die orthogonale Projektion auf diesen Unterraum. Offenbar vertauscht L mit $\mathcal{R}$ und $L \leq M$. Der Nebenring $L\mathcal{R}$ ist n–fach nach (20), weil $\{z_1, \ldots, z_n\}$ offenbar eine $L\mathcal{R}$–Basis ist. Daher folgt $L < M$. Seien $\tilde{x}_{n+1} := (M - L)\, x_{n+1}$ und $M_{n+1} \in \mathcal{R}$ der Maximaloperator des Rings $\mathcal{R}_{n+1} := \{P \in \mathcal{R} : P\tilde{x}_{n+1} = 0\}$. Sei y_{n+1} separierend für den Nebenring $(M - L)\,\mathcal{R}_{n+1}$ mit $y_{n+1} \in (M - L)\, M_{n+1}\,(H)$, wobei $(M - L)M_{n+1}$ der Maximaloperator von $(M - L)\,\mathcal{R}_{n+1}$ ist.

Setze nun $z_{n+1} := \tilde{x}_{n+1} + y_{n+1}$. Dann ist offensichtlich $\langle z_{n+1}, Pz_i \rangle = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $P \in \mathcal{R}$. Jetzt wird gezeigt, dass z_{n+1} separierend für $\mathcal{R}$ ist. Es ist $Pz_{n+1} = P\tilde{x}_{n+1} + Py_{n+1}$ und $\langle P\tilde{x}_{n+1}, Py_{n+1} \rangle = \langle P\tilde{x}_{n+1}, M_{n+1}y_{n+1} \rangle = \langle M_{n+1}P\tilde{x}_{n+1}, y_{n+1} \rangle = \langle 0, y_{n+1} \rangle = 0$, da $M_{n+1}\tilde{x}_{n+1} = 0$ ist. Aus $Pz_{n+1} = 0$ folgen daher $P\tilde{x}_{n+1} = 0$ und $Py_{n+1} = P\,(M - L)\, y_{n+1} = 0$, weshalb $P \in \mathcal{R}_{n+1}$ und somit $P\,(M - L) = 0$, da y_{n+1} separierend für $(M - L)\,\mathcal{R}_{n+1}$ ist. Daraus folgt $P = 0$, da ansonsten $0 < P \in L\mathcal{R}$ und somit $\mathrm{m}(P\mathcal{R}) = n$, was $\mathrm{m}(P\mathcal{R}) = \infty$ nach (8) widerspricht. — Hieraus folgt auch $z_{n+1} \in M\,(H) \setminus \{0\}$.

Sei K_{n+1} die orthogonale Projektion auf den von $\{Pz_{n+1} : P \in \mathcal{R}\}$ erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Dann ist $x_{n+1} \in (L + K_{n+1})\,(H)$, denn $z_{n+1} \in K_{n+1}\,(H)$, $y_{n+1} = M_{n+1}z_{n+1} \in K_{n+1}\,(H)$ und somit $\tilde{x}_{n+1} \in K_{n+1}\,(H)$, weshalb $x_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} + Lx_{n+1} \in (L + K_{n+1})\,(H)\,.$

Damit erhält man eine unendliche $\mathcal{R}$-Basis $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Als Korollar folgt aus (21), (16) und (20), sowie (18) und (19)

(22) PV–Maß mit Multiplizität. *Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Das PV–Maß E ist genau dann n–fach, wenn eine E–Basis aus n Elementen existiert, was genau dann der Fall ist, wenn E bis auf einen Hilbertraum Isomorphismus gleich E^{kan} auf $L^2_\lambda\,(Z, W)$ ist, wobei λ irgend ein Kontrollmaß von E und W ein separabler Hilbertraum mit $\dim W = n$ ist.*

Das auf $\Gamma \in \mathcal{A}$ eingeschränkte PV–Maß E ist definitionsgemäß das PV–Maß auf $(\Gamma, \mathcal{A} \cap \Gamma)$ mit $\mathcal{A} \cap \Gamma := \{\Delta : \Delta \in \mathcal{A},\, \Delta \subset \Gamma\}$ in $E(\Gamma)(H)$ mit $\Delta \mapsto j^*E(\Delta)j$, wobei j die identische Einbettung von $E(\Gamma)(H)$ in H bezeichnet.

(23) Struktursatz für PV–Maße. *Sei E ein PV-Maß auf $(Z, \mathcal{A})$ in einem separablen Hilbertraum H. Dann existieren $Z_\infty, Z_1, Z_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $Z = Z_\infty \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$ derart, dass $Z_i = \emptyset$ oder dass das auf Z_i eingeschränkte PV-Maß die Multiplizität i hat. Ist weiter $\Delta \in \mathcal{A}$ derart, dass das auf Δ eingeschränkte PV-Maß die Multiplizität i hat, dann ist $E\,(\Delta \backslash Z_i) = 0$.*

Bis auf einen Hilbertraum Isomorphismus ist also

$$H = L^2_{\lambda_\infty}\left(Z_\infty, \ell^2\right) \bigoplus L^2_{\lambda_1}\left(Z_1, \mathbb{C}\right) \bigoplus L^2_{\lambda_2}\left(Z_2, \mathbb{C}^2\right) \bigoplus \dots$$

$$E(\Delta)(f_\infty, f_1, \dots) = (1_{\Delta\cap Z_\infty} f_\infty, 1_{\Delta\cap Z_1} f_1, \dots),$$

wobei λ_i ein Kontrollmaß der Einschränkung von E auf Z_i für $i = \infty, 1, 2, \dots$ ist. Für alle $\Delta \in \mathcal{A}$, $\Delta \subset Z_i$ ist also $\lambda_i(\Delta) = 0$ genau dann, wenn $E(\Delta) = 0$. — Ist T ein normaler Operator in einem separablen Hilbertraum und ist E sein Spektralmaß, dann ist $T \simeq M_{\mathrm{id}_\mathbb{C}}$ mit $\mathcal{D}(M_{\mathrm{id}_\mathbb{C}}) = \{(f_i)_{i=\infty,1,\dots} \in H : (\mathrm{id}_\mathbb{C}\ f_i)_{i=\infty,1,\dots} \in H\}$ und $(f_i)_{i=\infty,1,\dots} \mapsto (\mathrm{id}_\mathbb{C}\ f_i)_{i=\infty,1,\dots}$.

Beweis. Seien $\tilde{Z}_i \in \mathcal{A}$ für $i = \infty, 1, 2, \dots$ derart, dass $P_i = E(\tilde{Z}_i)$ gemäß (12). Da $P_iP_j = 0$ ist $E(\tilde{Z}_i \cap \tilde{Z}_j) = 0$ für $i \neq j$, und da $P_\infty \vee \bigvee_i P_i = I$ gilt $E\left(Z \setminus \bigcup\{\tilde{Z}_i : i = \infty, 1, 2, \dots\}\right) = 0$. Setze daher $Z_1 := \tilde{Z}_1$, $Z_n := \tilde{Z}_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Z_i$ für $n \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$, $Z_\infty := Z \setminus \bigcup_{i=1,2,\dots} Z_i$. Man verifiziert nun mit Hilfe von (12) und (22) die Behauptungen zu E. — Die Aussage zu T folgt mit (5.7). □

Man nennt $Z_i \in \mathcal{A}$ für $i = \infty, 1, 2, \dots$ die **Multiplizitätsbereiche** von E. Sie sind bis auf E–Nullmengen eindeutig. Die auf den Multiplizitätsbereichen definierten Kontrollmaße fasst man gerne als Maße auf ganz Z auf durch die Festsetzung $\lambda_i(Z\setminus Z_i) = 0$. Sie sind damit paarweise orthogonal. (Allgemein heißen zwei Maße λ und λ' orthogonal, wenn $\Delta \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(\Delta) = 0$ und $\lambda'(Z \setminus \Delta) = 0$ existiert.) Mit dieser Festsetzung braucht man die Bereiche Z_i nicht zu nennen und schreibt $L^2_{\lambda_i}(Z, \mathbb{C}^i)$ statt $L^2_{\lambda_i}(Z_i, \mathbb{C}^i)$, wobei $\mathbb{C}^\infty := \ell^2$. Die Maße λ_∞, λ_1, $\lambda_2, \dots$ heißen die **skalaren Spektralmaße** von E. Diese sind bis auf Äquivalenz, d.h. bis auf die Multiplikation mit einer positiven integrierbaren Dichte eindeutig.

Äquivalenz von PV–Maßen bzw. von normalen Operatoren

(24) Äquivalente PV–Maße. *Seien E und $\tilde{E}$ PV–Maße auf $(Z, \mathcal{A})$ in den separablen Hilberträumen H und $\tilde{H}$. Dann sind E und $\tilde{E}$ genau dann äquivalent, d.h. es existiert ein Hilbertraum Isomorphismus $\beta : H \to \tilde{H}$ mit $\tilde{E}(\Delta) = \beta \circ E(\Delta) \circ \beta^{-1}\ \forall\ \Delta \in \mathcal{A}$, wenn die skalaren Spektralmaße λ_i und $\tilde{\lambda}_i$ äquivalent sind für $i = \infty, 1, 2 \dots$*

Beweis. (a) Seien λ_i und $\tilde{\lambda}_i$ äquivalent für $i = \infty, 1, 2 \dots$. Da λ_i und $\tilde{\lambda}_i$ endlich sind, existiert nach dem Satz von Radon/Nikodym eine messbare Dichte $\rho : Z \to]0, \infty[$ derart, dass $\lambda_i = \rho_i \tilde{\lambda}_i$. Nach (23) seien o.E.

$$H = L^2_{\lambda_\infty}\left(Z, l^2\right) \bigoplus L^2_{\lambda_1}\left(Z, \mathbb{C}\right) \bigoplus L^2_{\lambda_2}\left(Z, \mathbb{C}^2\right) \bigoplus \dots$$

$$E(\Delta)(f_\infty, f_1, \dots) = (1_\Delta f_\infty, 1_\Delta f_1, \dots)$$

und entsprechend $\tilde{H}$ und $\tilde{E}$. Der Hilbertraum Isomorphismus $\beta : H \to \tilde{H}$, $(f_\infty, f_1, f_2, \dots) \mapsto (\sqrt{\rho_\infty} f_\infty, \sqrt{\rho_1} f_1, \sqrt{\rho_2} f_2, \dots)$ leistet das Gewünschte.

(b) Sei nun $\tilde{E}(\Delta) = \beta \circ E(\Delta) \circ \beta^{-1} \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$. Seien Z_i und $\tilde{Z}_i$ für $i = \infty, 1, 2 \dots$ die zugehörigen Multiplizitätsbereiche gemäß (23). Zu $i \in \{\infty, 1, 2 \dots\}$ mit $Z_i \neq \emptyset$ bezeichne F das auf Z_i eingeschränkte PV–Maß $\tilde{E}$ in $\tilde{E}(Z_i)(\tilde{H})$. Dann hat F die Multiplizität i. In der Tat sei $\{x_1, \dots, x_i\}$ eine Basis für die Einschränkung von E auf Z_i, d.h.

- $E(\Delta)x_\iota = 0 \Rightarrow E(\Delta) = 0 \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A} \cap Z_i, \iota = 1, \dots, i$
- $\langle x_\iota, E(\Delta)x_{\iota'} \rangle = 0 \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A} \cap Z_i, \iota \neq \iota'$
- $\{E(\Delta)x_\iota : \Delta \in \mathcal{A} \cap Z_i, \ \iota = 1, \dots, i\}$ erzeugt $E(Z_i)(H)$.

Dann ist $\{\tilde{x}_\iota : \iota = 1, \dots, i\}$ mit $\tilde{x}_\iota := \beta(x_\iota)$ eine F–Basis, denn

- $F(\Delta)\tilde{x}_\iota = 0 \Rightarrow \beta(E(\Delta)x_\iota) = 0 \Rightarrow E(\Delta)x_\iota = 0 \Rightarrow E(\Delta) = 0 \Rightarrow F(\Delta) = 0$
- $\langle \tilde{x}_\iota, F(\Delta)\tilde{x}_{\iota'} \rangle = \langle x_\iota, E(\Delta)x_{\iota'} \rangle = 0, \iota \neq \iota'$
- $\{F(\Delta)\tilde{x}_\iota : \Delta, \ \iota\} = \beta(\{E(\Delta)x_\iota : \Delta, \ \iota\})$ erzeugt $\beta(E(Z_i)(H)) = \tilde{E}(Z_i)(\tilde{H})$.

Weil also F i–fach ist, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage von (23), dass $\tilde{E}(Z_i \setminus \tilde{Z}_i) = 0$. Analog beweist man $E(\tilde{Z}_i \setminus Z_i) = 0$. Außerdem stimmen offenbar die E–Nullmengen mit den $\tilde{E}$–Nullmengen überein. Hieraus folgt, dass λ_i und $\tilde{\lambda}_i$ äquivalent sind. $\square$

Sei T ein normaler Operator in H. Bezeichne E sein Spektralmaß. Die skalaren Spektralmaße von E werden auch als die skalaren Spektralmaße von T bezeichnet. Damit gilt das folgende Korollar zu (24).

(25) Äquivalente normale Operatoren. *Seien T und $\tilde{T}$ normale Operatoren in den separablen Hilberträumen H und $\tilde{H}$. Dann sind T und $\tilde{T}$ genau dann äquivalent, d.h. es existiert ein Hilbertraum Isomorphismus $\beta : H \to \tilde{H}$ mit $\tilde{T} = \beta \circ T \circ \beta^{-1}$, wenn die skalaren Spektralmaße λ_i und $\tilde{\lambda}_i$ äquivalent sind für $i = \infty, 1, 2 \dots$*

Aufgabe 61 Sei $(Z, \mathcal{A}, \lambda)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $L^2(\lambda)$ separabel. (Letzteres liegt vor, wenn $\mathcal{A}$ ein abzählbares Erzeugendensystem besitzt.) Weiter seien $\varphi, \tilde{\varphi} :\to \mathbb{C}$ messbar. Wann sind die Multiplikationsoperatoren $M(\varphi)$ und $M(\tilde{\varphi})$ (siehe (5.11)) unitär äquivalent?

Einfachheit und Zyklizität

Nach (22), (23) ist ein PV–Maß genau dann einfach oder hat Multiplizität 1, wenn nur das skalare Spektralmaß λ_1 von Null verschieden ist oder, äquivalent dazu, wenn es zu E^{kan} auf $L^2(\lambda)$ mit einem Kontrollmaß λ äquivalent ist. — Man nennt ein PV–Maß **zyklisch** und $x_0 \in H$ einen zyklischen Vektor für E, wenn $\{E(\Delta)x_0 : \Delta \in \mathcal{A}\}$ total in H ist. Wir halten gleich fest, dass jeder zyklische Vektor x_0 separierend ist. Denn anderenfalls existiert $\Delta_1 \in \mathcal{A}$ mit $E(\Delta_1)x_0 = 0$ und $E(\Delta_1) \neq 0$, weshalb $x_1 \in H \setminus \{0\}$ mit $E(\Delta_1)x_1 = x_1$ existiert, woraus der Widerspruch $\langle x_1, E(\Delta)x_0\rangle = \langle E(\Delta_1)x_1, E(\Delta)x_0\rangle = \langle x_1, E(\Delta \cap \Delta_1)x_0\rangle = 0 \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$ folgt.

(26) Äquivalenz von Einfachheit, Zyklizität u.a. für PV–Maße. *Sei E ein PV–Maß auf $(Z, \mathcal{A})$ in H. Dann sind* (a)–(f) *äquivalent.*

(a) *E ist einfach.*

(b) *E ist zyklisch.*

(c) *P orthogonale Projektion mit $PE(\Delta) = E(\Delta)P \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists \ \Gamma \in \mathcal{A}$ mit $P = E(\Gamma)$.*

(d) *$T \in \mathcal{L}(H)$ normal, $TE(\Delta) = E(\Delta)T \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists \ h : Z \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt mit $T = \int h \, \mathrm{d}E$.*

(e) *$T_i \in \mathcal{L}(H)$ normal, $T_iE(\Delta) = E(\Delta)T_i \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2 \Rightarrow T_1T_2 = T_2T_1$.*

(f) *Jeder separierende Vektor für E ist zyklisch.*

Beweis. (a)⇒(b) Gemäß (22) ist o.E. $E = E^{\text{kan}}$ in $H = L^2(\lambda)$ mit einem endlichen Maß $\lambda \neq 0$. Dann ist 1_Z ein zyklischer Vektor, denn $E(\Delta)1_Z = 1_\Delta \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$ ergibt gemäß der Integrationstheorie nach Lebesgue eine totale Menge.

(b)⇒(a) Angenommen E ist nicht einfach. Dann existiert nach dem Struktursatz (23) ein $Z' \in \mathcal{A}$ derart, dass bis auf einen Hilbertraum Isomorphismus $E(Z')(H) = L^2_\lambda(Z', W)$ ist, wobei $\lambda \neq 0$ ein endliches Maß und W ein separabler Hilbertraum mit $\dim W > 1$ ist, und die Einschränkung von E auf Z' gleich E^{kan} ist.

Wir zeigen, dass E^{kan} nicht zyklisch ist. Dann ist es offenbar auch E nicht, was den Widerspruch ergibt. Sei $f \in L^2_\lambda(Z', W)$ vorgegeben. Wir konstruieren dazu ein $g \in L^2_\lambda(Z', W) \setminus \{0\}$ mit $\langle g(z), f(z)\rangle = 0 \ \forall \ z \in Z'$. Dann gilt $\langle g, E^{\text{kan}}(\Delta)f\rangle = \int \langle g(z), 1_\Delta(z)f(z)\rangle \, \mathrm{d}\lambda(z) = \int_\Delta \langle g(z), f(z)\rangle \, \mathrm{d}\lambda(z) = 0 \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A} \cap Z'$, woraus folgt, dass E^{kan} nicht zyklisch ist.

Da $\dim W > 1$, exisitert zu $f(z) \in W$ stets ein $g(z) \in W \setminus \{0\}$ mit $\langle g(z), f(z)\rangle = 0$. Die Schwierigkeit ist lediglich, $z \mapsto g(z)$ messbar zu wählen. Sei $\dim W = \infty$ und $e_1, e_2, \ldots$ eine Orthonormalbasis von W. Dann setze $\langle e_{2k-1}, g(z)\rangle := -\overline{\langle e_{2k}, f(z)\rangle}$ und $\langle e_{2k}, g(z)\rangle := \overline{\langle e_{2k-1}, f(z)\rangle} \ \forall \ k \in \mathbb{N}$. Dann sind $\langle e_{2k-1}, g(z)\rangle e_{2k-1} + \langle e_{2k}, g(z)\rangle e_{2k}$ und $\langle e_{2k-1}, f(z)\rangle e_{2k-1} + \langle e_{2k}, f(z)\rangle e_{2k}$

orthogonal für alle k. Die gleiche Konstruktion funktioniert im Fall $\dim W = 2n$ für $n \in \mathbb{N}$. Im Fall ungerader Dimension findet man eine ähnliche etwas aufwendigere Konstruktion.

(a)⇒(c) Wieder sei gemäß (22) o.E. $E = E^{\text{kan}}$ in $H = L^2(\lambda)$ mit einem endlichen Maß $\lambda \neq 0$. Setze $\varphi := P1_Z$ und sei $M_\varphi := \int \varphi \, \mathrm{d}E^{\text{kan}}$ gemäß (4.1) der Multiplikationsoperator mit φ in $L^2(\lambda)$. Wegen $P1_\Delta = PE^{\text{kan}}(\Delta)1_Z = E^{\text{kan}}(\Delta)P1_Z = E^{\text{kan}}(\Delta)\varphi = 1_\Delta\varphi$ ist $\varphi 1_\Delta \in L^2(\lambda)$ und damit $1_\Delta \in \mathcal{D}(M_\varphi)$ und $P1_\Delta = M_\varphi 1_\Delta \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$. Also stimmt P mit M_φ auf dem dichten Unterraum der elementaren Abbildungen überein. Sei $f \in L^2(\lambda)$ und dazu (u_n) eine Folge elementarer Abbildungen mit $u_n \to f$ in $L^2(\lambda)$. Dann gilt $M_\varphi u_n = Pu_n \to Pf$. Weil M_φ normal und damit abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{D}(M_\varphi)$ und $M_\varphi f = Pf$. Das beweist $M_\varphi = P$. Damit ist schließlich $\varphi = 1_\Gamma$ λ–fast überall für ein $\Gamma \in \mathcal{A}$ nach (4.2)(g), (2.11)(f).

(c)⇒(a) Angenommen E ist nicht einfach. Wie im Beweis von (b)⇒(a) genügt es offenbar, E^{kan} auf $L^2_\lambda(Z', W)$ mit $\dim W > 1$ zu betrachten. Sei $e_1 \in W$ mit $\|e_1\| = 1$ und sei P die orthogonale Projektion auf $\{he_1 : \, h \in L^2(\lambda)\}$. Sie ist offenbar von allen $E^{\text{kan}}(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$ verschieden, insbesondere ist $P \neq I$, weil $\dim W > 1$, vertauscht aber mit allen $E^{\text{kan}}(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$, denn $(PE^{\text{kan}}(\Delta)f)(z) = (P(1_\Delta f))(z) = \langle e_1, 1_\Delta(z)f(z)\rangle e_1$ und auch $(E^{\text{kan}}(\Delta)Pf)(z) = 1_\Delta(z)(Pf)(z) = 1_\Delta(z)\langle e_1, f(z)\rangle e_1 = \langle e_1, 1_\Delta(z)f(z)\rangle e_1$.

(c)⇒(d) Sei F das Spektralmaß von T. Sei $\Delta \in \mathcal{A}$. Aus $E(\Delta)T = TE(\Delta)$ folgt $E(\Delta)F(B) = F(B)E(\Delta) \ \forall \ B \in \mathcal{B}^1$ nach (2.16). Nach (c) existiert $\Delta_B \in \mathcal{A}$ mit $F(B) = E(\Delta_B)$. Nach (2.12) wird $\{\int f \, \mathrm{d}F : \, f \in L^\infty_F(\mathbb{C})\}$ von den darin enthaltenen Projektionsoperatoren erzeugt. Zu $\epsilon > 0$ existiert daher eine elementare Abbildung $v \in L^2_F(\mathbb{C})$ mit $\|T - \int v \, \mathrm{d}F\| < \epsilon$. Sei $v = \sum_{i=1}^n b_i 1_{B_i}$. Dann ist $\int v \, \mathrm{d}F = \sum_{i=1}^n b_i F(B_i) = \sum_{i=1}^n b_i E(\Delta_i) = \int u \, \mathrm{d}E$, wobei $E(\Delta_i) = F(B_i)$ (s.o.) und $u := \sum_{i=1}^n b_i 1_{\Delta_i}$. Also ist $\|T - \int u \, \mathrm{d}E\| < \epsilon$. Daher ist $T \in \{\int h \, \mathrm{d}E : \, h \in L^\infty_E(Z)\}$ nach (2.12).

(d)⇒(c) gilt, weil (c) wegen (4.2)(g), (2.11)(f) ein Spezialfall von (d) ist.

(d)⇒(e) Nach (d) ist $T_i = \int h_i \, \mathrm{d}E$, $i = 1, 2$. Damit folgt $T_1T_2 = T_2T_1$ nach (2.11)(b).

(e)⇒(a) Angenommen E ist nicht einfach. Wie im Beweis von (b)⇒(a) genügt es, E^{kan} auf $L^2_\lambda(Z', W)$ mit $\dim W > 1$ zu betrachten. Seien e_i, $i = 1, 2$ zwei linear unabhängige Einheitsvektoren in W mit $\langle e_1, e_2\rangle \neq 0$ und P_i die orthogonale Projektion auf $\{he_i : \, h \in L^2(\lambda)\}$ für $i = 1, 2$. Wie im Beweis von (c)⇒(a) gezeigt, vertauschen P_1, P_2 mit allen $E^{\text{kan}}(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$, aber $P_1P_2 \neq P_2P_1$, denn $(P_2P_1f)(z) = (P_2(P_1f))(z) = \langle e_2, (P_1f)(z)\rangle e_2 = \langle e_2, \langle e_1, f(z)\rangle e_1\rangle e_2 = \langle e_1, f(z)\rangle\langle e_2, e_1\rangle e_2$ und entsprechend $(P_1P_2f)(z) = \langle e_2, f(z)\rangle\langle e_1, e_2\rangle e_1$ für $f \in L^2_\lambda(Z', W)$.

(b)⇒(f) Sei x_0 ein separierender Vektor für E. Angenommen x_0 ist nicht zyklisch. Dann ist der von $\{E(\Delta)x_0 : \, \Delta \in \mathcal{A}\}$ erzeugte abgeschlossene Unterraum V ungleich H. Dann ist $V^\perp \neq \{0\}$ invariant unter E, denn für alle $y \in V^\perp$ und $\Delta, \Gamma \in \mathcal{A}$ gilt $\langle E(\Gamma)y, E(\Delta)x_0\rangle = \langle y, E(\Gamma)E(\Delta)x_0\rangle = \langle y, E(\Gamma \cap \Delta)x_0\rangle = 0$. Sei P die orthogonale Projektion auf $V^\perp$. Sie vertauscht mit $E(\Delta) \ \forall \ \Delta \in \mathcal{A}$. Wegen der bereits bewiesenen Äquivalenz (b) ⇔ (c) existiert $\Gamma \in \mathcal{A}$ mit $P = E(\Gamma)$. Das ergibt den Widerspruch, dass $E(\Gamma) = P \neq 0$, obwohl $E(\Gamma)x_0 = Px_0 = 0$.

(f)⇒(a) In der Darstellung von E gemäß dem Struktursatz (23), wobei o.E. $\sum_i \lambda_i(Z_i) = 1$, ist $h := (1_{Z_\infty} e_\infty, 1_{Z_1} e_1, 1_{Z_2} e_2, \dots)$ mit $e_i \in \mathbb{C}^i$, $\mathbb{C}^\infty := \ell^2$, $\|e_i\| = 1 \; \forall\, i$ offenbar ein separierenden Vektor. Nach Voraussetzung ist h zyklisch. Dann ist $1_{Z_i} e_i$ zyklisch für E^{kan} auf $L^2_{\lambda_i}(Z_i, \mathbb{C}^i)$. Dies ist offenbar nur möglich, falls $\lambda_i = 0 \; \forall\, i \neq 1$. □

Sei $T \in L(H)$ ein normaler Operator. Er heißt **zyklisch**, wenn ein $x_0 \in H$ existiert, wofür $\{T^n x_0 : n \in N_0\}$ total in H ist. Dabei ist $T^0 := I$. Der Vektor x_0 heißt zyklischer Vektor für T. Weiter nennt man T $*$–**zyklisch** und x_0 einen $*$–zyklischen Vektor für T, wenn die Menge $\{T^{*n} T^m x_0 : n, m \in N_0\}$ total in H ist. Schließlich hat T definitionsgemäß ein **einfaches Spektrum**, wenn sein Spektralmaß einfach ist.

(27) $*$–Zyklisch erzeugter Unterraum. *Seien $T \in L(H)$ normal und E sein Spektralmaß. Weiter sei $x_0 \in H$. Dann erzeugen $\{E(\Delta)\, x_0 : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\}$ und $\{T^{*n} T^m x_0 : n, m \in \mathbb{N}_0\}$ beide den Unterraum $\left\{\left(\int f \mathrm{d}E\right) x_0 : f \in L^2(E_{x_0})\right\}$, der zu $L^2(E_{x_0})$ isomorph ist. Weiter ist T genau dann $*$–zyklisch, wenn T ein einfaches Spektrum hat.*

Beweis. Seien $V_1 := \operatorname{span}\{E(\Delta)\, x_0 : \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\}$, $V_2 := \operatorname{span}\{T^{*n} T^m x_0 : n, m \in \mathbb{N}_0\}$ und $V := \left\{\left(\int f \mathrm{d}E\right) x_0 : f \in L^2(E_{x_0})\right\}$. Nach (2.20) ist $V = \overline{V_1}$ und isomorph zu $L^2(E_{x_0})$. Insbesondere ist V abgeschlossen. Nach dem Funktionenkalkül (1.41) und dem Spektralsatz (2.16) ist $C^*(T) = \left\{\int g \,\mathrm{d}E : g \in C(\mathbb{C})\right\}$. Außerdem liegt definitionsgemäß $\{p(T, T^*) : p \in \mathbb{C}[X_1, X_2]\}$ dicht in $C^*(T) \subset \mathcal{L}(H)$. Danach ist $V_2 \subset \{A x_0 : A \in C^*(T)\} \subset \overline{V_2}$ und $\{A x_0 : A \in C^*(T)\} \subset V$, weshalb $\overline{V_2} \subset V$. Es bleibt $V_1 \subset \overline{V}_2$ zu zeigen. Die stetigen Funktionen liegen dicht in $L^2(E_{x_0})$ (was letzlich schon mehrmals mit Hilfe des Lemmas von Urysohn gezeigt wurde). Man wende $\left\|\left(\int f \mathrm{d}E\right) x_0 - \left(\int g \,\mathrm{d}E\right) x_0\right\|^2 = \left\|\left(\int (f-g) \,\mathrm{d}E\right) x_0\right\|^2 = \int |f-g|^2 \,\mathrm{d}E_{x_0}$ für f stetig und $g = 1_\Delta$ an. Damit ergibt sich die behauptete Inklusion. — In Hinblick auf die letzte Behauptung folgt aus dem Bisherigen, dass E genau dann zyklisch ist, wenn T $*$–zyklisch ist. Daher gilt die Aussage wegen (26), (a)⇔(b). □

Der nächste Satz basiert auf einem Satz von Bram, den wir hier nicht beweisen können.

(28) Zyklizität und einfaches Spektrum. *Ein normaler Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ hat genau dann ein einfaches Spektrum, wenn er zyklisch ist.*

Beweis. Sei E das Spektralmaß von T. Nach (27) hat T genau dann ein einfaches Spektrum, wenn T $*$–zyklisch ist. Nach dem angesprochenen Satz von Bram ist ein normaler Operator in $\mathcal{L}(H)$ zyklisch, wenn er $*$–zyklisch ist. Die Umkehrung davon ist offensichtlich. Damit gilt die Behauptung. □

Die beiden folgenden Aufgaben lassen sich mit Standardmitteln der linearen Algebra ohne Rückgriff auf den Satz (28) lösen. Aufgabe (64) verallgemeinert die Aussage von Aufgabe (62).

Aufgabe 62 Eine normale Matrix $T \in \mathbb{C}^{d,d}$ ist genau dann zyklisch, wenn sie d verschiedene Eigenwerte hat.

Aufgabe 63 Eine normale Matrix $T \in \mathbb{C}^{d,d}$ hat genau dann ein einfaches Spektrum, wenn sie d verschiedene Eigenwerte hat.

Aufgabe 64 Eine quadratische Matrix $T \in \mathbb{C}^{d,d}$ ist genau dann zyklisch, wenn kein Eigenwert entartet ist.
Beweis. (1) Sei $T' = STS^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix S und sei T zyklisch bezüglich x_0. Dann ist T' zyklisch bezüglich Sx_0, denn $(T')^n Sx_0 = ST^n S^{-1} Sx_0 = ST^n x_0$ und aus $\langle T^n x_0 : n \rangle = \mathbb{C}^d$ folgt $\langle ST^n x_0 : n \rangle = S \langle T^n x_0 : n \rangle = \mathbb{C}^d$.

(2) Existieren $\lambda \in \mathbb{C}$ und linear unabhängige $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^d$ mit $Te_i = \lambda e_i$ für $i = 1, 2$, dann ist T nicht zyklisch. Zum Beweis sei $p \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Dann ist $p(T) = p(T - \lambda I + \lambda I) = (T - \lambda I)\, p_1(T - \lambda I) + q(\lambda I)$ mit gewissen Polynomen p_1, q. Nun ist $(T - \lambda I)\, p_1(T - \lambda I)\mathbb{C}^d \subset (T - \lambda I)\, \mathbb{C}^d$ nach Voraussetzung höchstens $(\mathrm{d} - 2)$–dimensional. Für jedes $x_0 \in \mathbb{C}^d$ ist daher $p(T)\, x_0 \in (T - \lambda \mathbb{C})\, \mathbb{C}^d + \mathbb{C}x_0$, was höchstens $(\mathrm{d} - 1)$–dimensional ist. Also kann T nicht zyklisch sein.

(3) Sei T ein Jordan Kästchen $J(\lambda, d) = \lambda E_d + N_d$ mit $N_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist T zyklisch bezüglich e_d, denn $(T - \lambda E_d)^j\, e_d = N_d^j e_d = e_{d-j}$ für $j = 0, \ldots, \mathrm{d}-1$, weshalb $\langle T^n e_d : n \rangle \supset \{e_1, \ldots, e_d\}$ und damit die Behauptung gilt. Wir beweisen nun allgemeiner:

Ein Vektor $x_0 := \sum_{j=1}^{d} \xi_j e_j \in \mathbb{C}^d$ ist genau dann zyklisch für $J(\lambda, d)$, wenn $\xi_d \neq 0$. Wenn x_0 zyklisch ist und $y \in \mathbb{C}^d$ vorgegeben ist, dann existiert genau ein Polynom p vom Grad $\leqslant \mathrm{d} - 1$ derart, dass $p(T)\, x_0 = y$.

Zum Beweis sei $q = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j X^j$ ein Polynom vom Grad $\leqslant \mathrm{d} - 1$. Dann heißt $y = q(N_d)\, x$, dass $\sum_{l=1}^{d} \eta_l e_l = \left(\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j N_d^j\right)\left(\sum_{k=1}^{d} \xi_k e_k\right) = \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{k=j+1}^{d} \alpha_j \xi_k e_{k-j} = \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{j=0}^{d-l} \alpha_j \xi_{l+j}\right) e_l$, was $\eta_l = \sum_{j=0}^{d-l} \xi_{l+j} \alpha_j$ für $l = 1, \ldots, d$ bedeutet. Es ist dies das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \xi_d & & & \\ \xi_{d-1} & \xi_d & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \xi_1 & \cdots & & \xi_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_d \\ \eta_{d-1} \\ \vdots \\ \eta_1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix genau dann invertierbar ist, wenn $\xi_d \neq 0$, ist damit gezeigt: x_0 ist genau dann zyklisch, wenn $\xi_d \neq 0$, und wenn x_0 zyklisch ist, dann hat $q(N_d)\, x_0 = y$ für jedes y genau eine Lösung q. M.a.W. ist x_0 zyklisch, d.h. $\xi_d \neq 0$, und ist $y \in \mathbb{C}^d$ vorgegeben, dann gibt es genau ein Polynom p vom Grad $\leqslant \mathrm{d} - 1$ derart, dass $p(T)\, x_0 = y$.

(4) Wegen (1) können wir o.E. annehmen, dass T bereits die Jordan Normalform besitzt, d.h. dass

$$T = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r, d_r) \end{pmatrix}$$

gilt. Dabei ist $J(\lambda_\rho, d_\rho) = \lambda_\rho E_{d_\rho} + N_{d_\rho}$ ein d_ρ–dimensionales Jordan Kästchen falls $d_\rho > 1$ und $J(\lambda_\rho, 1) = \lambda_\rho E_1 \in \mathbb{C}^{1,1}$. Wegen (2) bleibt zu zeigen, dass T zyklisch ist, wenn λ_ρ, $\rho = 1, \ldots, r$ paarweise verschieden sind.

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach r. Für $r = 1$ folgt die Behauptung aus (3) mit $x_0 = e_d$. Zum Induktionsschritt $r \to r + 1$ sei

$$T' = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

mit $K = J(\lambda, \delta), \lambda \neq \lambda_\rho$ für $\rho = 1, \ldots, r$ und $\delta \in \mathbb{N}$. Bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_\delta, e_{\delta+1}, \ldots, e_{\delta+d_1}, \ldots, e_{\delta+(\mathrm{d}-d_{r-1})}, \ldots, e_{\delta+d}$ sei $x_0' := e_\delta + e_{\delta+d_1} + \ldots + e_{\delta+d}$. Wir zeigen, dass x_0' zyklisch für T' ist. Sei $y' = \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$ mit $v \in \mathbb{C}^\delta, y \in \mathbb{C}^d$ vorgegeben. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ mit $P(T)x_0 = y$ für $x_0 = e_{d_1} + e_{d_1+d_2} + \ldots + e_d \in \mathbb{C}^d$. Das Polynom $Q := \left(X - \lambda_1 X^0\right)^{d_1} \cdots \left(X - \lambda_r X^0\right)^{d_r}$ erfüllt offenbar $Q(T) = 0$ und $Q(K) = ((\lambda - \lambda_1)E_\delta + N_\delta)^{d_1} \cdots ((\lambda - \lambda_r)E_\delta + N_\delta)^{d_r}$. Falls $\delta = 1$ ist $K = \lambda E_1$ und $Q(K) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{d_r} E_1$. Falls $\delta > 1$ ist $Q(K) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{d_r} E_\delta + q(N_\delta) N_\delta$ mit einem gewissen Polynom $q \in \mathbb{C}[X]$. Daher ist in jedem Fall die letzte Komponente von $Q(K)e_\delta$ nicht null. Nach (3) existiert somit ein Polynom p mit $p(K)Q(K)e_\delta = v - P(K)e_\delta$. Dann gilt für das Polynom $P' := P + pQ$

$$P'(T') = \begin{pmatrix} P'(K) & 0 \\ 0 & P'(T) \end{pmatrix}, \quad P'(T')x_0' = \begin{pmatrix} P'(K) & e_\delta \\ P'(T) & x_0 \end{pmatrix},$$

$P'(K)e_\delta = P(K)e_\delta + p(K)Q(K)e_\delta = v$, $P'(T)x_0 = P(T)x_0 + p(T)Q(T)x_0 = P(T)x_0 = y$ und somit $P'(T')x_0' = y'$. □

Ein Maßraum $(Z, \mathcal{A}, \kappa)$ heißt **separabel**, wenn $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ existieren derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ und $\Delta \in \mathcal{A}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\lambda(\Delta \triangle A_n) < \epsilon$ gibt.

(29) Faktorisierungslemma. *Sei $(Z, \mathcal{A}, \kappa)$ ein separabler Maßraum mit $\kappa(Z) = 1$. Dann existiert eine messbare Funktion $a : Z \to [0, 1[$ derart, dass die Abbildung $L^\infty_{a(\kappa)}([0, 1[, \mathbb{C}) \to L^\infty_\kappa(Z, \mathbb{C})$, $\tilde{h} \mapsto \tilde{h} \circ a$ eine lineare isometrische Bijektion ist. Insbesondere existiert zu jeder messbaren und beschränkten Funktion $h : Z \to \mathbb{C}$ eine messbare und beschränkte Funktion $\tilde{h} : [0, 1[\to \mathbb{C}$ mit*

$$h = \tilde{h} \circ a \quad \kappa\text{–}\textit{fast überall}\,.$$

Beweis. Sei $(Z, \mathcal{A}, \kappa)$ separabel mittels $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Zu $\Delta \in \mathcal{A}$ wähle eine Teilfolge (n_k) mit $\kappa(\Delta \triangle A_{n_k}) < (2^{-k})^2$. Setze $B := \bigcup_l \bigcap_{k \geq l} A_{n_k}$ $(= \liminf_k A_{n_k})$.

Es wird jetzt $\kappa(\Delta \triangle B) = 0$ gezeigt. Für $B_l := \bigcap_{k\geq l} A_{n_k}$ gilt $\Delta \triangle B_l = \bigcup_{k\geq l}(\Delta \setminus A_{n_k}) \cup (B_l \setminus \Delta) \subset \bigcup_{k\geq l}(\Delta \triangle A_{n_k})$, weshalb $\kappa(\Delta \triangle B_l) \leq \sum_{k\geq l}(2^{-k})^2 \leq 2^{-l}$. Somit ist $\kappa(\Delta \setminus B_l) \leq 2^{-l}\ \forall\, l$ und daher $\kappa(\Delta \setminus B) = 0$. Wegen $B \setminus \Delta = \bigcup_{l\geq m}(B_l \setminus \Delta)$ $\forall\, m$ folgt auch $\kappa(B \setminus \Delta) \leq \sum_{l\geq m} 2^{-l}\ \forall\, m$ und damit $\kappa(B \setminus \Delta) = 0$.

Die Menge $A_0 := \bigcup_l \bigcap_{n\geq l} A_n$ ($= \liminf_n A_n$) ist eine κ–Nullmenge. Denn offensichtlich gilt $B \supset A_0$ für alle wie oben konstruierten Mengen $B \in \mathcal{A}$. Daher gilt insbesondere für B zu $\Delta := Z \setminus A_0$, dass $0 = \kappa(\Delta \triangle B) = \kappa(\Delta \setminus B) + \kappa(B \setminus \Delta) = \kappa(Z \setminus B) + \kappa(A_0)$. Also ist $\kappa(A_0) = 0$. Indem man A_n durch $A_n \setminus A_0$ ersetzt, erreicht man $A_0 = \emptyset$.

Die Funktion $a : Z \to [0,1[$, $a := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 1_{A_n}$ ist messbar. Wegen $A_0 = \emptyset$ wird jede Zahl $a(z) \in [0,1[$ als Dualbruch ohne Periode 1 dargestellt. [Aus dieser Darstellung von $a(z)$ folgt daher eindeutig, in welchen A_n das zugehörige z enthalten ist.] Für $x \in [0,1[$ bezeichne $d_n(x) \in \{0,1\}$ die n-te Dualziffer. Dann ist $d_n \circ a = 1_{A_n}$. Außerdem ist d_n messbar, denn $d_n^{-1}(\{1\}) = \bigcup\{[x, x+2^{-n}[: x = \eta_1 2^{-1} + \cdots + \eta_{n-1} 2^{-n+1} + 2^{-n} \text{ mit } \eta_i = 0,1\} \in \mathcal{B}$.

Zu einer Teilfolge (n_k) seien $B := \bigcup_l \bigcap_{k\geq l} A_{n_k}$ und $\tilde{B} := \bigcup_l \bigcap_{k\geq l} d_{n_k}^{-1}(\{1\})$. Dann ist $a^{-1}(\tilde{B}) = \bigcup_l \bigcap_{k\geq l} a^{-1}(d_{n_k}^{-1}(\{1\})) = \bigcup_l \bigcap_{k\geq l} A_{n_k} = B$. — Ist also $\Delta \in \mathcal{A}$ und (n_k) zu Δ wie oben konstruiert, dann gilt $1_\Delta = 1_B = 1_{\tilde{B}} \circ a$ κ–fast überall.

Die Abbildung $L^\infty_{a(\kappa)}([0,1[, \mathbb{C}) \to L^\infty_\kappa(Z, \mathbb{C})$, $\tilde{h} \mapsto \tilde{h} \circ a$ ist offensichtlich linear. Sie ist isometrisch, d.h. $\operatorname{ess\,sup}_{a(\kappa)} |\tilde{h}| = \operatorname{ess\,sup}_\kappa |\tilde{h} \circ a|$, denn $a(\kappa)(\{|\tilde{h}| \geq c|\}) = \kappa(a^{-1}(\{|\tilde{h}| \geq c\})) = \kappa(\{|\tilde{h} \circ a| \geq c\})$. In ihrem Bild liegt nach obiger Überlegung die totale Menge $\{1_\Delta : \Delta \in \mathcal{A}\}$. Somit ist die Abbildung auch surjektiv. $\square$

(30) Verallgemeinerung. *Lemma* (29) *gilt auch für unbeschränkte messbare* $h : Z \to \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $\Delta_n := \{n-1 \leq |h| < n\} \in \mathcal{A}$ und $\tilde{h}_n : [0,1[\to \mathbb{C}$ nach (29) derart, dass $h 1_{\Delta_n} = \tilde{h}_n \circ a$ κ–fast überall. Dann ist $h = \sum_n h 1_{\Delta_n} = \sum_n (\tilde{h}_n \circ a) = (\sum_n \tilde{h}_n) \circ a$ auf dem Komplement einer κ–Nullmenge N. Sei $\tilde{N} := \{x \in [0,1[: \sum_n \tilde{h}_n(x) \text{ konvergiert nicht}\}$. Dann ist $\tilde{N}$ messbar mit $a^{-1}(\tilde{N}) \subset N$. Daher ist $h = \tilde{h} \circ a$ κ–fast überall, wobei $\tilde{h} := (\sum_n \tilde{h}_n 1_{\tilde{B}})$ mit $\tilde{B} := [0,1[\setminus \tilde{N}$. $\square$

Zum folgenden Satz vergleiche man die Aufgabe (40).

(31) Satz. *Sei H ein separabler Hilbertraum und sei $A \subset \mathcal{L}(H)$ eine Menge kommutierender normaler Operatoren. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $C \in \mathcal{L}(H)$ derart, dass*

$$A \subset \{h[C] : h : \sigma(C) \to \mathbb{C} \text{ messbar und beschränkt}\}.$$

Beweis. Wir betrachten die von A erzeugte kommutative Unter-C^*–Algebra von $\mathcal{L}(H)$, die wir weiterhin mit A bezeichnen. Sei $\Delta(A)$ ihr Strukturraum und E ihr Spektralmaß gemäß dem Spektralsatz (2.14). Insbesondere gilt $T = \int \hat{T}\, dE \ \forall\ T \in A$. Seien Z_i, $i = \infty, 1, 2, \dots$ die Multiplizitätsbereiche von E. Nach dem Struktursatz (23) ist o.E. $H = \bigoplus_i L^2_{\lambda_i}(Z_i, W_i)$ und $E = \bigoplus_i E_i^{\text{kan}}$ mit Hilberträumen W_i der Dimension i und Maßen λ_i mit $\lambda_i(Z_i) \in \{0, 1\}$. Da $L^2_{\lambda_i}(Z_i, W_i)$ separabel ist, ist der Maßraum $(Z_i, \mathcal{B}_i, \lambda_i)$ mit $\mathcal{B}_i$ die σ–Algebra der Borelmengen in Z_i separabel.[9] Seien $I_\infty := [\frac{1}{2}, 1[$, $I_i := [\frac{1}{i+2}, \frac{1}{i+1}[$, $i = 1, 2, \dots$ und, in Anwendung von (29), $c_i : Z_i \to I_i$ messbar derart, dass $L^\infty_{\lambda_i}(Z_i, \mathbb{C}) = \{h_i \circ c_i : h_i \in L^\infty_{c_i(\lambda_i)}(I_i, \mathbb{C})\}$.

Setze $C_i := \int c_i\, dE_i^{\text{kan}}$ und $C := \bigoplus_i C_i \in \mathcal{L}(H)$. Dann ist C selbstadjungiert mit $\sigma(C) \subset [0, 1[$.

Sei nun $f : \Delta(A) \to \mathbb{C}$ stetig oder gleich allgemeiner messbar und beschränkt. Zu $f_i := f 1_{Z_i}$ sei $h_i \in L^\infty_{c_i(\lambda_i)}(I_i, \mathbb{C})$ derart, dass $f_i = h_i \circ c_i$ λ_i–fast überall. Dann gilt $\int f\, dE = \sum_i \int f_i\, dE_i^{\text{kan}} = \sum_i \int h_i \circ c_i\, dE_i^{\text{kan}} = \sum_i \int h_i\, dc_i(E_i^{\text{kan}}) = \sum_i h_i[C_i]$, was gleich $(\sum_i h_i 1_{I_i})[C]$ ist, wobei $\sum_i h_i 1_{I_i}$ außerhalb $\sigma(C)$ gleich Null gesetzt wird. $\square$

[9] Nach *H.J. Meister, Mathematische Hilfsmittel der Theoretischen Physik, Sektion Physik Univ. München 1979, S.121*, (G.42)b) besitzt die Quotienten-σ–Algebra $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ nach dem Ideal $\mathcal{N} := \{\Delta \in \mathcal{A} : \lambda(\Delta) = 0\}$ der Nullmengen ein abzählbares Erzeugendensystem $\{[\Delta_1], [\Delta_2]. \dots\}$. Sei S die davon erzeugte Algebra. Sie ist abzählbar, denn $S = \bigcup_n S_n$, wobei S_n die endliche von den Elementen $[\Delta_1], \dots, [\Delta_n]$ erzeugte Algebra bezeichnet. Sei $\mathcal{R} := \{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ ein Repräsentantensystem von S. Das bedeutet, dass es zu jedem $[A] \in S$ ein n mit $[A] = [A_n]$, d.h. mit $\lambda(A \triangle A_n) = 0$ gibt. Die Behauptung ist nun, dass $(Z, \mathcal{A}, \lambda)$ separabel mittels $\mathcal{R}$ ist. Zunächst ist $\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{A} : \exists n \text{ mit } \lambda(A \triangle A_n) = 0\}$ offenbar eine Algebra. Weiter ist $\mathcal{S}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$, denn ist $\mathcal{A}_1$ eine σ–Algebra mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_1$, dann ist insbesondere $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}_1$ und $S = \mathcal{S}/\mathcal{N} \subset \mathcal{A}_1/\mathcal{N}$, woraus $\mathcal{A}_1/\mathcal{N} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ und somit $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ folgt. Gemäß einem Approximationssatz der Maßtheorie existiert nun zu jedem $\Delta \in \mathcal{A}$ und $\epsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{S}$ mit $\lambda(\Delta \triangle A) < \epsilon$. Wegen $\lambda(A \triangle A_n) = 0$ für ein n, folgt daraus die Behauptung.