Analysis 3 für Physiker *

Domenico P.L. Castrigiano †

*Vorlesungsskript WS 2010 erstellt von Diana Beyerlein nach einer Vorlage von Dipl. Math. W.Kinzner
†Zentrum Mathematik TU München

Inhaltsverzeichnis

23 Der Integralsatz von Cauchy

Die nächsten beiden Kapitel beschäftigen sich mit den Hauptsätzen der Funktionentheorie.

(1) Holomorphe Funktion. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. Dann heißt f holomorph, wenn f differenzierbar ist, d.h. wenn $f'(z)$ für jedes $z \in U$ existiert. Nach (8.1) ist

$$f'(z) = \lim_{h \to 0, h \neq 0, z+h \in U} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Das folgende Beispiel ist fundamental.

(2) Beispiel. Seien $U := U_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ und $f : U \to \mathbb{C}$ durch eine auf U konvergente Potenzreihe um a, d.h. mit Konvergenzradius $\geq r$, gegeben. Ist also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, dann existiert und ist

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-a)^{n-1}$$

für jedes $z \in U$, siehe (10.13)(d). Also ist f holomorph.

(3) Reellifizierung. Im Folgenden fassen wir $\mathbb{C}$ als 2–dimensionalen reellen Vektorraum mittels der natürlichen reell-linearen Bijektion $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, auf.

(a) Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linear, d.h. es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $Tz = cz \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Wie sieht T als lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^2$ aus, d.h. wie lautet $\tilde{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{T} := \iota \circ T \circ \iota^{-1}$? Sei $c = a + ib$ mit $a = \operatorname{Re} c$ und $b = \operatorname{Im} c$. Dann ist $\tilde{T}(x,y) = \iota \circ T(\iota^{-1}(x,y)) = \iota \circ T(x+iy) = \iota((a+ib)(x+iy)) = \iota(ax - by + i(bx + ay)) = (ax - by, bx + ay)$. Folglich ist

$$\tilde{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (ax - by, bx + ay).$$

Die $\tilde{T}$ bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ darstellende Matrix lautet

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Sie stellt die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ mit der komplexen Zahl c = a +ib dar.

(b) Die reellen Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sind **Drehstreckungen**, denn $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, wobei der Streckungsfaktor $r \geq 0$ und der Drehwinkel $\varphi \in [0, 2\pi[$ die Polarkoordinaten von $c := a + ib = r\, e^{i\varphi}$ sind.

(c) Einer Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ entspricht die reelle Abbildung $\tilde{f} : \iota(U) \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{f} := \iota \circ f \circ \iota^{-1}$. In Komponenten ist

$$\tilde{f} = (u, v), \quad u := (\operatorname{Re} f) \circ \iota^{-1}, \quad v := (\operatorname{Im} f) \circ \iota^{-1}.$$

Wenn U offen in $\mathbb{C}$ ist, dann ist $\iota(U)$ offen in $\mathbb{R}^2$ und umgekehrt. In (4) gehen wir der Frage nach, in welchem Zusammenhang die Differenzierbarkeit von f mit der von $\tilde{f}$ steht.

Beispiele.

- $f(z) := e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) \Rightarrow \tilde{f}(x,y) = (e^x\cos(y),\, e^x\sin(y)) \Rightarrow u(x,y) = e^x\cos(y),\ v(x,y) = e^x\sin(y)$.
- $f(z) := z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow \tilde{f}(x,y) = (x^2 - y^2,\, 2xy) \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.
- $f(z) := \frac{1}{z} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \tilde{f}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) \Rightarrow u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

(4) Lemma. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z = x + iy \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist differenzierbar in z mit Ableitung $f'(z)$.*

(ii) *$\tilde{f}$ ist differenzierbar in (x,y) **und** die Jacobi-Matrix $J_{\tilde{f}}(x,y) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist eine Drehstreckung.*

Gelten (i), (ii), *dann ist*

$$J_{\tilde{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z) & -\operatorname{Im} f'(z) \\ \operatorname{Im} f'(z) & \operatorname{Re} f'(z) \end{pmatrix}.$$

Beweis. (i) bedeutet, dass $0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)-f'(z)h}{h} =$

$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)-f'(z)h|}{|h|} = \lim_{\|\iota(h)\|_2\to 0} \frac{\|\tilde{f}(\iota(z)+\iota(h))-\tilde{f}(\iota(z))-(\iota\circ f'(z)\circ\iota^{-1})(\iota(h))\|_2}{\|\iota(h)\|_2}$. Letzteres bedeutet, dass $\tilde{f}$ differenzierbar ist in $\iota(z) = (x,y)$ mit $D\tilde{f}(\iota(z)) = \iota \circ f'(z) \circ \iota^{-1}$. Nach (3)(a) ist $J_{\tilde{f}}(\iota(z)) = J_{\tilde{f}}(x,y)$ wie angegeben und es gilt (ii). — Umgekehrt, wenn $J_{\tilde{f}}(x,y)$ eine Drehstreckung ist, dann ist $J_{\tilde{f}}(x,y)$ die Darstellungsmatrix von $\tilde{T}$, wobei T gemäß (3)(b), (a) die Multiplikation mit einer komplexen Zahl c ist. Aus $0 = \lim_{\|\iota(h)\|_2\to 0} \frac{\|\tilde{f}(\iota(z)+\iota(h))-\tilde{f}(\iota(z))-\tilde{T}(\iota(h))\|_2}{\|\iota(h)\|_2}$ folgt dann analog, dass $f'(z)$ existiert und gleich c ist. □

(5) Sprechweisen. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ist f differenzierbar, dann heißt f der Deutlichkeit halber auch komplex differenzierbar. Man nennt f **reell differenzierbar**, wenn $\tilde{f} = \iota \circ f(z) \circ \iota^{-1}$ differenzierbar ist, siehe (3)(c). Demnach besagt Lemma (4), dass f genau dann differenzierbar und somit holomorph ist, wenn f reell differenzierbar ist und die Jacobi Matrix von $\tilde{f}$ eine Drehstreckung ist.

(6) Lemma. *Sei f differenzierbar in $z = x + iy$. Dann gelten*

(a) $\operatorname{Re} f'(z) = \partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y)$

(b) $\operatorname{Im} f'(z) = \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$.

Beweis. Da $\operatorname{Re} f'(z) = \operatorname{Re}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Re}\left(\bar h\,(f(z+h)-f(z))\right)}{|h|^2}$, ist

$$\operatorname{Re} f'(z) = \lim_{(h_1,h_2)\to 0}\frac{h_1(u(\iota(z+h))-u(\iota(z))+h_2(v(\iota(z+h))-v(\iota(z)))}{h_1^2+h_2^2}$$

mit $h = h_1 + ih_2$. Führt man hier den Grenzübergang $0 \neq (h_1,h_2) \to 0$ so, dass $h_2 = 0$ und $0 \neq h_1 \to 0$, erhält man $\partial_x u(x,y)$ als Grenzwert. Setzt man hingegen $h_1 = 0$ und läßt $0 \neq h_2 \to 0$, lautet der Grenzwert $\partial_y v(x,y)$. Das zeigt (a). Analog beweist man (b). □

(7) Cauchy–Riemann Differentialgleichungen. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist holomorph.*

(ii) f *ist reell differenzierbar und es gelten für* u, v *die Cauchy–Riemann DGL auf* $\iota(U)$ *(vgl.* (3)(c)*):*

$$\partial_x u = \partial_y v\ ,\ \ \partial_y u = -\partial_x v.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt nach (6). — In (ii) existiert $J_{\tilde f}(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y)) \end{pmatrix}$, was wegen der Cauchy–Riemann DGL eine Drehstreckung ist. Damit folgt (i) aus (4). □

(8) Beispiel. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph mit $\exp' = \exp$, siehe das Beispiel (iv) zu (8.1). Nach dem vorangegangenen Beispiel sind $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $u(x,y) = e^x \cos(y)$ und $v(x,y) = e^x \sin(y)$. Damit gelten in der Tat

$$\partial_x u(x,y) = e^x \cos(y) = \partial_y v(x,y),\ \partial_y u(x,y) = -e^x \sin(y) = -\partial_x v(x,y).$$

(9) Bemerkung. Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und u, v: $D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Erfüllen u,v die Cauchy–Riemann DGL, dann gelten $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ auf D, d.h. u, v sind Lösungen der Laplacegleichung auf D.

Beweis. $\partial_x^2 u = \partial_x(\partial_x u) = \partial_x(\partial_y v) = \partial_y(\partial_x v) = \partial_y(-\partial_y u) = -\partial_y^2 u$ und analog für v. □

(10) Erinnerung. *Seien* $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ *und* $\varphi : I \to \mathbb{C}$ *eine Regelfunktion. Dann sind* $\operatorname{Re}\varphi$ *und* $\operatorname{Im}\varphi$ *Regelfunktionen und* $\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Re}\varphi + i \operatorname{Im}\varphi)(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Re}\varphi)(t)dt + i\int_a^b (\operatorname{Im}\varphi)(t)dt$, *wobei die Integrale reell sind. Daraus folgt:*

$$\operatorname{Re}\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Re}\varphi)(t)dt, \quad \operatorname{Im}\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b (\operatorname{Im}\varphi)(t)dt.$$

(11) Komplexes Kurvenintegral. Seien $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma[a,b] \subset U$. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

das komplexe Kurvenintegral von f längs γ.

(12) Bemerkungen.

- Wie wir sehen werden, hat das komplexe Kurvenintegral ganz ähnliche Eigenschaften wie das Kurvenintegral für Vektorfelder.
- $\gamma'(t) = (\mathrm{Re}\, y)'(t) + i(\mathrm{Im}\, y)'(t)$ nach Definition (8.1) der Differenzierbarkeit.
- Das komplexe Kurvenintegral ist invariant unter orientierungstreuer Umparametrisierung. Ist $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ eine C^1–Parametertransformation (16.8) und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$, dann gilt $\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \pm \int_\gamma f(z)dz$ mit $+$ falls $\varphi' > 0$ und $-$ falls $\varphi' < 0$. Der Beweis hierfür verläuft ganz analog zum Beweis von (21.5).

Das folgende Beispiel ist fundamental.

(13) Beispiel. *Sei γ die im positiven mathematischen Drehsinn durchlaufene Kreislinie um $c \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$, nämlich $\gamma(t) = c + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann gelten:*

(a) $\int_\gamma (z-c)^n dz = 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

(b) $\int_\gamma \frac{1}{z-c} = 2\pi i$

Beweis. $\int_\gamma (z-c)^n dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t) - c)^n \gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} (r\,e^{it})^n (ir\,e^{it})\,dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt$ ist 0 falls $n \neq -1$ und gleich $2\pi i$ für $n = -1$. □

(14) Lemma. *Seien* f *und* γ *wie in* (11), $\mathrm{Spur}(\gamma) = \gamma([a,b])$, $M := \max_{z\in \mathrm{Spur}(\gamma)} |f(z)|$ *und* $L(\gamma)$ *die Länge von* γ *bez.* $|\cdot|$. *Weiter seien* $f_n \in C(\mathrm{Spur}(\gamma))$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gelten:*

(a) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M\,L(\gamma)$.

(b) $f_n \to f$ *gleichmäßig auf* $\mathrm{Spur}(\gamma) \implies \int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$.

Beweis. (a) $\left|\int f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \le M \int_a^b |\gamma'(t)|dt = M\,L(\gamma)$ nach (16.16). (b) folgt aus (9.14). □

(15) Stammfunktion. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt eine Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar ist mit $F' = f$.

(16) Lemma zur Stammfunktion. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : U \to \mathbb{C}$ *stetig und* F *eine Stammfunktion von* f*. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve γ *mit Spur in U. Insbesondere ist (vgl.* (21.7)*)*

$$\oint f(z)dz = 0.$$

Beweis. $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t)dt \overset{\text{HDI}}{=} (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$. □

(17) Beispiele.

(a) Seien $c \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \sum_{k=-m,\, k\neq -1}^{m} a_k(z-c)^k.$$

Dann ist $F(z) = \sum_{k=-m,\, k\neq -1}^{m} \frac{a_k}{k+1}(z-c)^{k+1}$ eine Stammfunktion von f. Daher gilt nach (16), dass $\oint f(z)dz = 0$ für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur in $\mathbb{C} \setminus \{c\}$. Ein Spezialfall hiervon ist (13)(a).

(b) Seien $c \in \mathbb{C}$ und $V \subset \mathbb{C}$ offen mit $c \in V$. Dann hat

$$f : V\backslash\{c\} \to \mathbb{C},\ f(z) := \frac{1}{z-c}$$

keine Stammfunktion. Dies folgt aus Beispiel (13)(b) und aus (16).

(c) Bekanntlich erfüllt $F : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $F(t) = \ln(|t|)$ die Gleichung $F'(t) = \frac{1}{t}$. Dennoch ist F keine Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ im Sinne von Definition (15), weil $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ **nicht offen in** $\mathbb{C}$ ist.

(18) Satz zur Stammfunktion. *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und sternförmig bezüglich* $c \in U$ *und sei* $f : U \to \mathbb{C}$ *stetig. Weiter sei*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0$$

für alle Dreieckswege γ *mit Spur in* U *und einer Ecke* c*. Dann hat* f *eine Stammfunktion.*

Beweis. Allgemein für $a, b \in \mathbb{C}$ bezeichne $\int_a^b f(\zeta)\,d\zeta$ das komplexe Kurvenintegral von f längs der Strecke $\sigma(t) := tb + (1-t)a$ für $t \in [0,1]$ von a nach b.

Für $z \in U$ sei $F(z) := \int_c^z f(\zeta)d\zeta$. Sei $r > 0$ so klein, dass $U_r(z) \subset U$. Sei $w \in U_r(z) \setminus \{z\}$ beliebig. Sei zudem γ ein Dreiecksweg mit Ecken c, z, w. Dann gilt nach Voraussetzung $0 = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_c^z \cdots + \int_z^w \cdots + \int_w^c \cdots$, weshalb

$$F(w) - F(z) = \int_z^w f(\zeta)d\zeta.$$

Weil $\int_z^w 1 d\zeta = \int_0^1 1\cdot\sigma'(t)dt = \int_0^1 (w-z)dt = w-z$, folgt $\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \frac{1}{w-z}\int_z^w (f(\zeta)-f(z))d\zeta$. Nach (14)(a) gilt daher $\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|w-z|} L(\sigma)\max_\zeta |f(\zeta)-f(z)| = \max_\zeta |f(\zeta)-f(z)|$. Da $\{\zeta = tw+(1-t)z : t\in[0,1]\}$ kompakt und f stetig ist, folgt $\max_\zeta|f(\zeta)-f(z)| \to 0$, wenn $w \to z$. Es folgt daraus, dass F differenzierbar in z ist mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$. □

(19) Lemma von Goursat. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden Dreiecksweg γ*, wofür das volle abgeschlossene Dreieck* $\triangle$ *in U liegt.*

Beweis. Sei $\triangle_0 \subset U$ ein solches Dreieck. Man zerlege $\triangle_0$ in vier kongruente Dreiecke $\tilde\triangle_1,\dots,\tilde\triangle_4$, indem die Seitenmitten von $\triangle_0$ verbunden werden. Die Ränder γ_0 von $\triangle_0$ und $\tilde\gamma_k$ von $\tilde\triangle_k$ für $k = 1,\dots,4$ werden dann im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen. Man erhält

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\tilde\gamma_k} f(z)dz,$$

weil sich die Beiträge der Seiten des inneren Dreiecks aufheben. Wähle $j \in \{1,\cdots,4\}$ so, dass für $\triangle_1 := \tilde\triangle_j$, $\gamma_1 := \tilde\gamma_j$ gilt

$$\left|\int_{\gamma_0} f(z)dz\right| \le \sum_{k=1}^4 \left|\int_{\tilde\gamma_k}\cdots\right| \le 4\left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right|.$$

Wiederholt man dieses Verfahren für $\triangle_1$ anstelle von $\triangle_0$ und so fort, erhält man eine Folge $(\triangle_n)_{n\ge 0}$ von Dreiecken, wofür

$$\left|\int_{\gamma_0} f(z)dz\right| \le 4^n\left|\int_{\gamma_n} f(z)dz\right|, \quad \operatorname{diam}(\triangle_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\triangle_0), \quad L(\gamma_n) = 2^{-n} L(\gamma_0).$$

Da $\triangle_0 \supset \triangle_1 \supset \cdots \supset \triangle_n \supset \dots$ und alle $\triangle_n$ kompakt sind, folgt $\bigcap_{n=0}^\infty \triangle_n \neq \emptyset$. Weil $\operatorname{diam}(\triangle_n) \to 0$ für $n\to\infty$, ist der Schnitt einpunktig, d.h. $\bigcap_n \triangle_n = \{c\}$. Die Funktion

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c) & \text{für } z \neq c \\ 0 & \text{für } z = c \end{cases}$$

ist stetig, weil f differenzierbar ist. Da $f(z) = f(c)+(z-c)f'(c)+(z-c)g(z)$ für alle $z\in U$ ergibt die Integration $\int_{\gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma_n}[f(c)+(z-c)f'(c)]\,dz + \int_{\gamma_n}(z-c)g(z)dz$. Das erste Kurvenintegral verschwindet nach (17)(a). Setze $M_n := \max_{z\in \mathrm{Spur}(\gamma_n)}|g(z)|$. Mit (14)(a) folgt die Abschätzung $\left|\int_{\gamma_n} f(z)dz\right| \le L(\gamma_n)\max_{z\in\mathrm{Spur}(\gamma_n)}|(z-c)g(z)| \le L(\gamma_n)^2 M_n \le (2^{-n}L(\gamma_0))^2 M_n$ und somit $\left|\int_{\gamma_0} f(z)dz\right| \le 4^n\left|\int_{\gamma_n} f(z)dz\right| \le L(\gamma_0)^2 M_n$. Wegen der Stetigkeit von g gilt $M_n \to |g(c)| = 0$ für $n\to\infty$. Das hat $\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$ zur Folge. □

(20) Der Integralsatz von Cauchy. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und sternförmig und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion und*

$$\oint f(z)dz = 0$$

für jede geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve in U.

Beweis. Sei γ ein Dreiecksweg mit $\mathrm{Spur}(\gamma) \subset U$. Dann ist das zugehörige Dreieck in U enthalten, weil U sternförmig ist. Nach dem Lemma von Goursat (19) folgt $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Dann hat f eine Stammfunktion nach dem Satz zur Stammfunktion (18). Nach (16) gilt $\oint f(z)dz = 0$. □

(21) Bemerkung. Die Voraussetzung, dass U offen und sternförmig ist, lässt sich in (20) allgemeiner durch die Bedingung, dass U offen und einfach wegzusammenhängend ist, ersetzen. Vgl. dazu die Bemerkung zu (21.17).

(22) Die Integralformel von Cauchy für Kreise. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph und* $\tilde{U}_r(c) \subset U$ *mit* $c \in U$, $r > 0$. *Dann gilt für alle* $z \in U_r(c)$ *die Formel*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei γ *die im positiven Sinn durchlaufene Kreislinie* $\{z : |z - c| = r\}$ *ist.*

Beweis. Sei $z \in U_r(c)$ fest. Wir gehen von folgender Umformung

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

aus und zeigen zunächst, dass

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i.$$

Sei $r' > 0$ derart, dass $U_{r'}(z) \subset U_r(c)$. Nach (13)(b) ist $\int_{\gamma'} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$. Man verbinde die Punkte $z + r'$ und $z - r'$ mit horizontalen Strecken und die Punkte $z + ir'$ und $z - ir'$ mit vertikalen Strecken mit dem Rand von $U_r(c)$. Damit wird $U_r(c) \setminus U_{r'}(z)$ in vier Teile zerlegt. Für $r' > 0$ klein genug, liegen diese in offenen, sternförmigen Teilmengen von U. Integriert man längs ihrer Ränder im positiven Sinn, heben sich die Beiträge längst der Strecken gegenseitig auf und gemäß dem Integralsatz von Cauchy (20) folgt $\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma'} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass das mittlere Integral in der obiger Umformung verschwindet. Dazu sei $r'' > r$ derart, dass $U_{r''}(c)$ noch in U enthalten ist. Die Funktion

$$g : U_{r''}(c) \to \mathbb{C}, \quad g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

ist stetig, weil f differenzierbar ist. Auf $U_{r''}(c) \setminus \{z\}$ ist g holomorph. Wir zeigen, dass

$$\int_\delta g(\zeta) d\zeta = 0 \qquad (\star)$$

für jeden Dreiecksweg δ in $U_{r''}(c)$. Nach (18) hat dann g eine Stammfunktion und die Behauptung folgt nach (16).

Wenn z außerhalb des Dreiecks liegt, dann gilt $(\star)$ nach Goursat (19). Wenn z innerhalb liegt, zerlege man das Dreieck in zwei Dreiecke, so dass z auf einer Seite liegt. Es bleibt also der

Fall zu behandeln, dass z auf einer Seite des Dreiecks liegt. Daher genügt es letztlich für einen Dreiecksweg δ in $U_{r''}(c)$ mit Ecken a, u, b zu zeigen, dass (gleichgültig wo z liegt)

$$\int_\delta g(\zeta)d\zeta \stackrel{u\to b}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Nun ist $\int_\delta g(\zeta)d\zeta = \int_0^1 [g\,(tu + (1-t)a)(u-a) - g(tb + (1-t)a)\,(b-a)]\,dt + \int_0^1 g(tb + (1-t)u)(b-u)dt$. Für $u \to b$ verschwindet der Integrand des ersten Integrals gleichmäßig, weil g gleichmäßig stetig auf Kompakta ist. Aber auch der zweite Integrand verhält sich so, da g als stetige Funktion beschränkt auf Kompakta ist. Damit folgt obige Behauptung. □

Kurze Wiederholung

- $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig bez. c, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und $\int_\triangle f(\zeta)d\zeta = 0\ \forall \triangle$ Dreiecksweg mit Ecke $c \implies$ f hat Stammfunktion nach dem *Satz zur Stammfunktion* (18).
- $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph $\implies$ f hat Stammfunktion nach dem *Integralsatz von Cauchy* (20).
- $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph $\implies f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ \forall\, z \in U$ nach der *Integralformel von Cauchy* (22).

---

(23) Mittelwerteigenschaft. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z \in U$. Sei weiter $r > 0$ mit $\bar{U}_r(z) \subset U$. Dann ist*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt \text{ und } |f(z)| \leq \max_{|\zeta - z| = r} |f(\zeta)|.$$

Beweis. Wertet man die Integralformel von Cauchy (22) für die Kurve $\gamma(t) = z + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ aus, so ergibt sich obiger Ausdruck für $f(z)$. Daraus folgt unmittelbar die angegebene Abschätzung für $|f(z)|$. □

(24) Potenzreihenentwicklung nach Cauchy–Taylor. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\bar{U}_r(a) \subset U$ mit $a \in U$, $r > 0$. Dann gilt die folgende Darstellung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ mit } c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}d\zeta$$

von f als auf $U_r(a)$ konvergente Potenzreihe. Dabei ist γ die im positiven Sinn durchlaufene Kreislinie um a mit Radius r.

Beweis. O.E. sei $a = 0$, ansonsten betrachte man $\tilde{f}(z) := f(z + a)$. Sei nun $z \in U_r(0)$ fest. Nach (22) ist $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Für $|\zeta| = r$ ist $|\frac{z}{\zeta}| < 1$ und die geometrischen Reihe $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k$ liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\zeta)\, d\zeta \quad \text{mit} \quad g_k(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k.$$

Als Funktion auf der Kreislinie ist g_k beschränkt mit $\|g_k\|_s \le \frac{1}{r}\max_{|\zeta|=r}|f(\zeta)|\left(\frac{|z|}{r}\right)^k$. Weil $\frac{|z|}{r} < 1$ folgt daraus, dass $\sum_{k=0}^{\infty}\|g_k\|_s < \infty$ und somit $\sum_k g_k$ normal konvergent (d.h. normkonvergent in der Supremumsnorm) ist. Nach dem Weierstraß Kriterium (10.3) konvergiert $\sum_k g_k$ gleichmäßig. Mit (14)(b) folgt schließlich

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta\right] z^k.$$

□

(25) Korollar. *Eine holomorphe Funktion* f *lässt sich um jeden Punkt* a *des Definitionsbereichs* U *in eine Potenzreihe entwickeln, deren Konvergenzradius mindestens bis an den Rand von* U *reicht. Die Entwicklungskoeffizienten lauten*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta.$$

Insbesondere ist eine holomorphe Funktion f *in jedem Punkt beliebig oft differenzierbar. Daraus folgt*

$$|c_k| \le \frac{M}{r^k} \quad \textit{mit} \quad M := \max_{|\zeta - a| = r}|f(\zeta)|,$$

wobei r der Radius des Kreises in U *um* a *ist, der kleiner oder gleich dem Konvergenzradius der Potenzreihe ist. Damit ist schließlich* $|f^{(k)}(a)| \le M\frac{k!}{r^k}$.

(26) Ganze Funktion. Eine holomorphe Funktion mit Definitionsbereich ganz $\mathbb{C}$ (wie z.B. $z \mapsto e^z$) heißt ganze Funktion. *Sei* f *ganz und* $a \in \mathbb{C}$*. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k \text{ mit } c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius unendlich.

Beweis. Nach (25) gilt für jedes $r > 0$, dass $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ mit $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ eine für $|z - a| < r$ konvergente Potenzreihe ist. Da die Koeffizienten c_k unabhängig von r sind, folgt die Behauptung. □

(27) Satz von Liouville. *Sei* f *eine ganze und beschränkte Funktion. Dann ist* f *konstant.*

Beweis. Für die Potenzreihe in (26) gilt nach (25), dass $|c_k| \leq \frac{M}{r^k} \leq \frac{C}{r^k}$ mit $C := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| < \infty$. Da c_k von r nicht abhängt, folgt $c_k = 0$ für alle $k > 0$. Deshalb ist $f(z) = c_0$ konstant. □

Üb Man beweise den **Fundamentalsatz der Algebra**, dass jedes Polynom P über $\mathbb{C}$ vom Grad größer 0 mindestens eine Nullstelle besitzt.

(28) Satz von Morera. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig derart, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

für jeden Dreiecksweg γ zu einem in U enthaltenen Dreieck. Dann ist f holomorph.

Beweis. Sei $a \in U$ beliebig. Wähle $r > 0$ mit $U_r(a) \subset U$. Nach (18) hat $f|U_r(a)$ eine Stammfunktion F. Damit ist F holomorph mit $F' = f|U_r(a)$. Nach (25) ist F beliebig oft differenzierbar. Also ist f in a differenzierbar. □

(29) Bemerkung. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wie gezeigt, sind dann äquivalent:

(i) f ist holomorph

(ii) f ist reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen.

(iii) f hat Stammfunktion

(iv) $\oint f(z)dz = 0$

In (29) kann sternförmig durch einfach wegzusammenhängend ersetzt werden. Für $(i) \Leftrightarrow (ii)$, $(iii) \Rightarrow (i), (iv)$ und für $(iv) \Rightarrow (i)$ genügt es, dass U offen ist. Man vergleiche (29) mit der Bemerkung (21.17). Man erkennt, dass dabei die Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen der Integrabilitätsbedingung und die Stammfunktion dem Gradientenfeld entsprechen.

(30) Kompakte Konvergenz. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorph für alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass (f_n) gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. (Letzteres heißt, dass für jedes kompakte $K \subset U$ die Folge $(f_n|K)_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion auf K konvergiert .) Dann existiert $f : U \to \mathbb{C}$ derart, dass $f_n \to f$ punktweise. Es folgt, dass $f_n|K \to f|K$ gleichmäßig und f holomorph ist.*

Beweis. Zu zeigen ist die Holomorphie von f. Alles andere ist offensichtlich. Seien $\triangle \subset U$ ein beliebiges Dreieck und γ der zugehöriger Dreiecksweg. Da $\triangle$ kompakt ist, folgt nach Voraussetzung, dass $f_n|\triangle \to f|\triangle$ gleichmäßig und somit aus der Stetigkeit der $f_n|\triangle$, dass $f|\triangle$ stetig ist. Da $\triangle$ beliebig ist, folgt, dass f insgesamt stetig ist. Nach (14)(b) und dem Lemma von Goursat (19) ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$$

und mit dem Satz von Morera (28) folgt schließlich, dass f holomorph ist. □

(31) Lemma. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $S := \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}$ *mit* $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ *eine Gerade,* $f : U \to \mathbb{C}$ *stetig und* $f|(U \backslash S)$ *holomorph. Dann ist* f *holomorph.*

Beweis. Zunächst bemerkt man, dass S abgeschlossen und somit $U \setminus S$ offen ist. Damit ist die Voraussetzung an f sinnvoll. — Sei nun γ ein Dreiecksweg zu einem Dreieck $\triangle \subset U$. Nach Morera (28) ist

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad (\star)$$

zu zeigen. Falls $\triangle \cap S = \emptyset$, gilt $(\star)$ nach Goursat (19). Falls $\triangle$ durch S geteilt wird, ziehe man auf jeder Seite von S eine Parallele zu S ein. Es entstehen zwei geschlossene Polygonzüge α und β in $U \setminus S$. Weil $f|(U \backslash S)$ holomorph ist, gilt

$$\int_\alpha f(z)dz = 0 \text{ und } \int_\beta f(z)dz = 0,$$

unabhängig vom Abstand der Parallelen. Aus Stetigkeitsgründen bleibt dies gültig für Abstand Null (vergleiche dazu den letzten Teil des Beweises von (22)). Daraus folgt $(\star)$, weil sich die Beiträge längs S wegheben. □

Sei $H_\pm = \{z \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere bzw. untere offene komplexe Halbebene. Es ist $\overline{H}_\pm = H_\pm \cup \mathbb{R}$.

(32) Spiegelungsprinzip von Schwarz. *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und symmetrisch bez. der reellen Achse, d.h.* $U = \{\bar{z} : z \in U\}$. *Sei weiter* $g : U \cap \overline{H}_+ \to \mathbb{C}$ *stetig und derart, dass* $g|(U \cap H_+)$ *holomorph ist und* $g(U \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. *Setze*

$$f : U \to \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad f|U \cap \overline{H}_+ := g \quad \textit{und} \quad f(z) := \overline{g(\bar{z})} \quad \textit{für} \quad z \in U \cap H_-.$$

Dann ist f *holomorph.*

Beweis. Offenbar ist f ist stetig. Gemäß (31) bleibt zu zeigen, dass $U \cap H_- \to \mathbb{C}$, $z \to \overline{g(\bar{z})}$ holomorph ist. Sei $a \in U \cap H_-$. Dann ist $\bar{a} \in U \cap H_+$ und $g(z) = \sum_k c_k (z - \bar{a})^k$ nach (24) in einer offenen Kreisscheibe um $\bar{a}$. Damit ist $z \to \overline{g(\bar{z})} = \sum_k \bar{c}_k (z - \bar{a})^k$ in der gespiegelten Kreisscheibe um a holomorph. □

Einschub zur Topologie

In (21.14) wurde der Wegzusammenhang für einen metrischen Raum definiert. Allgemeiner ist der folgende Zusammenhangsbegriff.

(33) Zusammenhang. Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, falls $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen wie abgeschlossen sind.

(34) Lemma. X *wegzusammenhängend* $\Longrightarrow$ X *zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen X ist nicht zusammenhängend. Dann existiert $A \subset X$, $\emptyset \neq A \neq X$, A offen und abgeschlossen. Dann existiert $a \in A$, $b \notin A$ und eine Kurve $w : [0,1] \longrightarrow X$ mit $w(0) = a$, $w(1) = b$. Man nennt w auch einen **Weg** von a nach b. Betrachte

$$J := \{t \in [0,1] : w([0,t]) \subset A\} \quad \text{und} \quad T := \sup J.$$

Offenbar ist $[0,T[\subset J \subset [0,T]$. Wäre $T \in J$, dann $w(T) \in A$, $T < 1$ und es existiert $\delta > 0$ mit $w([T, T+\delta[) \subset A$, weil w stetig und A offen ist. Daraus folgt $\sup J \geq T + \delta$, was ein Widerspruch ist. Wäre $T \notin J$, dann $w(T) \in X \backslash A$, $T > 0$ und es existiert $\delta > 0$ mit $w(]T-\delta, T]) \subset X \setminus A$ weil w stetig und $X \backslash A$ offen. Daraus folgt $\sup J \leq T - \delta$, was ebenfalls ein Widerspruch ist. □

(35) Zusammenhängende Menge. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist (Y, d_Y) mit der induzierten Metrik $d_Y = d|(Y \times Y)$ ein metrischer Raum, siehe (13.2)(b). Man nennt Y zusammenhängend, wenn (Y, d_y) zusammenhängend ist

(36) Zusammenhang in $\mathbb{R}$. *Sei* $B \subset \mathbb{R}$. *Dann ist* B *genau dann zusammenhängend, wenn* B *einelementig oder ein Intervall ist.*

Beweis. Offenbar ist ein Intervall wegzusammenhängend und somit nach (34) zusammenhängend. — Sei nun B kein Intervall und nicht einelementig. Dann existieren $a, b \in B$ und $c \notin B$ mit $a < c < b$. Denn wenn mit $a, b \in B$ auch stets $[a, b] \subset B$ gilt, dann ist B ein Intervall mit den Endpunkten $\inf B$ und $\sup B$. Hieraus können wir folgern, dass $A := B \cap]-\infty, c[= B \cap]-\infty, c]$ offen und abgeschlossen in B ist mit $a \in A$ und $b \in \mathbb{R} \backslash A$. Das zeigt, dass B nicht zusammenhängend ist. □

(37) Satz vom zusammenhängenden Bild. *Seien* X, Y *metrische Räume und* $f : X \to Y$ *stetig. Dann gilt:*

- $B \subset X$ *zusammenhängend* $\Longrightarrow f(B)$ *zusammenhängend*
- $B \subset X$ *wegzusammenhängend* $\Longrightarrow f(B)$ *wegzusammenhängend*

Beweis. Offenbar genügt es, die Behauptung für die stetige surjektive Abbildung $B \to f(B)$, $x \mapsto f(x)$ zu zeigen. Daher kann o.E. angenommen werden, dass $B = X$ und f surjektiv ist.

Seien also X zusammenhängend und $Z \subset Y$ offen und abgeschlossen. Weil f stetig ist, ist $f^{-1}(Z)$ offen und abgeschlossen. Weil X zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(Z) \in \{\emptyset, X\}$. Somit ist $Z \in \{\emptyset, Y\}$, weil f surjektiv ist. — Seien nun X wegzusammenhängend und y_1, $y_2 \in Y$. Weil f surjektiv ist, existieren x_1, $x_2 \in X$ mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$. Sei $w : [0,1] \to X$ ein Weg von x_1 nach x_2. Dann ist die Komposition $f \circ w : [0,1] \to Y$ ein Weg von y_1 nach y_2. □

(38) Beispiel. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall nach (36) und (37). Daher existiert zu a, $b \in f(I)$ mit $a < b$ und $y \in]a, b[$ ein $x \in I$ mit $f(x) = y$. Ist außerdem I kompakt, dann ist auch $f(I)$ kompakt nach (14.10). Vgl. dazu den **Zwischenwertsatz** (7.17).

Es sei erinnert, dass eine **Äquivalenzrelation** auf einer Menge X reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Allgemein ist eine **Relation** auf X eine Teilmenge R von $X \times X$. Sie heißt **reflexiv**, wenn $(x, x) \in R \; \forall x \in X$. Sie heißt **symmetrisch**, wenn mit $(x, y) \in R$ auch $(y, x) \in R$ gilt. Schließlich nennt man sie **transitiv**, wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt, dass $(x, z) \in R$. Im Fall einer Äquivalenzrelation schreibt man gerne $x \sim y$ statt $(x, y) \in R$. Zu jedem $x \in X$ kann man die zugehörige Äquivalenzklasse $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$ betrachten. Offenbar ist stets $x \in [x]$ und es gilt $[x] = [y]$ genau dann, wenn $x \sim y$. Damit sind die Äquivalenzklassen nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen von X, deren Vereinigung ganz X ergibt. Sie bilden also eine **Partition** von X.

(39) Wegkomponente. *Sei X ein metrischer Raum. Für x, $y \in X$ bedeute $x \sim y$, dass es einen Weg von x nach y gibt. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert.* Die Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten.

Beweis. Die Reflexivität $x \sim x$ besteht, denn $w : [0, 1] \to X$, $w(t) := x$ ist ein Weg von x nach x. — Zur Symmetrie sei $x \sim y$. Damit existiert $w : [0, 1] \to X$ stetig mit $w(0) = x$, $w(1) = y$. Dann ist $\tilde{w} : [0, 1] \to X$, $\tilde{w}(t) := w(1 - t)$ ein Weg von y nach x. Also gilt $y \sim x$. — Zum Nachweis der Transitivität seien $x \sim y$, $y \sim z$. Damit existieren stetige Abbildungen $u : [0, 1] \to X$ mit $u(0) = x$, $u(1) = y$ und $v : [0, 1] \to X$ mit $v(0) = y$, $v(1) = z$. Setze $w : [0, 1] \to X$,

$$w(t) := \begin{cases} u(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Offenbar ist w ein Weg von x nach z. Damit gilt $x \sim z$. □

(40) Wegzusammenhang im $\mathbb{K}^n$. *Sei $U \subset \mathbb{K}^n$ offen. Dann sind die Wegkomponenten von U offen. Weiter gilt: U zusammenhängend $\iff$ U wegzusammenhängend.*

Beweis. Seien W eine Wegkomponente von U und $x \in W$. Dann existiert $r > 0$ mit $U_r(x) \subset U$. Da offenbar $y \sim x$ für alle $y \in U_r(x)$, folgt $U_r(x) \subset W$. Also ist W offen. — Wegen (34) bleibt $\Rightarrow$ zu zeigen. Angenommen U ist nicht wegzusammenhängend. Sei $W_0 \subset U$ eine Wegkomponente von U. Dann ist $\emptyset \neq W_0 \neq U$. Da $U \setminus W_0 = \bigcup\{W : W \text{ Wegkomponente}, \ W \neq W_0\}$, ist $U \setminus W_0$ offen (in U). Damit ist W_0 abgeschlossen in U. Dies ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von U. □

(41) Gebiet. $U \subset \mathbb{K}^n$ heißt Gebiet, wenn U offen und zusammenhängend ist.

Wir kehren nun zur Funktionentheorie zurück.

(42) Konstante Funktion. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f' = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Sei $a \in U$ beliebig. Gemäß (25) stellen wir f in einer Umgebung von a als konvergente Potenzreihe $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-a)^k$ dar. Somit ist $f'(z) = \sum_{k\geq 1} c_k k(z-a)^{k-1} = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung folgt daraus, dass $c_k k = 0\ \forall k \geq 1$, d.h. $c_k = 0\ \forall\, k \geq 1$. Daher ist $f(z) = c_0$ in einer Umgebung von a. Das zeigt, dass $A := \{z \in U : f(z) = c_0\}$ nichtleer und offen ist. Weil f stetig ist, ist $A = f^{-1}(\{c_0\})$ auch abgeschlossen. Da nun U nach Voraussetzung zusammenhängend ist, folgt $A = U$. Damit ist f konstant. □

Wenn U nicht zusammenhängend ist, z.B. wenn $U = U_1 \cup U_2$ mit $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ offen und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, dann ist $f|U_1 := c_1$, $f|U_2 := c_2$ für $c_1 \neq c_2$ nicht konstant, aber $f' = 0$.

(43) Satz von der lokalen holomorphen Inversen. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph und* $c \in U$ *mit* $f'(c) \neq 0$. *Dann existiert ein* $r > 0$ *derart, dass* $U_0 := U_r(c) \subset U$ *und*

(i) $f(U_0)$ *offen in* $\mathbb{C}$ *und* $U_0 \to f(U_0)$, $z \mapsto f(z)$, *bijektiv ist,*

(ii) *die Umkehrfunktion* $g : f(U_0) \to \mathbb{C}$ *von* $f|U_0$ *holomorph ist.*

Beweis. Zunächst ist $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig, weil f nach (25) sogar beliebig oft differenzierbar ist. Mit $f'(c) =: \alpha + i\beta \neq 0$ ist $J_{\tilde f}(\iota(c)) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ nach (4). Die Matrix ist invertierbar, da $\det\big(J_{\tilde f}(\iota(c))\big) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$. Ihre Inverse lautet

$$J_{\tilde f}(\iota(c))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix},$$

was offensichtlich ebenfalls eine Drehstreckung ist. Nach dem Satz von der lokalen Inversen (19.6) folgt die Existenz von U_0, so dass (i) erfüllt ist und $\tilde g$ differenzierbar ist mit $J_{\tilde g}(\iota(f(z))) = J_{\tilde f}(\iota(z))^{-1}\ \forall z \in U_0$. Bezüglich $\tilde g$ und $\tilde f$ siehe (3)(c). Die Inverse einer Drehstreckung ist wiederum eine Drehstreckung (s.o). Mit (4) folgt daraus die Behauptung. □

(44) Biholomorphe Funktion. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $f : U \to V$ biholomorph, wenn f bijektiv, holomorph und $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls holomorph ist.

Um im Einklang mit dem bisherigen Sprachgebrauch zu sein, ist f als Funktion von U in $\mathbb{C}$ und entsprechend die Umkehrabbildung als Funktion von V in $\mathbb{C}$ aufzufassen. Nach (43) ist eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ um jeden Punkt c mit $f'(c) \neq 0$ **lokal biholomorph**, d.h. es gibt offene Mengen U_0, V_0 in $\mathbb{C}$ mit $c \in U_0 \subset U$ derart, dass $f(U_0) = V_0$ und $U_0 \to V_0$, $z \mapsto f(z)$ biholomorph ist.

(45) Wurzeln. Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := z^m$. Offenbar ist diese Funktion für $m = 1$ biholomorph und für $m = 0$ konstant und damit nirgends lokal biholomorph.

Sei nun $m \geq 2$. Da $f'(z) = mz^{m-1} \neq 0$ für $z \neq 0$, folgt nach (43), dass f lokal biholomorph ist um jeden Punkt $z \neq 0$. Zur näheren Untersuchung bestimmen wir zunächst die Urbilder zu $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unter f:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{z \in \mathbb{C} : z^m = w\}.$$

Es ist also die Gleichung $z^m = w$ zu lösen. In Polarkoordinaten ist $w = re^{i\alpha}$, $z = \rho e^{i\varphi}$ mit $r, \rho > 0$ und $\alpha, \varphi \in [0, 2\pi[$. Damit ist $z^m = \rho^m e^{im\varphi} = re^{i\alpha}$. Das bedeutet $\rho^m/r = 1$ und $e^{i(m\varphi-\alpha)} = 1$. Ersteres ergibt $\rho = r^{\frac{1}{m}}$ und letzteres ist äquivalent zu $m\varphi - \alpha = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $\varphi \in \left\{\frac{\alpha}{m} + 2\pi\frac{k}{m} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cap [0, 2\pi[= \{\varphi_k : k = 0, \dots, m-1\}$ mit $\varphi_k := \frac{\alpha}{m} + 2\pi\frac{k}{m}$.

Als Ergebnis erhalten wir genau m verschiedene **Wurzeln** $z_k := r^{\frac{1}{m}} e^{i\varphi_k}$ mit $k = 0, \dots, m-1$, die die Gleichung $z^m = w$ erfüllen. Für $w = 1$ sind dies die **m-ten Einheitswurzeln** $e^{i2\pi\frac{k}{m}}$, $k = 0, \dots, m-1$.

Der **Sektor** $U_0 := \{se^{i\psi} : s > 0, \frac{\alpha}{m} - \frac{\pi}{m} < \psi < \frac{\alpha}{m} + \frac{\pi}{m}\}$ ist eine offene Umgebung von $z_0 = r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\alpha}{m}}$. Die Sektoren $U_k := e^{i2\pi\frac{k}{m}} U_0$ für $k = 0, \dots, m-1$ sind paarweise disjunkte offene Umgebungen von z_k. Jeder dieser Sektoren wird unter f biholomorph auf die offene Umgebung $f(U_0) = \{se^{i\psi} : s > 0, \alpha - \pi < \psi < \alpha + \pi\} = e^{i\alpha}(\mathbb{C}\setminus] - \infty, 0])$ von w abgebildet.

(46) Ordnung einer Nullstelle. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$ mit $f(a) = 0$. Dann heißt

$$m := \inf\left\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(a) \neq 0\right\}$$

die Ordnung der Nullstelle a. Ist $m = \infty$, d.h. $f^{(k)}(a) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, dann heißt a eine Nullstelle unendlicher Ordnung.

(47) Beispiel. Seien $a \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (z-a)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist a eine Nullstelle n-ter Ordnung. In der Tat ist $f^{(k)}(z) = \frac{n!}{(n-k)!}(z-a)^{n-k}$ für $k = 0, \dots, n$ und daher $f^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(a) = n! \neq 0$.

(48) Satz von der Nullstelle m–ter Ordnung 1. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $U_r(a) \subset U$ und $h : U_r(a) \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$f(z) = h(z)^m \quad \forall z \in U_r(a)$$

und $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, $h(z) \neq 0\, \forall z \in U_r(a) \setminus \{a\}$.

Beweis. Man entwickle f auf einer offenen Kreisscheibe $U_0 \subset U$ von a in eine konvergente Potenzreihe. Da $f^{(k)}(a) = 0$ für $0 \leq k \leq m-1$ ist

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k(z-a)^k = c_m(z-a)^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k(z-a)^k = (z-a)^m g(z)$$

mit $g(z) := c_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k(z-a)^{k-m}$. Damit ist $g : U_0 \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(a) = c_m \neq 0$. Es geht nun darum, ein m-te Wurzel von $g(z)$ in holomorpher Weise zu ziehen.

Sei $c \in \mathbb{C}$ mit $c^m = g(a)$, d.h. c ist eine m-te Wurzel von $g(a)$, siehe (45). Es ist $c \neq 0$ und für $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) := z^m$ ist $p(c) = g(a)$ und $p'(c) = mc^{m-1} \neq 0$. Nach (43) existiert daher $\delta > 0$ mit $\delta < |c|$ derart, dass $p(U_\delta(c))$ eine offene Umgebung von $g(a)$ ist und $U_\delta(c) \to p(U_\delta(c))$, $z \mapsto p(z)$ biholomorph ist. Sei $q : p(U_\delta(c)) \to U_\delta(c)$ die lokale Inverse zu p.

Weil g stetig ist, ist $g^{-1}(p(U_\delta(c)))$ eine offene Umgebung von a. Somit existiert $r > 0$ mit $U_r(a) \subset g^{-1}(p(U_\delta(c)))$. Da $g(U_r(a)) \subset p(U_\delta(c))$ gilt hierfür $q(g(U_r(a))) \subset U_\delta(c)$. Nun setze

$$h : U_r(a) \to \mathbb{C},\ h(z) := (z-a)q(g(z)).$$

Aufgrund der obigen Überlegungen ist h eine wohldefinierte holomorphe Funktion mit $h(z)^m = (z-a)^m(q(g(z)))^m = (z-a)^m g(z) = f(z)$. Weiter gilt $h(a) = 0$ und $h'(a) = q(g(a)) = c \neq 0$. Weil schließlich $q(g(z)) \in U_\delta(c)$ für $z \in U_r(a)$ und $0 \notin U_\delta(c)$, ist $h(z) \neq 0\ \forall z \in U_r(a) \setminus \{a\}$. $\square$

(49) Isolierte Nullstelle. In (48) ist $f(z) \neq 0\ \forall z \in U_r(a) \setminus \{a\}$. Also ist jede Nullstelle endlicher Ordnung einer holomorphen Funktion isoliert, d.h. es gibt eine Umgebung der Nullstelle, in der keine weitere Nullstelle der Funktion liegt.

(50) Satz von der Nullstelle m–ter Ordnung 2. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in U$ eine Nullstelle von f der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren $U_0 \subset U$ offen mit $a \in U_0$ und $\delta > 0$ derart, dass $f(U_0) = U_\delta(0)$ ist, a einzige Nullstelle von f in U_0 ist und jedes $w \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$ genau m Urbilder unter f in U_0 hat.*

Beweis. Sei $p(z) = z^m$. Im Spezialfall $f = p$, $a = 0$ wähle man $\delta > 0$ beliebig und $U_0 := U_{\delta^{\frac{1}{m}}}(0)$, siehe (45). Im allgemeinen Fall betrachte man

$$h : U_r(a) \to \mathbb{C}$$

aus (48). Weil $h'(a) \neq 0$, läßt sich dabei $r > 0$ nach dem Satz von der lokalen Inversen (43) so klein wählen, dass $h(U_r(a))$ offen ist und von h biholomoroph auf $h(U_r(a))$ abgebildet wird. Wähle $\delta > 0$ so, dass $U_{\delta^{\frac{1}{m}}}(0) \subset h(U_r(a))$. Setze $U_0 := h^{-1}(U_{\delta^{\frac{1}{m}}}(0))$. Dann gilt für alle $z \in U_0$, dass $f(z) = h(z)^m = p(h(z))$. Da $U_0 \to U_{\delta^{\frac{1}{m}}}(0)$, $z \mapsto h(z)$ bijektiv ist, folgt die Behauptung aus dem genannten Spezialfall. $\square$

(51) Identitätssatz. *Seien f und g zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $f = g$.

(ii) $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ *hat einen Häufungspunkt in* U.

(iii) *Es gibt ein* $a \in U$ *mit* $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)\ \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Die Aussage $(i) \Rightarrow (ii)$ ist offensichtlich. — Zum Nachweis von $(ii) \Rightarrow (iii)$ sei $a \in U$ ein Häufungspunkt von $\{f = g\}$. Da $\{f = g\}$ abgeschlossen ist in U, folgt $a \in \{f = g\}$. Damit ist a eine Nullstelle der holomorphen Funktion $h := f - g$ derart, dass in jeder Umgebung von a weitere Nullstellen von h liegen. Wegen (49) hat a also keine endliche Ordnung. Damit gilt $0 = h^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)\ \forall k \in \mathbb{N}$. — Zum Nachweis von $(iii) \Rightarrow (i)$ betrachte man $A := \bigcap_{k=0}^{\infty} \{z \in U : f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z)\}$. Da jede der Mengen $\{z \in U : f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z)\}$ abgeschlossen in U ist, ist auch A abgeschlossen in U. Nach Voraussetzung ist $A \neq \emptyset$. Sei $a \in A$ beliebig. Man entwickle $h := f - g$ in eine konvergente Potenzreihe $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ auf einer offenen Kreisscheibe $U_a \subset U$ um a. Da $a \in A$, ist $h^{(k)}(a) = 0\ \forall k$, und somit $h|U_a = 0$, weshalb $U_a \subset A$. Es folgt, dass A offen ist. Weil U zusammenhängend ist, bleibt nur $A = U$. $\square$

(52) Bemerkung. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.* Aus dem Identitätssatz (51) folgen sofort die folgenden Aussagen.

(a) *Eine holomorphe Funktion* f *auf* U *ist bereits durch ihre Werte* $f(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *eindeutig bestimmt, wenn* $z_n \to z \in U$ *mit* $z_n \neq z$ *für unendliche viele* n.

(b) *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall mit* $I \subset U$. *Dann existiert zu* $g : I \to \mathbb{C}$ *höchstens eine holomorphe Fortsetzung* $f : U \to \mathbb{C}$ *von* g, *das ist eine holomorphe Funktion* f *auf* U *mit* $f|I = g$.

(c) *Ist* f *eine holomorphe Funktion auf* U *mit einer Nullstelle unendlicher Ordnung, dann ist* $f = 0$.

(53) Offene Abbildung. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f **offen**, wenn $f(U)$ offen ist für jede offene Menge $U \subset X$.

(54) Satz von der offenen Abbildung. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$ *eine nicht konstante holomorphe Funktion. Dann ist* f *offen. Ist* U *ein Gebiet, dann ist* $f(U)$ *ein Gebiet.*

Beweis. Wegen (40) sei o.E. U zusammenhängend. Seien $W \subset U$ offen und $c \in f(W)$ beliebig. Es existiert $a \in W$ mit $f(a) = c$. Setze $g : U \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z) - c$. Die Nullstelle a von g hat endliche Ordnung, da sonst $g = 0$ nach (52)(c) und f somit konstant. Man wende (50) auf $g|W$ an. Danach existiert $U_0 \subset W$ mit $g(U_0) = U_\delta(0)$ für ein $\delta > 0$. Also ist $U_\delta(0) \subset g(W)$. Hieraus folgt $c \in c + U_\delta(0) \subset c + g(W) = f(W)$. Damit ist $f(W)$ eine Umgebung von c. Da $c \in f(W)$ beliebig ist, ist $f(W)$ offen. — Schließlich ist $f(U)$ nach (37) zusammenhängend, weil U zusammenhängend und f stetig ist. □

Kurze Wiederholung

- Die **Ordnung einer Nullstelle** einer holomorphen Funktion f: Sind $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0$ und $f^{(m)}(a) \neq 0$, dann ist a eine Nullstelle m-ter Ordnung von f.
- Ist a eine Nullstelle m-ter Ordnung der holomorphen Funktion f, dann existiert eine holomorphe Funktion h in einer Umgebung von a derart, dass $f(z) = h(z)^m$ und a eine isolierte Nullstelle erster Ordnung von h ist.
- Zum **Identitätssatz**: Sind f, g auf dem Gebiet U holomorphe Funktionen und ist (z_n) eine gegen $z \in U$ konvergente Folge mit $z_n \neq z$, wofür $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n$, dann ist $f = g$.
- Nichtkonstante holomorphe Funktionen f sind offen, d.h. sie bilden offene Mengen auf offene Mengen ab.

---

(55) Das Maximumprinzip. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph und* $a \in U$ *mit* $|f(a)| = \sup_{z \in U} |f(z)|$. *Dann ist f konstant.*

Beweis. Sei f nicht konstant. Nach (54) ist $f(U)$ offen. Daher existiert zu $a \in U$ ein $r > 0$ mit $U_r(f(a)) \subset f(U)$. Damit ist $|f(a)|$ nicht maximal. □

(56) Korollar. *Seien* $\mathsf{U} \subset \mathbb{C}$ *ein beschränktes Gebiet und* $\mathsf{f} : \overline{\mathsf{U}} \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig derart, dass* $\mathsf{f}|\mathsf{U}$ *holomorph ist. Dann ist* $\sup_{z\in \mathsf{U}} |\mathsf{f}(z)| = \max_{z\in\partial \mathsf{U}} |\mathsf{f}(z)| = |\mathsf{f}(\mathsf{a})|$ *für ein* $\mathsf{a} \in \partial\mathsf{U}$.

Beweis. Da $\overline{\mathsf{U}}$ kompakt und f stetig ist, existiert nach dem Satz vom Maximum und Minimum ein $\mathsf{a} \in \overline{\mathsf{U}}$ mit $|\mathsf{f}(\mathsf{a})| = \max_{z\in\overline{\mathsf{U}}} |\mathsf{f}(z)|$. Ist $\mathsf{a} \in \mathsf{U}$, dann ist $\mathsf{f}|\mathsf{U}$ konstant nach (55). Da f stetig ist, ist damit f konstant. Das ergibt die Behauptung. $\square$

24 Laurentreihen, Residuensatz

Ist $V \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in \mathbb{C}$, dann ist $V \setminus \{a\}$ offen, weil $\{a\}$ abgeschlossen ist.

(1) Isolierte Singularität. Seien $V \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in V$ und $f : V\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann nennt man a eine isolierte Singularität von f.

(2) Hebbare Singularität. *Sei a eine isolierte Singularität von f. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist holomorph auf* V *fortsetzbar.*

(ii) f *ist stetig auf* V *fortsetzbar.*

(iii) *Es existiert* $r > 0$ *mit* $U_r(a) \subset V$ *derart, dass* $f|(U_r(a)\setminus\{a\})$ *beschränkt ist.*

(iv) *Es gilt* $\lim_{z\to a, z\neq a}(z-a)f(z) = 0$.

Falls (i) vorliegt, heißt a eine hebbare Singularität.

Beweis. Die Inklusionen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) sind klar. Es bleibt (iv) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen. Dazu definiere man $g, h : V \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := (z-a)f(z) \text{ für } z \neq a,\ g(a) := 0 \text{ und } h(z) := (z-a)g(z).$$

Offenbar ist $h(a) = 0$. Wegen (iv) ist g stetig in a und damit $\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = g(z) \overset{z\to a, z\neq a}{\to} 0$. Also ist h auch in a differenzierbar mit $h'(a) = 0$. Somit ist h holomorph. Man entwickle h auf einer offenen Kreisscheibe um a in eine konvergente Potenzreihe $h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k(z-a)^k = (z-a)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(z-a)^k$. Weil $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ für $z \neq a$ folgt $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(z-a)^k$ für $z \neq a$. Also ergibt $\widehat{f}(a) := c_2$ die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf V. □

(3) Pol, Wesentliche Singularität. Sei a eine nicht hebbare isolierte Singularität von f. Dann heißt a ein Pol von f, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass a eine hebbare Singularität von $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ ist. Das kleinste m mit dieser Eigenschaft heißt die **Ordnung des Pols**. Ansonsten heißt a eine wesentliche Singularität von f.

(4) Beispiele.

(a) Offenbar hat $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$ für $n \in \mathbb{N}$ in a einen Pol n-ter Ordnung.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man $g(z) := z^n e^{\frac{1}{z}}$, $z \neq 0$. Dann ist $g(\frac{1}{m}) = \left(\frac{1}{m}\right)^n e^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Also ist g nicht beschränkt in einer Umgebung von 0. □

(5) Eine nicht isolierte Singularität. Als Beispiel betrachten wir für $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine m-te Wurzelfunktion g definiert auf $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ durch $g(r\, e^{i\varphi}) := r^{\frac{1}{m}} e^{i\varphi/m}$ für $r > 0$ und $\varphi \in]-\pi, \pi[$. Die Funktion g ist die Umkehrfunktion der biholomorphen Funktion $f : \{r\, e^{i\varphi} : r > 0,\ \varphi \in]-\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{m}[\ \} \to \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, $f(z) := z^m$, die in (23.45) diskutiert ist, denn es ist $g(f(z)) = z\ \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$. Insbesondere ist g holomorph. Doch wird unten gezeigt, dass es keine auf $U_\rho(0) \setminus \{0\}$ für ein $\rho > 0$ definierte holomorphe Funktion h gibt, die $h(z^m) = z$ für $0 < |z| < \rho^{\frac{1}{m}}$ erfüllt. Deshalb ist 0 eine **nicht isolierte** Singularität der Wurzelfunktion.

Angenommen es gibt eine solche Funktion h. Dann ergibt der Ausdruck $h(f(g(z)))$ für $z \in U_\rho(0) \setminus [-\rho, 0]$ einerseits $h(z)$, denn $f(g(z)) = z$. Andererseits ist $h(f(g(z))) = h(g(z)^m) = g(z)$. Also stimmen h und g auf $U_\rho(0)\setminus[-\rho, 0]$ überein. Dies ist aber nicht möglich, denn für $0 < r < \rho$ ist $-r = \lim_{\varphi\to\pi} re^{i\varphi} = \lim_{\varphi\to-\pi} re^{i\varphi}$ und somit $h(-r) = \lim_{\varphi\to\pm\pi} g(re^{i\varphi}) = r^{\frac{1}{m}}\, e^{\pm i\pi/m}$.

Es folgt eine eingehende Untersuchung der isolierten Singularitäten.

(6) Kreisring. *Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 < r_1 < r_2$ nennt man*

$$S := \{z \in \mathbb{C} : r_1 \le |z - a| \le r_2\}$$

den Kreisring um a mit Radien r_1 und r_2. Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $S \subset U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. (Der interessante Fall ist $a \notin U$.) Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

wobei γ_i für $i = 1, 2$ die im positiven Sinn durchlaufene Kreisline um a mit Radius r_i bezeichnet.

Beweis. Man teile den Kreisring durch endlich viele radiale Strecken in Teilstücke auf, die jeweils in einer offenen, sternförmigen Teilmenge von U liegen. Die Kurvenintegrale längs des Randes eines jeden Teilstücks sind null nach dem Cauchy Integralsatz (23.20). Die Beiträge längs radialer Strecken heben sich auf. Es folgt $\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\widehat{\gamma_2}} f(z)dz = 0$ wobei γ_1 und $\widehat{\gamma_2}$ antiparallel durchlaufen werden. □

(7) Die Laurentreihenentwicklung. *Seien $V \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in V$, $r > 0$ mit $U_r(a) \subset V$ und $f : V\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei*

$$c_k := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

wobei $0 < \rho < r$ beliebig ist und γ_ρ die positiv durchlaufene Kreislinie um a mit Radius ρ bezeichnet. Dann konvergieren die beiden folgenden Reihen für jedes $z \in U_r(a) \setminus \{a\}$ und es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z - a)^{-k}. \qquad (\star)$$

Beweis. Wegen (6) (angewandt auf $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}$) ist c_k von $\rho \in]0, r[$ unabhängig. Sei $z \in U_r(a) \setminus \{a\}$ fest. Dann ist $g : U_r(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ für $\zeta \neq z$ und $g(z) := f'(z)$ nach (2)(ii) holomorph mit einer isolierten Singularität in a. Nach (6) ist $\int_{\gamma_1} g(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_2} g(\zeta)d\zeta$ für $0 < r_1 < |z-a| < r_2 < r$. Das bedeutet

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Nach dem Cauchy Integralsatz (23.20) ist das zweite Integral null und nach der Cauchy Integralformel (23.22) ist das letzte Integral gleich $2\pi i$. Es folgt daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Für ζ auf γ_2 gilt $|z-a| < r_2 = |\zeta - a|$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe folgt $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k$ und damit wie im Beweis zu (23.24)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}d\zeta\right](z-a)^k.$$

Entsprechend gilt für ζ auf γ_1, dass $|z-a| > r_1 = |\zeta - a|$. Daraus folgt analog $\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k$ und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-k}}d\zeta\right](z-a)^{-k-1}.$$

Insgesamt erhält man so die Formel $(\star)$. □

(8) Haupt– und Nebenteil. Die beiden Summen in $(\star)$ der Laurentreihenentwicklung (7)

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}}_{\text{Hauptteil}}$$

bezeichnet man als Nebenteil und Hauptteil der Laurentreihe von f in a.

(9) Lemma. *Seien $a \in \mathbb{C}$, $c_{-k} \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ derart, dass die Laurentreihe*

$$h(z) := \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$$

für jedes $z \in U_r(a) \setminus \{a\}$ konvergiert. Dann konvergiert die Laurentreihe für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ und definiert eine auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion h. Sei $\rho > 0$. Dann konvergiert die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(z-a)^{-k}$$

gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \rho\}$ gegen h. Schließlich gilt $h(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$.

Beweis. Offenbar gilt: $z \in U_r(a)\backslash\{a\} \Leftrightarrow \frac{1}{r} < \frac{1}{|z-a|} < \infty$. Nach Voraussetzung konvergiert daher die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\zeta^k$ auf $\left\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > \frac{1}{r}\right\}$. Als solche konvergiert sie deshalb auf ganz $\mathbb{C}$, und die Folge ihrer Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} c_{-k}\zeta^k$ konvergiert gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\left\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \frac{1}{\rho}\right\}$. Hieraus folgt der Rest der Behauptung. □

(10) Eindeutigkeit der Laurentreihe. *Seien* $V \subset \mathbb{C}$ *offen,* $a \in V$, $r > 0$ *mit* $U_r(a) \subset V$ *und* $f : V\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph. Seien* $g : U_r(a) \to \mathbb{C}$ *und* $h : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph derart, dass*

- $f = g + h$ *auf* $U_r(a)\backslash\{a\}$ *und*
- $h(z) \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dann sind $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *und* $h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$*, wobei die Koeffizienten* c_k, $k \in \mathbb{Z}$*, durch die Formel in* (7) *gegeben sind.*

Beweis. Seien $f = g + h = \widehat{g} + \widehat{h}$ zwei solche Darstellungen. Dann ist $k := g - \widehat{g} = \widehat{h} - h$, wobei $g - \widehat{g}$ holomorph auf $U_r(a)$ und $\widehat{h} - h$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ist. Damit ist k ganz und erfüllt $k(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$. Aus letzterem folgt, dass k beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist daher k konstant, weshalb nur $k = 0$ bleibt. Also gilt $\widehat{h} = h$, $\widehat{g} = g$.

Die Potenzreihenentwicklung ist eindeutig. Aber auch die Entwicklung in eine Reihe mit negativen Potenzen ist eindeutig, denn $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(z-a)^{-k}$ $\forall z \neq a$ ist eine Potenzreihe in der Variablen $\zeta := \frac{1}{z-a}$ mit positivem Konvergenzradius.

Nach (7) und (9) erfüllen der Nebenteil g und der Hauptteil h der Laurentreihe von f die Voraussetzungen. Damit folgt die Behauptung. □

(11) Korollar. *Seien* $V \subset \mathbb{C}$ *offen,* $a \in V$, $r > 0$ *mit* $U_r(a) \subset V$ *und* $f : V\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph. Für die Laurentreihe von* f *in der Singularität* a *gilt:*

- a *ist hebbar* $\Leftrightarrow$ *der Hauptteil ist* 0, *d.h.* $c_{-k} = 0\ \forall k \geq 1$.
- a *ist Pol* m*-ter Ordnung* $\Leftrightarrow c_{-m} \neq 0$, $c_{-k} = 0\ \forall k > m$.
- a *ist wesentlich* $\Leftrightarrow$ *es existieren unendlich viele* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $c_{-k} \neq 0$.

Beweis. Betrachte $g(z) = (z-a)^m f(z)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Hat g eine hebbare Singularität in a, dann ist g holomorph fortsetzbar auf $U_r(a)$. Nach (10) folgt, dass der Hauptteil von g gleich null ist. □

(12) Gleichmäßige Konvergenz der Laurentreihe. *Seien* $V \subset \mathbb{C}$ *offen,* $a \in V$, $r > 0$ *mit* $U_r(a) \subset V$ *und* $f : V\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann konvergieren die Partialsummen*

$$s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(z-a)^{-k}$$

der Laurentreihe (8) *von* f *in* a *gleichmäßig auf jedem Kreisring* $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ *mit* $0 < r_1 < r_2 < r$.

Beweis. Für den Hauptteil siehe (9). Der Nebenteil ist eine Potenzreihe. □

(13) Windungszahl. Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve und $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]$. Dann heißt

$$\nu(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

die Windungszahl von γ um z.

(14) Bemerkung.

(a) Sei γ eine einmal positiv durchlaufene Kreislinie. Dann ist $\nu(\gamma, z)$ gleich 0 falls z außerhalb des Kreises liegt und 1 falls z innerhalb liegt. Dies folgt sofort aus dem Cauchy Integralsatz (23.20) und der Cauchy Integralformel (23.22).

(b) Gleiches gilt z.B. für den Rechtecksweg γ_R: Denn liegt z im Inneren des Rechtecks, dann zeigt man in gewohnter Weise (siehe etwa den Beweis zu (23.22)), dass das Kurvenintegral längs des Rechteckswegs gleich dem Kurvenintegral längs einer im gleichen Sinn durchlaufenen Kreislinie im Inneren des Rechtecks mit z als Mittelpunkt ist. Also ist $\nu(\gamma_R, z) = 1$.

Das Gleiche gilt auch für den Halbkreisweg: Der Beweis erfolgt z.B. durch Ergänzung des Halbkreises zum Kreis.

(c) Seien γ_1, γ_2 zwei geschlossene Wege mit demselben Anfangspunkt und sei γ die Verkettung von γ_1 mit γ_2 (bei der γ_1 und γ_2 nacheinander durchlaufen werden). Dann gilt $\nu(\gamma, z) = \nu(\gamma_1, z) + \nu(\gamma_2, z)$.

(15) Satz zur Windungszahl. *Seien* $\gamma[a, b] \to \mathbb{C}$ *eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve und* $U := \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. *Dann ist*

(a) $\nu(\gamma, z) \in \mathbb{Z} \ \ \forall z \in U$,

(b) $\nu(\gamma, \cdot)$ *auf Wegkomponenten von* U *konstant, und*

(c) $\nu(\gamma, z) = 0 \ \ \forall z \in U$ *mit* $|z| > \|\gamma\|_s$.

Beweis. (a) Sei $z \in U$. Dann ist $\inf_{s \in [a,b]} |\gamma(s) - z| > 0$, weil $\gamma([a, b])$ kompakt ist und $z \neq \gamma([a, b])$. Damit ist

$$F(t) := (\gamma(t) - z)e^{-f(t)} \quad \text{mit} \quad f(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds$$

wohldefiniert. Die Funktion F ist offenbar stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $F'(t) = \gamma'(t)e^{-f(t)} + (\gamma(t) - z)e^{-f(t)} \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = 0$ in allen Punkten $t \in [a, b]$, wo γ differenzierbar ist. Daraus folgt, dass F konstant ist. Da F ungleich null ist, schließen wir daraus, dass

$$1 = \frac{F(b)}{F(a)} = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} e^{-f(b) + f(a)} = \exp\left(-\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right) = \exp\left(-\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta\right).$$

Also existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $-\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i k$.

(b) Zunächst ist U offen, da $\gamma([a,b])$ kompakt und damit abgeschlossen ist. Weiter ist offenbar $\nu : U \to \mathbb{R}$, $\nu(z) := \nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds$ stetig. Sei nun W eine Wegkomponente von U. Nach (23.37) ist $\nu(W)$ zusammenhängend. Da $\nu(U) \subset \mathbb{Z}$ nach (a) ist damit $\nu(W)$ einpunktig.

(c) Sei $|z| > \|\gamma\|_s$. Es folgt $|\gamma(t) - z| \geq |z| - |\gamma(t)| \geq |z| - \|\gamma\|_s > 0$. Damit schätzt man wie üblich ab: $|\nu(\gamma, z)| \leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\gamma(t)-z|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z|-\|\gamma\|_s} \to 0$ für $|z| \to \infty$. Wegen (a) folgt daraus, dass $\nu(\gamma, z) = 0$, wenn $|z|$ hinreichend groß ist. Weiter ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \|\gamma\|_s\} \subset U$ wegzusammenhängend. Damit folgt (c) aus (b). □

(16) Hauptsatz zum Kurvenintegral. *Seien* $V \subset \mathbb{C}$ *offen,* $a \in V$, $r > 0$ *mit* $U_r(a) \subset V$ *und* $f : V\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph. Weiter sei* γ_ρ *die positiv durchlaufene Kreislinie um* a *mit einem Radius* $\rho \in]0, r[$ *und* γ *eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve mit Spur in* $U_r(a)\backslash\{a\}$. *Dann gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \nu(\gamma, a) \int_{\gamma_\rho} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Beweis. Da die Spur von γ kompakt ist, liegt diese in einem in $U_r(a)\backslash\{a\}$ enthaltenen Kreisring um a. Wegen (12) darf nach (9.14) die Laurentreihe (8) gliedweise integriert werden. Für $l \in \mathbb{Z}, l \neq -1$ hat $g_l(z) := (z - a)^l$ die Stammfunktion $G_l(z) = \frac{1}{l+1}(z - a)^{l+1}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Daher ist $\int_\gamma (\zeta - a)^l d\zeta = 0\ \forall l \neq -1$ nach (23.16). Für $l = -1$ gilt $\int_\gamma (\zeta - a)^{-1} d\zeta = 2\pi i\, \nu(\gamma, a)$ nach (13). Damit folgt die Behauptung. □

(17) Residuum. Seien $V \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in V$, $r > 0$ mit $U_r(a) \subset V$ und $f : V\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei γ_ρ die positiv durchlaufene Kreislinie um a mit einem Radius $\rho \in]0, r[$. Das Residuum von f in a ist definitionsgemäß

$$\mathrm{Res}(f, a) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta)\, d\zeta,$$

das ist der erste Koeffizient des Hauptteils der Laurentreihe f in a.

(18) Bemerkungen. Aus der Definition des Residuums erkennt man wegen (16) leicht, dass

- $\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$ für eine positiv einfach durchlaufene Kreislinie γ in V mit a in derem Inneren,
- $\mathrm{Res}(f, a) = 0$, falls a eine hebbare Singularität ist,
- $\mathrm{Res}(f + \alpha g, a) = \mathrm{Res}(f, a) + \alpha\, \mathrm{Res}(g, a)$ für in $V \setminus \{a\}$ holomorphe Funktionen f und g.

Sind $V \subset \mathbb{C}$ offen und $E \subset \mathbb{C}$ endlich, dann ist $V \setminus E$ offen, weil E abgeschlossen ist.

(19) Residuensatz. *Seien* $V \subset \mathbb{C}$ *offen und sternförmig,* $E \subset V$ *eine endliche Menge,* $f : V\backslash E \to \mathbb{C}$ *holomorph und* γ *eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur in* $V \setminus E$. *Dann gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{a\in E} \mathrm{Res}(f,a)\,\nu(\gamma,a).$$

Beweis. Für $a \in E$ sei $f_a(z) := \frac{\mathrm{Res}(f,a)}{z-a} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{-k}^{a}(z-a)^{-k}$ der Hauptteil der Laurentreihe von f in a. Nach (9) ist $f_a : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Damit ist $g : V\backslash E \to \mathbb{C}$, $g(z) := f(z) - \sum_{a\in E} f_a(z)$ holomorph. Der Hauptteil der Laurentreihe von g in $a \in E$ ist null, was klar ist nach der Definition von f_a. Also ist a eine hebbare Singularität von g. Dies gilt für jedes $a \in E$. Nach dem Cauchy Integralsatz (23.20) folgt

$$0 = \int_\gamma g(\zeta)d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)d\zeta - \sum_{a\in E}\int_\gamma f_a(\zeta)d\zeta,$$

weil γ eine geschlossene Kurve in dem sternförmigen Gebiet V ist und g holomorph auf V fortsetzbar ist. Schließlich ist $\int_\gamma f_a(\zeta)d\zeta = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,a)\,\nu(\gamma,a)$ nach (16). □

Es folgen zwei Aussagen zur Bestimmung des Residuums in einfachen Situationen.

(20) Residuums eines einfachen Pols. *Sei* $f : U_r(a)\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph mit einem einfachen Pol, d.h. Pol erster Ordnung, in* a. *Dann ist* $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$, wobei h holomorph auf $U_r(a)$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

(21) Korollar. *Seien* $g, h : U_r(a) \to \mathbb{C}$ *holomorph mit* $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. *Dann ist für ein hinreichend kleines* $r' \in]0,r]$ *die Funktion* $f := \frac{g}{h} : U_{r'}(a)\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ *holomorph mit* $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$. *Dabei ist* a *ein einfacher Pol im Fall* $g(a) \neq 0$ *und eine hebbare Singularität, wenn* $g(a) = 0$.

Beweis. Zur Existenz von r' beachte (23.49) für h. Da $\frac{h(z)}{z-a} = \frac{h(z)-h(a)}{z-a} \xrightarrow{z\to a} h'(a)$, folgt $(z-a)f(z) = \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-a}} \xrightarrow{z\to a} \frac{g(a)}{h'(a)}$. Also ist a eine hebbare Singularität von f, wenn $g(a) = 0$. Anderenfalls ist a eine hebbare Singularität von $z \mapsto (z-a)f(z)$ und somit ein einfacher Pol von f. Der Rest der Behauptung gilt nach (20). □

(22) Beispiele. (a) Sei $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$. Weil $f(z) = \frac{1}{z+i}\frac{1}{z-i}$, hat f in $-i$ und i jeweils einen einfachen Pol und es folgt $(z-(-i))f(z) = \frac{1}{z-i} \to \frac{1}{-2i}$ für $z \to -i$, $(z-i)f(z) = \frac{1}{z+i} \to \frac{1}{2i}$ für $z \to i$. Daher gilt nach (20), dass $\mathrm{Res}(f, \pm i) = \pm\frac{1}{2i}$.

(b) Die ganze Funktion $z \mapsto \sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ hat ihre Nullstellen bei $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Sei

$$f(z) := \frac{z}{\sin(z)} \quad \text{für } z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Es ist $\sin'(z) = \cos(z)$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$. Nach (21) hat daher f eine hebbare Singularität bei $z = 0$ und einfache Pole bei $z = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und es ist $\operatorname{Res}(f, k\pi) = \frac{k\pi}{(-1)^k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Der Residuensatz kann verwendet werden, um uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{0} f(x)dx + \lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B} f(x)dx$$

zu berechnen.

(23) Satz. *Seien* $E \subset \mathbb{C}$ *endlich mit* $E \cap \mathbb{R} = \emptyset$, $\delta > 0$ *und* $f : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > -\delta\}\backslash E \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph mit* $\lim_{|z|\to\infty,\, \mathrm{Im}(z)\geq 0} |zf(z)| = 0$. *Dann ist*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a\in E,\ \mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}(f, a),$$

was gleich dem Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *ist, falls es existiert.*

Beweis. Sei Q_R die offene Halbscheibe $\{z : |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Dabei sei der Radius R so groß, dass $\{a \in E : \mathrm{Im}(a) > 0\} \subset Q_R$. Weiter sei γ_R die positiv durchlaufene geschlossene Kurve, die aus den Teilkurven $t \mapsto t$ für $t \in [-R, R]$ und $t \mapsto R\,e^{it}$ für $t \in [0, \pi]$ besteht. Für die Windungszahl gilt gemäß (14)(b) $\nu(\gamma_R, a) = 1\ \ \forall a \in Q_R$. Der Residuensatz ergibt daher

$$\int_{\gamma_R} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{a\in E, \mathrm{Im}\, a>0} \mathrm{Res}(f, a).$$

Die Auswertung liefert $\int_{\gamma_R} f(\zeta)d\zeta = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_0^\pi f(Re^{it})Rie^{it}dt$. Nun gilt $\left|\int_0^\pi f(Re^{it})Rie^{it}dt\right| \leq \pi R \sup_{t\in[0,\pi]} \left|f(Re^{it})\right| \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach Voraussetzung. Damit folgt die Behauptung. □

(24) Beispiel Rationale Funktionen. *Seien* p, q *Polynome in* $\mathbb{C}$ *mit grad*$(q) \geq 2 + \mathrm{grad}(p)$, *wobei* q *keine reelle Nullstelle hat. Dann existiert und ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a)>0,\, q(a)=0} \mathrm{Res}(\frac{p}{q}, a).$$

Dies ist eine direkte Anwendung von (23), denn die Voraussetzungen dafür gelten offensichtlich. Es folgen zwei konkrete Beispiele dazu.

- Für $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ gilt bekanntlich $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$. Alternativ liefert der Residuensatz mit (22)(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = 2\pi i\ \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$
- Sei $f(x) := \frac{x^2}{1+x^4}$. Zur Bestimmung der Polstellen faktorisieren wir den Nenner $1 + x^4 = \prod_{\zeta^4=-1}(x - \zeta)$ mit $\zeta = e^{2\pi i \frac{k}{8}}$ für $k = 1, 3, 5, 7$. Explizit ist $\zeta_1 := e^{2\pi i \frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$. Daraus folgen $\zeta_2 := e^{2\pi i \frac{3}{8}} = i\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$, $\zeta_3 := e^{2\pi i \frac{5}{8}} = -\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i)$, und

$\zeta_4 := e^{2\pi i \frac{7}{8}} = -i\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Die Polstellen in der oberen Halbebene sind ζ_1, ζ_2. Die Residuen hierfür berechnet man mit (21): $\mathrm{Res}(f, \zeta_1) = \frac{\zeta_1^2}{4\zeta_1^3} = \frac{1}{4}\frac{1}{\zeta_1} = \frac{1}{4}\bar{\zeta}_1 = \frac{1}{4}\zeta_4$ und $\mathrm{Res}(f, \zeta_2) = \frac{1}{4}\zeta_3$. Somit ist $2\pi i(\mathrm{Res}(f, \zeta_1) + \mathrm{Res}(f, \zeta_2)) = 2\pi i\frac{1}{4}(\zeta_4 + \zeta_3) = 2\pi i\frac{1}{4}\frac{-2i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Daraus folgt das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(25) Beispiel Fouriertransformierte. *Seien* $E \subset \mathbb{C}$ *endlich mit* $E \cap \mathbb{R} = \emptyset$ *und* $g : \mathbb{C}\backslash E \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph mit* $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$. *Für* $y \in \mathbb{R}$ *setze* $f_y(z) := g(z)e^{-izy}$. *Dann existiert und ist*

$$\widehat{g}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx = \begin{cases} -\sqrt{2\pi}\, i \sum_{a\in E, \mathrm{Im}(a)<0} \mathrm{Res}(f_y, a) & \text{für } y > 0 \\ +\sqrt{2\pi}\, i \sum_{a\in E, \mathrm{Im}(a)>0} \mathrm{Res}(f_y, a) & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

Man nennt $\widehat{g}(y)$ die Fouriertransformierte von g an der Stelle y.

Beweis. Sei $y > 0$. Seien $A, B > 0$ so groß , dass das offene Quadrat Q_{AB} mit Ecken $B, -A, -A - i(A+B), B - i(A+B)$ die Menge $\{a \in E : \mathrm{Im}(a) < 0\}$ enthält. Weiter bezeichne γ_{AB} die Kurve, die den Rand von Q_{AB} positiv durchläuft. Der Residuensatz besagt dann

$$\int_{\gamma_{AB}} f_y(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{a\in E,\ \mathrm{Im}(a)<0} \mathrm{Res}(f_y, a).$$

Das Kurvenintegral ergibt sich als die Summe von vier Integralen längs der Seiten des Quadrats

$$\int_{\gamma_{AB}} f_y(\zeta)d\zeta = \int_B^{-A} f_y(x)dx + \underbrace{\int_{-A}^{-A-i(A+B)} f_y(\zeta)d\zeta + \int_{-A-i(A+B)}^{B-i(A+B)} f_y(\zeta)d\zeta + \int_{B-i(A+B)}^{B} f_y(\zeta)d\zeta}_{\text{Es bleibt nachzuweisen, dass jedes dieser Integrale für } A,B\longrightarrow\infty \text{ verschwindet.}}.$$

Wir schätzen ab:

$$\left|\int_{-A}^{-A-i(A+B)} f_y(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_0^{A+B} f_y(-A-it)(-i)dt\right| \le \int_0^{A+B} |g(-A-it)|\, e^{-ty}dt,$$

weil $e^{-i(-A-it)y} = e^{iAy}e^{-ty}$. Damit folgt weiter

$$\int_0^{A+B} |g(-A-it)|\, e^{-ty}dt \le \sup_{t\in[0,A+B]} |g(-A-it)| \frac{1-e^{-(A+B)y}}{y} \le \frac{1}{y} \sup_{t\in[0,A+B]} |g(-A-it)| \overset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

nach Voraussetzung. (In der Tat existiert zu $\epsilon > 0$ ein $R > 0$ derart, dass $|g(z)| < \epsilon\ \forall\ |z| > R$. Damit folgt für $A \ge R$, dass $|g(-A-it)| < \epsilon\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.) Ebenso schätzt man $\int_{B-i(A+B)}^{B} f_y(\zeta)d\zeta$ ab. Es bleibt das mittlere Integral abzuschätzen:

$$\left|\int_{-A-i(A+B)}^{B-i(A+B)} f_y(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_{-A}^{B} f_y(t-i(A+B))dt\right| \le \int_{-A}^{B} |g(t-i(A+B))|e^{-(A+B)y}dt,$$

weil $e^{-i(t-i(A+B))y} = e^{-ity}e^{-(A+B)y}$. Damit folgt weiter

$$\int_{-A}^{B} |g(t-i(A+B))|e^{-(A+B)y}dt \le e^{-(A+B)y}(A+B) \sup_{t\in[-A,B]} |g(t-i(A+B))| \overset{A,B\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

weil $e^{-s}s \to 0$ für $s \to \infty$ und der zweite Faktor wie oben nach Vorraussetzung verschwindet.

Der Fall $y < 0$ folgt analog, indem man den Integrationsweg in der oberen Halbebene schließt. $\square$

(26) Cauchy Dichte. Die Funktion $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{i, -i\}$ und erfüllt $g(z) \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ihre Fouriertransformierte $\widehat{g}$ kann daher nach (25) berechnet werden. Zu $y \in \mathbb{R}$ ist $f_y(z) = \frac{e^{-izy}}{1+z^2}$. Gemäß (21) findet man $\mathrm{Res}(f_y, -i) = \frac{e^{-i(-i)y}}{-2i} = -\frac{e^{-y}}{2i}$ und $\mathrm{Res}(f_y, i) = \frac{e^{-iiy}}{2i} = \frac{e^{y}}{2i}$. Damit folgt nach (21)

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-ixy} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|}$$

für $y \neq 0$. Diese Formel gilt auch für $y = 0$, denn nach (24) ist $\widehat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\pi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Für die Cauchy Dichte $c_1(x) := \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} c_1(x)dx = 1\right)$ ist also

$$\widehat{c}_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|y|}.$$

(27) Gauß Dichte. Die Funktion $g(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ ist ganz und verschwindet daher nach Liouville nicht für $|z| \to \infty$. Zur Berechnung der Fouriertransformierten $\widehat{g}$ läßt sich (25) nicht anwenden. Der Cauchy Integralsatz erlaubt dennoch die Bestimmung von $\widehat{g}$ bis auf einen konstanten Faktor. Dieser ist der Wert des Gauß Integrals. Zunächst formen wir um

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2 - \frac{y^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx.$$

Wir zeigen jetzt, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Seien $y > 0$ und $A > 0$. Mit γ bezeichnen wir den Rechtecksweg von $-A$ über A nach $A + iy$ und $-A + iy$ zurück nach $-A$. Der Cauchy Integralsatz ergibt

$$0 = \int_{\gamma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + \int_{A}^{A+iy} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{A+iy}^{-A+iy} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{-A+iy}^{-A} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Nun gilt

$$\left| \int_{A}^{A+iy} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = \left| \int_{0}^{y} e^{-\frac{1}{2}(A+it)^2} i dt \right| \leq e^{-\frac{1}{2}A^2} \int_{0}^{y} e^{\frac{1}{2}t^2} dt \overset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ebenso verschwindet $\int_{-A+iy}^{-A} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ für $A \to \infty$. Weil $\int_{A+iy}^{-A+iy} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = -\int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(t+iy)^2} dt$ folgt schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx.$$

Diese Gleichheit gilt auch für $y = 0$. Ganz analog zeigt man sie für $y < 0$. Damit gilt sie für alle $y \in \mathbb{R}$. Für das **Gauß Integral** gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Mit mehr Integrationstheorie werden wir es später leicht berechnen können. Geht man damit in die obige Formel für $\widehat{g}$ ein, folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixy} dx = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Für die Gauß Dichte $g_{0,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} g_{0,1}(x)dx = 1\right)$ gilt also $\widehat{g}_{0,1} = g_{0,1}$.

(28) Rationale Funktionen in Sinus und Cosinus. Sei $R(x, y)$ ein rationaler Ausdruck in zwei Variablen. Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich Integrale der Form

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t))dt$$

berechnen, wenn $R(x, y)$ keine Pole auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ hat. Setze $z = e^{it}$. Dann folgt $I = \int_\gamma R\left(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right) \frac{1}{iz} dz$ und somit nach dem Residuensatz

$$I = 2\pi \sum_{a \text{ Pol mit } |a|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right), a\right).$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Man zeige mit (28), dass $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{b+\sin(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}}$.

(29) Meromorphe Funktionen. Sei $U \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion f heißt **meromorph** auf U, wenn eine Teilmenge $P_f \subset U$ existiert derart, dass $U \backslash P_f$ offen ist, $f : U \backslash P_f \to \mathbb{C}$ holomorph ist und jedes $a \in P_f$ ein Pol von f ist.

In (29) besteht P_f aus isolierten Punkten und U ist offen, denn zu jedem $a \in P_f$ existiert eine offene Menge U_a mit $a \in U_a \subset (U \setminus P_f) \cup \{a\}$ (weil a ein Pol ist) und deshalb $U = (U \setminus P_f) \cup \bigcup_{a \in P_f} U_a$.

(30) Bemerkung. Die meromorphen Funktionen auf einem Gebiet U bilden einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation. Dazu ist zu zeigen, dass für jede meromorphe Funktion $f \neq 0$ auf U auch $\frac{1}{f}$ meromorph auf U ist.

Wir zitieren abschließend noch den folgenden Satz.

(31) Satz. *Seien* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und sternförmig und* $f \neq 0$ *meromorph auf* U*. Bezeichne* $P \subset U$ *die Menge der Pole und* $N \subset U$ *Menge der Nullstellen von* f*. Sei weiter* γ *eine geschlossene Kurve in* U *derart, dass* $\operatorname{Spur}(\gamma) \cap (P \cup N) = \emptyset$ *und* $\nu(\gamma, a) = 1 \ \forall\ a \in P \cup N$*. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in N} \operatorname{ord}(a) - \sum_{a \in P} \operatorname{ord}(a),$$

wobei $\operatorname{ord}(a)$ *die Ordnung der Nullstelle bzw. des Pols von* a *bezeichnet.*

25 Das Lebesgue Maß

Das Lebegue Maß einer Punktmenge der reellen Geraden, der reellen Ebene oder des reellen Raums ist die Zahl, die man in der Geometrie als ihre Länge oder Fläche oder Volumen bezeichnet. Für eine Strecke, ein Rechteck oder einen Quader sind die Länge, die Fläche oder das Volumen elementargeometrisch definiert. Daraus wird in mehreren Schritten eine Maßzahl für weit kompliziertere Punktmengen bestimmt. Dabei beschränkt man sich nicht auf die drei Dimensionen der Anschauung. Im Folgenden bezeichne $d \in \mathbb{N}$ die Dimension des Grundraums $\mathbb{R}^d$.

(1) Halboffene Quader. Für $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ und $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ sei $a \leq b$, falls komponentenweise $a_i \leq b_i \ \forall i = 1, \dots, d$ gilt. Wir schreiben $a \lhd b$, falls $a_i < b_i$ für alle Komponenten zutrifft. Weiter bezeichne

$$[a, b[:= \left\{ x \in \mathbb{R}^d : a \leq x \lhd b \right\} = [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \cdots \times [a_d, b_d[= \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i[$$

den achsenparallelen, nach rechts hin offenen d-dimensionalen Quader, kurz halboffenen Quader, mit unterer linken Ecke a und oberer rechten Ecke b. Offenbar ist $[a, b[\neq \emptyset$ genau dann, wenn $a \lhd b$. Entsprechend definiert man die Quader $]a, b]$, $[a, b]$, $]a, b[$.

(2) Elementarinhalt. Für jeden halboffenen Quader [a,b[heiße

$$\lambda_0([a, b[) := \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

der d-dimensionaler Elementarinhalt von $[a, b[$.

Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ heißt vereinigungsstabil oder $\cup$-**stabil**, wenn $A \cup B \in \mathcal{E}$ falls A, $B \in \mathcal{E}$. Entsprechend versteht man durchschnittsstabil oder $\cap$-**stabil**.

(3) Figuren. Bezeichne $\mathcal{I}^d := \left\{ [a, b[: a, b \in \mathbb{R}^d \right\}$ die Menge der d–dimensionalen halboffenen Quader. Eine Menge $F \subset \mathbb{R}^d$ heißt eine d–dimensionale Figur, wenn sie die Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern ist. Mit

$$\mathcal{F}^d := \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} I_j : \ I_j \in \mathcal{I}^d, j = 1, \dots, n \text{ und } n \in \mathbb{N} \right\}$$

wird die Menge aller d-dimensionalen Figuren bezeichnet. Für $\mathcal{I}^d$ und $\mathcal{F}^d$ gelten:

(α) $\mathcal{I}^d \subset \mathcal{F}^d$, $\mathcal{F}^d$ *ist* $\cup$*-stabil,* $\mathcal{I}^d$ *ist* $\cap$*–stabil,* $\mathcal{F}^d$ *ist* $\cap$*–stabil.*

(β) $I, J \in \mathcal{I}^d \Rightarrow I \backslash J \in \mathcal{F}^d$.

(γ) $\mathcal{F}^d = \left\{\bigcup_{j=1}^n I_j : I_j \in \mathcal{I}^d,\ j = 1, \ldots, n, \text{ paarweise disjunkt}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(δ) $F, G \in \mathcal{F}^d \Rightarrow F \backslash G \in \mathcal{F}^d$.

Beweis. (α) Die beiden ersten Behauptungen folgen unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{F}^d$. Seien nun $I = [a, b[$ und $J = [c, d[$ mit $a \le b$, $c \le d$. Dann ist $I \cap J = [u, v[$ mit $u_i = \max\{a_i, c_i\}$ und $v_i = \min\{b_i, d_i\}$ $\forall i = 1, \cdots, d$. Daher ist $I \cap J \in \mathcal{I}^d$. Die letzte Behauptung folgt nun elementar aus $\bigcup_k I_k \cap \bigcup_l J_l = \bigcup_{k,l} I_k \cap J_l$.

(β) Da $I \backslash J = I \backslash (I \cap J)$ und $I \cap J \in \mathcal{I}^d$ wie eben gezeigt, kann o.E. angenommen werden, dass $\emptyset \ne J \subset I$, d.h. $a \le c \lhd d \le b$. Nun wird I längs der Ebenen durch die Quaderflächen von J zerschnitten: Setze $a_1^{(1)} := a$, $a^{(2)} := c$, $a^{(3)} := d$, $a^{(4)} := b$. Dann ist $a^{(1)} \le a^{(2)} \lhd a^{(3)} \le a^{(4)}$. Wir zeigen, dass

$$I = \bigcup \left\{[u, v[: u_i = a_i^{(k)}, v_i = a_i^{(k+1)} \text{ für } i = 1, \cdots, d \text{ und } k = 1, 2, 3\right\}.$$

Zum Nachweis der Inklusion $\supset$ sei x aus einem der Quader $[u, v[$. Dann ist $a_i^{(1)} \le u_i \le x_i < v_i \le a_i^{(4)}$ für jedes i, woraus folgt, dass $x \in [a^{(1)}, a^{(k)}[= I$. — Zum Nachweis der Inklusion $\subset$ sei nun $x \in I$. Das bedeutet $a_i^{(1)} \le x_i \le a_i^{(4)}$ $\forall i$. Zu jedem i existiert genau ein $k^{(i)} \in \{1, 2, 3\}$ derart, dass $u_i := a_i^{(k_i)} \le x_i < a_i^{(k_i+1)} =: v_i$. Somit ist $x \in [u, v[$.

Die Eindeutigkeit von u beweist außerdem, dass obige Vereinigung disjunkt ist. Da schließlich $J = [u, v[$ mit $u = a^{(2)}, v = a^{(3)}$ ist, folgt, dass $I \backslash J$ die Vereinigung von maximal $3^d - 1$ disjunkten Quadern ist. (Es sind $3^d - 1$ Quader, wenn $a^{(1)} \lhd a^{(2)} \lhd a^{(3)} \lhd a^{(4)}$.)

(γ) Sei $F \in \mathcal{F}^d$, d.h. $F = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ mit $I_i \in \mathcal{I}^d$. Dann ist rein mengentheoretisch

$$F = I_1 \cup [I_2 \backslash I_1] \cup [(I_3 \backslash I_1) \cap (I_3 \backslash I_2)] \cup \cdots \cup [(I_n \backslash I_1) \cap (I_n \backslash I_2) \cap \cdots \cap \cdots (I_n \backslash I_{n-1})].$$

Das ist eine Vereinigung von n Mengen, die offenbar paarweise disjunkt sind. Jede dieser Mengen ist eine Vereinigung von paarweise disjunkten Quadern, da jede der Differenzen $I_k \backslash I_l$ nach (β) eine solche ist. Damit ist F selbst eine Vereinigung von disjunkten Quadern.

(δ) Seien $F = \bigcup_{i=1}^m I_i$ und $G = \bigcup_{j=1}^n J_j$ mit $I_i, J_j \in \mathcal{I}^d$ $\forall i, j$. Dann ist $F \backslash G = \bigcup_{i=1}^m (I_i \backslash G) = \bigcup_{i=1}^m \left(I_i \backslash \bigcup_{j=1}^n J_j\right) = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n (I_i \backslash J_j)$. Das zeigt, dass $F \backslash G \in \mathcal{F}^d$, weil nach ($\beta$) alle $I_i \backslash J_j \in \mathcal{F}^d$ und $\mathcal{F}^d$ nach (α) sowohl $\cap$–stabil wie $\cup$–stabil ist.

□

Die Eigenschaften des Mengensystems $\mathcal{F}^d$ geben Anlaß zu folgender allgemeinen Definition.

(4) Ring, Algebra. Seien Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann nennt man $\mathcal{R}$ einen (Mengen-)Ring auf Ω, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{R}$
- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{R}$
- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$.

Gilt zusätzlich, dass $\Omega \in \mathcal{R}$, so heißt $\mathcal{R}$ eine Algebra auf Ω. — Jeder Ring ist $\cap$–stabil, denn für $A, B \in \mathcal{R}$ ist $A \cap B = (A \cup B) \backslash [((A \cup B) \backslash A) \cup ((A \cup B) \backslash B)]$. — In (3) ist gezeigt, dass $\mathcal{F}^d$ ein Ring auf $\mathbb{R}^d$ ist. Jedoch ist $\mathcal{F}^d$ keine Algebra, weil $\mathbb{R}^d$ keine Figur ist.

(5) Erzeugter Ring. Sei $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$. Dann heißt $\rho(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{R} : \mathcal{R} \text{ Ring auf } \Omega, \mathcal{R} \supset \mathcal{E}\}$ der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring. — Dazu ist anzumerken, dass $\mathcal{P}(\Omega)$ offenbar ein Ring ist, der $\mathcal{E}$ enthält. Deshalb ist $\rho(\mathcal{E})$ wohldefiniert. Weiter ist $\rho(\mathcal{E})$ ein Ring, wie man direkt überprüft. Nach Definition ist $\rho(\mathcal{E})$ in jedem Ring enthalten, der $\mathcal{E}$ enthält. Deshalb ist es der kleinste Ring, der $\mathcal{E}$ enthält.

(6) Lemma. *Es ist* $\mathcal{F}^d = \rho(\mathcal{I}^d)$.

Beweis. Aus (3) folgt, dass $\mathcal{F}^d$ ein Ring ist, der $\mathcal{I}^d$ enthält. Deshalb gilt $\rho(\mathcal{I}^d) \subset \mathcal{F}^d$. Da $\rho(\mathcal{I}^d)$ $\cup$–stabil ist, folgt aus der Definition von $\mathcal{F}^d$, dass $\rho(\mathcal{I}^d) \supset \mathcal{F}^d$. □

Kurze Wiederholung

- Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$. Die Menge $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}^d : a_i \leq x_i < b_i \ \forall i\} = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i[$ heißt halboffener Quader. Die Menge aller halboffenen Quader wird mit $\mathcal{I}^d$ bezeichnet.
- Eine Figur ist eine Menge, die Vereinigung von endlich vielen halboffenen Quadern ist. Die Menge aller Figuren wird mit $\mathcal{F}^d$ bezeichnet.
- $\mathcal{F}^d$ ist ein Mengenring, d.h. es gelten: $\emptyset \in \mathcal{F}^d$ und $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}, \ F \backslash G \ \in \mathcal{F}^d$.
- Abstrakte Definition eines Mengenrings und des von einer Menge $\mathcal{E}$ von Teilmengen erzeugten Rings $\rho(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Es ist $\mathcal{F}^d = \rho(\mathcal{J}^d)$.
- Elementarinhalt auf $\mathcal{J}^d$: $\lambda_0([a, b[) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$.

---

(7) Inhalt, Maß. Seien $\mathcal{R}$ ein Ring auf Ω und $A, B, \ A_n$ aus $\mathcal{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt

(a) $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$, wenn

- $\lambda(\emptyset) = 0$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

(b) $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $\mathcal{R}$, wenn

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und $\bigcup_n A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_n^\infty \mu(A_n)$.

Ein Inhalt ist **additiv**, ein Maß ist **σ–additiv**. — Beim Rechnen mit Inhalten oder Maßen ist Folgendes zu bemerken.

- $a + \infty = \infty + a = \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

- Falls $\mu(A_{n_0}) = \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$. Weil alle $\mu(A_n) \geq 0$, kommt es bei der Summation nicht auf die Reihenfolge der Summanden nicht an.

- In Hinblick auf die σ–Additivität eines Maßes beachte man, dass die Vereinigung $\bigcup_n A_n$ von disjunkten $A_n \in \mathcal{R}$ i. allg. kein Element von $\mathcal{R}$ ist, wie z.B. $\mathbb{R} \notin \mathcal{F}^1$ obwohl $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}([-n, -n+1[\cup [n-1, n])$.

- Jedes Maß ist ein Inhalt. Denn sind $A, B \in \mathcal{R}$ disjunkt, setze man $A_1 := A$, $A_2 = B$ und $A_n := \emptyset$ $\forall n \geq 3$. Dann sind $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ disjunkt mit $\bigcup_n A_n = A \cup B$ und $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B)$.

Vielfach wird ein Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$ ein **Prämaß** genannt und nur für den Fall, dass $\mathcal{R}$ eine $\sigma-$Algebra (s.u.) ist, als Maß bezeichnet.

(8) Lemma. *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring, λ ein Inhalt und $A, B, A_1, \cdots, A_n \in R$. Dann gelten*

- $\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B)$
- $A \subset B \Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)$ *Monotonie*
- $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$ *Subadditivität*

Beweis. Wir benutzen mehrfach die Additivität und die Nichtnegativität.
• $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \Rightarrow \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus (A \cap B)) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.
• $B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A) \geq \lambda(A)$.
• Den dritten Punkt zeigen wir mit Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist offensichtlich richtig. Es folgt der Induktionsschluß : $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) + \lambda(A_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) + \lambda(A_{n+1})$. □

(9) Definition. Ein Inhalt λ auf dem Ring $\mathcal{R}$ heißt $\sigma-$**endlich**, wenn $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, existieren mit $\lambda(A_n) < \infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

(10) Lemma. *Es existiert genau ein Inhalt λ auf dem Ring $\mathcal{F}^d$ der d-dimensionalen Figuren, der den Elementarinhalt λ_0 auf $\mathcal{I}^d$ fortsetzt. Es folgt, dass $\lambda(\mathcal{F}^d) \subset [0, \infty[$ und λ σ–endlich ist.*

Beweis. Zunächst wird die Eindeutigkeit, Endlichwertigkeit und $\sigma-$Endlichkeit von λ nachgewiesen. Sei $F \in \mathcal{F}^d$. Nach (3)(γ) existieren disjunkte $I_i \in \mathcal{I}^d$, $i = 1, \cdots, n$ mit $F = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Damit ist $\lambda(F) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_0(I_i) < \infty$. Hieraus ersieht man, dass λ eindeutig durch λ_0 bestimmt ist und endlichwertig ist. Wegen $A_n := [-n, n[^d \in \mathcal{I}^d$, $\bigcup_n A_n = \mathbb{R}^d$ folgt zudem, dass λ $\sigma-$endlich ist.

Jetzt zeigen wir die Existenz von λ. Sei wieder $F = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{F}^d$ mit disjunkten $I_i \in \mathcal{I}^d$. Setze

$$\lambda(F) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_0(I_i).$$

Jedoch ist λ genau dann wohldefiniert, wenn jede weitere solche Darstellung $F = \bigcup_{j=1}^m J_j$ das gleiche Ergebnis

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_0(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_0(J_j) \tag{$\star$}$$

liefert. Außerdem ist, wenn ($\star$) gilt, λ bereits ein Inhalt. Denn erstens ist $\lambda(\emptyset) = \lambda_0(\emptyset) = 0$. Sind zweitens $F, F' \in \mathcal{F}^d$ disjunkt mit Darstellungen $F = \bigcup_i I_i$, $F' = \bigcup_i I'_j$ mittels disjunkter $I_i, I'_j \in \mathcal{I}^d$, dann ist $F \cup F' = \bigcup_i I_i \cup \bigcup_j I'_j$ eine disjunkte Vereinigung und daher $\lambda(F \cup F') = \sum_i \lambda_0(I_i) + \sum_j \lambda_0(I'_j) = \lambda(F) + \lambda(F')$ nach ($\star$). Schließlich folgt die Eigenschaft ($\star$) aus dem Spezialfall

$$\lambda_0(H) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_0(H_k) \tag{$\star\star$}$$

für alle $H = \bigcup_{k=1}^l H_k$ mit $H, H_k \in \mathcal{I}^d$ und disjunkten H_k. Denn es ist $I_i = I_i \cap F = I_i \cap \bigcup_{j=1}^m J_j = \bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)$ mit disjunkten $I_i \cap J_j \in \mathcal{I}^d$ nach (3)(α). Damit ist $\lambda_0(I_i) \overset{(\star\star)}{=} \sum_j \lambda_0(I_i \cap J_j)$ und somit $\sum_i \lambda_0(I_i) = \sum_i \sum_j \lambda_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \sum_i \lambda_0(I_i \cap J_j) \overset{(\star\star)}{=} \sum_j \lambda_0(J_j)$.

Damit bleibt ($\star\star$) zu zeigen. Seien $H = [a, b[$ mit $a \lhd b$ und $H_k = [a^{(k)}, b^{(k)}[$ mit $a^{(k)} \lhd b^{(k)}$ für $k = 1, \cdots, l$. Für jedes $i \in \{1, \cdots, d\}$ setze $Z_i := \bigcup_{k=1}^l \{a_i^{(k)}\} \cup \{b_i^{(k)}\}$. Für $\alpha \in Z_i$ mit $\alpha < \max Z_i$ sei $\overline{\alpha} := \min\{\beta \in Z_i : \beta > \alpha\}$. Damit ist $\overline{\alpha}$ das zu α nächstgrößere Element in Z_i.

Sei nun $k \in \{1, \ldots, l\}$ fest. Zerschneide H_k längs der Ebenen durch die Quaderflächen aller Quader. Wir zeigen, dass

$$H_k = \bigcup \{ [u, \overline{u}[: \ u \in H_k \text{ mit } u_i \in Z_i \forall i\}$$

und dass die Vereinigung disjunkt ist, wobei $(\overline{u})_i := \overline{u_i}$:

„ $\supset$ “ $u \in H_k \Rightarrow u_i < b_i^{(k)} \ \forall i; \quad u_i \in Z_i,\ b_i^{(k)} \in Z_i \ \Rightarrow \ \overline{u_i} \le b_i^{(k)}$. Daraus folgt $[u, \bar{u}[\in H_k$.

„ $\subset$ “ $x \in H_k \Rightarrow a_i^{(k)} \le x_i < b_i^{(k)} \ \forall i; \quad a_i^{(k)},\ b_i^{(k)} \in Z_i \ \Rightarrow \ \exists_1\, \alpha_i \in Z_i\colon\ a_i^{(k)} \le \alpha_i \le x_i < \overline{\alpha_i} \le b_i^{(k)}$. Daraus folgt $u := (\alpha_i) \in H_k$ und $x \in [u, \overline{u}[$.

Die Disjunktheit der Quader $[u, \overline{u}[$ folgt aus obiger Eindeutigkeit der u.

Mit $E_k := \{u \in H_k : \ u_i \in Z_i \ \forall i = 1, \ldots, d\}$ und $Z_{ik} := \{\alpha \in Z_i : \ a_i^{(k)} \le \alpha < b_i^{(k)}\}$ folgt

$$\sum_{u \in E_k} \lambda_0([u, \overline{u}[) = \sum_{u \in E_k} \prod_{i=1}^{d} (\overline{u_i} - u_i) \overset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{d} \sum_{\alpha \in Z_{ik}} (\overline{\alpha} - \alpha) \overset{(2)}{=} \prod_{i=1}^{d} (b_i^{(k)} - a_i^{(k)}) = \lambda_0(H_k).$$

Dabei gilt (2), weil die Summe davor eine Teleskopsumme ist. Die Gleichheit (1) folgt aus einer allgemeinen Formel, die am Ende des Beweises erklärt wird. Weil $H = \bigcup_k H_k$, sind $a_i, b_i \in Z_i \ \forall i$ und es gilt mit $E := \{u \in H : \ u_i \in Z_i \ \forall i = 1, \ldots, d\}$ ebenso

$$\sum_{u \in E} \lambda_0([u, \overline{u}[) = \lambda_0(H).$$

Wegen $E = \bigcup_{k=1}^l E_k$ ist $\lambda_0(H) = \sum_{u \in E} \lambda_0([u, \bar{u}[) = \sum_{k=1}^l \sum_{u \in E_k} \lambda_0([u, \bar{u}[) = \sum_{k=1}^l \lambda_0(H_k)$.

Die zur Gleichheit (1) erwähnte Formel lautet

$$\prod_{i=1}^{d} \sum_{\gamma \in C_i} \gamma = \sum_{c \in C} \prod_{i=1}^{d} c_i,$$

wobei $C_i \subset \mathbb{C}$ für $i = 1, \cdots, d$ endliche Mengen sind und $C := C_1 \times \cdots \times C_d$. Denn das Ausmultiplizieren des Produktes $\left(\sum_{\gamma \in C_1} \gamma\right) \cdot \left(\sum_{\gamma \in C_2} \gamma\right) \cdots \left(\sum_{\gamma \in C_d} \gamma\right)$ bedeutet, ein $c \in C$ zu wählen, das Produkt $\prod_i c_i$ zu bilden und anschließend alle diese Produkte aufzusummieren. $\square$

(11) Satz. *Der Inhalt* λ *aus* (10) *ist ein Maß auf* $\mathcal{F}^d$.

Beweis. Es wird zunächst die $\phi-$Stetigkeit von λ gezeigt, d.h. ist (F_n) eine absteigende Folge aus $\mathcal{F}^d$, d.h. $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$, wofür $\delta := \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) > 0$ ist, dann gilt $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Jedes F_n ist eine endliche disjunkte Vereinigung von $[a, b[\in \mathcal{I}^d \setminus \{\emptyset\}$. Ersetzt man jedes $[a, b[$ durch ein kleineres $[a, c[$ mit $c \in [a, b[$, erhält man eine neue Figur G_n, die $\overline{G_n} \subset F_n$ erfüllt. Die Verkleinerung von F_n auf G_n sei dabei so gering, dass

$$\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leq 2^{-n}\delta. \tag{$\star$}$$

Da $\overline{G_n} \subset F_n$ beschränkt ist, ist $\overline{G_n}$ kompakt. Es genügt zu zeigen, dass $\bigcap_{i=1}^m \overline{G_i} \neq \emptyset \ \forall m$, denn dann folgt aus der endlichen Durchschnittseigenschaft (siehe nach (2.8))

$$\emptyset \neq \bigcap_n \overline{G_n} \subset \bigcap_n F_n.$$

Angenommen $\bigcap_{i=1}^m \overline{G_i} = \emptyset$ für ein m. Dann gilt $F_m = F_m \setminus \bigcap_{i=1}^m \overline{G_i} \subset (F_m \setminus G_m) \cup \cdots \cup (F_1 \setminus G_1)$. Mit (8) und ($\star$) folgt der Widerspruch $\delta \leq \lambda(F_m) \leq \lambda(F_m \setminus G_m) + \cdots + \lambda(F_1 \setminus G_1) \leq (2^{-m} + \cdots + 2^{-1})\delta < \delta$. Die $\sigma-$Additivität von λ folgt nun aus der $\phi-$Stetigkeit nach folgendem Lemma. $\square$

(12) Lemma. *Seien* $\mathcal{R}$ *ein Ring und* λ *ein Inhalt auf* $\mathcal{R}$. *Dann ist* λ *ein Maß, wenn* λ ***$\phi-$stetig*** *ist, d.h. wenn für jede absteigende Folge* (A_n) *in* $\mathcal{R}$ *mit* $\bigcap_n A_n = \emptyset$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

Beweis. Zu zeigen ist die σ–Additivität von λ. Seien also $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ disjunkt mit $A := \bigcup_n A_n \in \mathcal{R}$. Die Folge der $B_n := A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R}$ ist offenbar absteigend mit $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Damit gilt $\lambda(A) = \lambda(B_n) + \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lambda(B_n) + \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i)$, weil $\lambda(B_n) \to 0$ wegen der $\phi-$Stetigkeit von λ. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: Ist μ ein Maß auf dem Ring $\mathcal{R}$ mit $\mu(\mathcal{R}) \subset [0, \infty[$, dann ist μ $\phi-$stetig. Man finde ein Gegenbeispiel dazu für den Fall, dass $\mu(\mathcal{R}) \not\subset [0, \infty[$.

Elementare geometrische Mengen M wie Kreise, Kugeln, Zylinder etc., aber auch abzählbare Punktmengen wie die rationalen Zahlen und andere kompliziertere aber konstruierbare Mengen wie das Cantorsche Diskontinuum sind keine Figuren und ihnen kann bislang keine Maßzahl $\lambda(M)$ zugeordnet werden. Das Mengensystem der zu messenden Mengen muss daher über den Ring der Figuren hinaus erweitert werden. Wie sich herausstellt, ist das adäquate Mengensystem hierfür die vom Ring der Figuren erzeugte σ–Algebra.

(13) σ–Algebra. Eine Menge von Teilmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt $\sigma-$Algebra auf Ω, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$
- (A_n) Folge in $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeigen Sie:

- Eine σ–Algebra $\mathcal{A}$ ist stabil gegenüber abzählbaren (auch endlichen) Vereinigungen und Durchschnitten, gegenüber Differenzbildung und Bildung der symmetrischen Differenz. Dabei ist $A \triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ die symmetrische Differenz von A und B.
- Jede σ–Algebra ist auch eine Algebra.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ und $\{\emptyset, \Omega\}$ sind die größte bzw. kleinste σ–Algebra auf Ω.

(14) Bemerkung. Sei $\mathcal{A}$ eine σ−Algebra. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist ein Maß genau dann, wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$ für jede Folge (A_n) disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$. Man braucht $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ nicht extra zu fordern. Vgl. (7)(b).

(15) Erzeugte σ–Algebra. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ σ–Algebra}, \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ–Algebra (vgl. (5)). Es ist die kleinste σ–Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, denn zunächst ist $\sigma(\mathcal{E})$ definiert, weil $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ–Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält. Weiter ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ–Algebra, was man leicht nachprüft. Sie enthält offenbar $\mathcal{E}$ und definitionsgemäß ist $\sigma(\mathcal{E})$ in jeder σ–Algebra enthalten, die $\mathcal{E}$ enthält.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeigen Sie:

- $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \rho(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.
- $\mathcal{A}$ ist eine σ−Algebra $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
- $\mathcal{E} = \{A\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, \Omega\backslash A, \Omega\}$.
- $\mathcal{E} = \{A \subset \Omega : A \text{ einpunktig}\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$.

(16) Borel Mengen. Bezeichne $\mathcal{T}^d$ die Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ (d.i. die Topologie auf $\mathbb{R}^d$). Dann heißt $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{T}^d)$ die σ–Algebra der Borel Mengen von $\mathbb{R}^d$.

(17) Satz. *Seien $\mathcal{C}^d$ und $\mathcal{K}^d$ die Menge der abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$. Dann gilt*

$$\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d) = \sigma(\mathcal{F}^d) = \sigma(\mathcal{I}^d).$$

Beweis. Zunächst gilt mit (6): $\mathcal{I}^d \subset \mathcal{F}^d = \rho(\mathcal{I}^d) \subset \sigma(\mathcal{I}^d) \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}^d) = \sigma(\mathcal{I}^d)$. Weiter ist $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann offen, wenn $\mathbb{R}^d \backslash A$ abgeschlossen ist. Daher folgt $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{T}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d)$. — Nun sei A abgeschlossen. Dann ist $A = \bigcup_n A_n$ mit kompakten $A_n := A \cap [-n, n]^d$. Daher folgt: $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{C}^d \subset \sigma(\mathcal{K}^d) \Rightarrow \sigma(\mathcal{K}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d)$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{I}^d) = \mathcal{B}^d$. Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$. Mit $a_i^{(n)} := a_i + \frac{1}{n}\ \forall i$ folgt, dass der offene Quader $]a, b[= \bigcup_n [a^{(n)}, b[\in \sigma(\mathcal{I}^d)$. Sei nun A offen. Dann ist offenbar $A = \bigcup \left\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}^d,]a, b[\subset A \right\}$ eine abzählbare Vereinigung offener Quader. Zusammen folgt, dass $A \in \sigma(\mathcal{I}^d)$ für alle offenen A und somit $\mathcal{B}^d \subset \sigma(\mathcal{I}^d)$. — Der abgeschlossene Quader $[a, b]$ ist eine abgeschlossene Menge. Hyperflächen sind auch abgeschlossen. Daher ist $[a, b[= [a, b] \backslash \bigcup_{i=1}^d \{x : x_i = b_i\} \in \sigma(\mathcal{C}^d)$. Damit ist $\sigma(\mathcal{I}^d) \subset \sigma(\mathcal{C}^d) = \mathcal{B}^d$. □

Die Aufgabe, die sich jetzt stellt, ist die Fortsetzung des Maßes λ auf $\mathcal{F}^d$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}^d$. Dazu geht man zunächst zu dem auf der gesamten Potenzmenge definierten äußeren Maß über. Dieses ist σ–subadditiv aber nicht generell σ–additiv. Das folgende Lemma gibt die allgemeine Konstruktionsmethode an. Entscheidend ist dabei die Verwendung von abählbar unendlichen Überdeckungen.

(18) Äußeres Maß. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{E}$ und $\varphi : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$. Für $A \subset \Omega$ setze*

$$\varphi^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n) : E_n \in \mathcal{E}, \bigcup_n E_n \supset A \right\},$$

wobei $\varphi^*(A) := \infty$ falls A nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}$ enthalten ist. Dann ist φ^* ein äußeres Maß, denn $\varphi^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ erfüllt für A, B, $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\varphi^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\varphi^*(A) \leq \varphi^*(B)$ *falls* $A \subset B$ *(Monotonie)*

(iii) $\varphi^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \varphi^*(A_n)$ *(σ–Subadditivität).*

Beweis. (i) und (ii) sind offensichtlich. Zum Nachweis von (iii) kann sofort angenommen werden, dass $\varphi^*(A_n) < \infty\ \forall n$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert für jedes n eine Folge $(E_{nm})_m$ in $\mathcal{E}$ mit $A_n \subset \bigcup_m E_{nm}$ und $\varphi^*(A_n) \geq \sum_m \varphi(E_{nm}) - 2^{-n}\epsilon$. Dann gilt $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{nm} E_{nm}$ und $\varphi^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_{nm} \varphi(E_{nm}) = \sum_n \sum_m \varphi(E_{nm}) \leq \sum_n (\varphi^*(A_n) + 2^{-n}\epsilon) = \sum_n \varphi^*(A_n) + \epsilon$. □

(19) Lebesgue–Borel Maß. *Setze $\lambda^d : \mathcal{B}^d \longrightarrow [0, \infty]$,*

$$\lambda^d(B) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0(I_n) : I_n \in \mathcal{I}^d, \bigcup_n I_n \supset B \right\}.$$

Dabei ist das Infimum erklärt, da $B \subset \bigcup_n I_n$ mit $I_n := [-n, n[^d$. Dann ist λ^d ein Maß auf $\mathcal{B}^d$. Es ist die einzige Fortsetzung des Elementarinhaltes λ_0 auf $\mathcal{I}^d$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}^d$. λ^d heißt das Lebesgue-Borel Maß (LB–Maß) auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Wegen (3)(γ) ist $\lambda^d(B) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(F_n) : F_n \in \mathcal{F}^d, \bigcup_n F_n \supset B \right\}$. Demnach ist $\lambda^d = \lambda^* | \mathcal{F}^d$ mit λ aus (10) gemäß (18). — In der allgemeinen Theorie zur Fortsetzung von Maßen nach C. Carathéodory wird nun gezeigt, dass für jedes äußere Maß ω (d.i. eine monotone σ–subadditive Funktion auf $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\omega(\emptyset) = 0$, vgl. (18))

$$\mathcal{A}_\omega := \{A \subset \Omega : \omega(S) = \omega(S \cap A) + \omega(S \setminus A) \; \forall S \subset \Omega\}$$

eine σ–Algebra, die sog. σ–Algebra der **ω–messbaren Mengen** ist und dass $\omega|\mathcal{A}_\omega$ ein Maß ist. Im Fall, dass $\omega = \lambda^*$ ist, wobei λ ein Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$ ist und λ^* gemäß (18) gebildet wird, beweist man, dass $\lambda^*|\mathcal{R} = \lambda$ und $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\lambda^*}$ ist. Damit erhält man eine Fortsetzung des Maßes λ auf $\mathcal{R}$ zu einem Maß $\lambda^*|\sigma(\mathcal{R})$ auf $\sigma(\mathcal{R})$. Außerdem ist diese Fortsetzung eindeutig, wenn λ σ–endlich ist.— Da λ aus (10) die eindeutige Fortsetzung des Elementarinhalts λ_0 auf $\mathcal{F}^d$ ist, σ–endlich ist und nach (11) ein Maß ist, folgt daraus die Behauptung. $\square$

Es werden jetzt wichtige Eigenschaften des Lebesgue–Borel Maßes untersucht. Dabei werden dazu auch einige allgemeine Begriffsbildungen und Konzepte eingeführt.

(20) Nullmenge. Sei λ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$. Dann heißt $A \in \mathcal{R}$ eine (λ–)Nullmenge, wenn $\lambda(A) = 0$.

(21) Lemma. *Sei μ ein Maß auf einer $\sigma-$Algebra. Dann ist μ $\sigma-$subadditiv, d.h. $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$ für beliebige $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen eine Nullmenge.*

Beweis. Setze $C_1 := A_1, C_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ für $n \geq 2$. Dann ist $A := \bigcup_n A_n = \bigcup_n C_n$ eine disjunkte Vereinigung und $C_n \subset A_n \; \forall n$. Damit folgt $\mu(A) = \sum_n \mu(C_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$. $\square$

(22) Lemma.

- *Ist $B \in \mathcal{B}^d$ beschränkt, dann ist $\lambda^d(B) < \infty$.*
- *Für $\alpha \in \mathbb{R}, i_0 \in \{1, \cdots, d\}$ sei $H := \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_{i_0} = \alpha\right\}$ eine Hyperebene orthogonal zur i_0-Koordinatenachse. Dann ist $\lambda^d(H) = 0$, d.h. H ist eine λ^d-Nullmenge.*
- *Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ abzählbar, dann ist $\lambda^d(A) = 0$.*
- *Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ ist $\lambda^d([a, b[) = \lambda^d(]a, b]) = \lambda^d([a, b]) = \lambda^d(]a, b[) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$.*

Beweis.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $B \subset [a, b[$. Damit folgt $\lambda^d(B) \leq \lambda^d([a, b[) < \infty$.
- Es ist $H \in \mathcal{B}^d$, weil H abgeschlossen ist. Dann ist $H_n := H \cap [-n, n[^d \in \mathcal{B}^d$ mit $\bigcup_n H_n = H$. Nach (21) genügt es zu zeigen, dass $\lambda^d(H_n) = 0 \; \forall \; n$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $H_{n_0} \subset I_m := \left\{x \in \mathbb{R}^d : -n_0 \leq x_i < n_0 \; \forall \; i \neq i_0, \, \alpha \leq x_{i_0} < \alpha + \frac{1}{m}\right\} \in \mathcal{I}^d$. Es folgt wieder mit Benutzung der Monotonie $\lambda^d(H_{n_0}) \leq \lambda^d(I_m) = (2n_0)^{d-1} \frac{1}{m} \to 0$ für $m \to \infty$.
- Es ist $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen. Deshalb ist $A \in \mathcal{B}^d$. Weiter ist $\lambda^d(\{a\}) \leq \lambda^d(H) = 0$ mit irgendeiner Hyperebene H durch a. Damit ist $\lambda^d(A) = 0$ nach (21).

- Da $[a,b[\in\mathcal{I}^d,]a,b[$ offen und $[a,b]$ abgeschlossen ist, sind diese Mengen in $\mathcal{B}^d$ enthalten. Weiter ist $]a,b] =]a,\tilde{b}[\cap[a,b]$ für $b \lhd \tilde{b}$, weshalb auch $]a,b] \in \mathcal{B}^d$. Da λ^d monoton ist, genügt es zu zeigen, dass $\lambda^d([a,b]) \leq \lambda^d(]a,b[)$. Nun gilt $[a,b] \subset]a,b[\cup N$ mit $N := \bigcup_{i=1}^d \{x : x_i = a_i\} \cup \bigcup_{i=1}^d \{x : x_i = b_i\}$, wobei N nach obigem eine Nullmenge ist.

□

(23) Messraum, Maßraum, Messbarkeit. Man nennt $(\Omega,\mathcal{A})$ einen Messraum, wenn Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra auf Ω ist. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen messbar. Ist μ ein Maß auf der σ–Algebra $\mathcal{A}$, dann heißt $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Seien $(\Omega,\mathcal{A})$, $(\Omega',\mathcal{A}')$ Messräume und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Diese heißt $(\mathcal{A},\mathcal{A}')$–messbar, kurz messbar, wenn $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\ \forall\ A' \in \mathcal{A}$, oder kurz

$$T^{-1}(A') \subset \mathcal{A}$$

gilt, d.h. wenn das Urbild einer messbaren Menge messbar ist. Man vergleiche diese Definition mit der Eigenschaft einer stetigen Abbildung, wonach das Urbild einer offenen Menge offen ist.

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeigen Sie: T konstant $\Rightarrow$ T messbar.

(24) Satz. *Sei $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von A', d.h. $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}'$. Dann gilt:*

$$T : \Omega \to \Omega' \textit{ messbar } \iff T^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{A}.$$

Beweis. Weil T^{-1} alle mengentheoretischen Operationen erhält, ist $\mathcal{S}' := \left\{S' \subset \Omega' : T^{-1}(S') \in \mathcal{A}\right\}$ eine σ–Algebra auf Ω'. Daher gilt: T messbar $\Leftrightarrow\ \mathcal{A}' \subset \mathcal{S}' \Leftrightarrow \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. □

(25) Stetig, borelsch. *Ist $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ stetig, dann ist T $(\mathcal{B}^d,\mathcal{B}^{d'})$–messbar,* kurz Borel messbar oder borelsch genannt.

Beweis. Die Aussage gilt nach (24), weil $\mathcal{B}^{d'} = \sigma(\mathcal{T}^{d'})$, $T^{-1}(\mathcal{T}^{d'}) \subset \mathcal{T}^d \subset \mathcal{B}^d$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: Sind $T_1 : (\Omega_1,\mathcal{A}_1) \to (\Omega_2,\mathcal{A}_2), T_2 : (\Omega_2,\mathcal{A}_2) \to (\Omega_3,\mathcal{A}_3)$ beide messbar, dann ist $T_2 \circ T_1$ messbar.

(26) Bildmaß. *Seien $T : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\Omega',\mathcal{A}')$ messbar und μ ein Maß auf Ω. Dann ist $\mathcal{A}' \to [0,\infty]$, $A' \mapsto \mu(T^{-1}(A'))$ ein Maß auf A'.* Es heißt das Bildmaß von μ unter T und wird mit $T(\mu)$ bezeichnet.

Beweis. Wir prüfen die Eigenschaften eines Maßes für $T(\mu)$ nach. Zunächst ist $T(\mu)(\emptyset) \overset{\text{Def}}{=} \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. — Seien nun $A'_n \in \mathcal{A}'$, $n \in \mathbb{N}$ disjunkt. Dann sind $T^{-1}(A'_n) \in \mathcal{A}$ disjunkt und $T(\mu)(\bigcup_n A'_n) \overset{\text{Def}}{=} \mu(T^{-1}(\bigcup_n A'_n)) = \mu(\bigcup_n T^{-1}(A'_n)) = \sum_n \mu(T^{-1}(A'_n)) = \sum_n T(\mu)(A'_n)$. Damit ist $T(\mu)$ σ–additiv. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Man weise die Transitivität für Bildmaße nach: $T_2 \circ T_1(\mu) = T_2(T_1(\mu))$.

(27) Translationsinvarianz von λ^d. *Sei $a \in \mathbb{R}^d$ und $T_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $T_a(x) := x + a$ die Translation um a. Sie ist stetig und damit messbar. Es gilt:*

$$T_a(\lambda^d) = \lambda^d.$$

Es folgt $\lambda^d(a + B) = \lambda^d(B)\ \forall B \in \mathcal{B}^d\ \forall a \in \mathbb{R}^d$.

Beweis. Offenbar ist $T_a(\lambda^d)([b, c[) = \lambda^d(T_a^{-1}([b, c[)) = \lambda^d([b - a, c - a[) = \prod_{i=1}^d [(b_i - a_i) - (c_i - a_i)] = \prod_{i=1}^d (b_i - c_i) = \lambda_0([b, c[)\ \ \forall b,\ c \in \mathbb{R}^d$. Folglich ist $T_a(\lambda^d)|\mathcal{I}^d = \lambda_0$. Mit (19) folgt $T_a(\lambda^d) = \lambda^d$. $\square$

(28) Skalierung. *Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $D : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $D(x) := (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_d x_d)$. Da die Abbildung D stetig ist, ist sie messbar. Es gilt:*

$$D(\lambda^d) = |\alpha_1 \cdots \alpha_d|^{-1} \lambda^d.$$

Sind speziell $\alpha_1 = \ldots = \alpha_d = \alpha$, dann ist D eine Dilatation *(oder* Homothetie*) und es gilt $D(\lambda^d) = |\alpha|^{-d}\lambda^d$. Damit folgt $\lambda^d(\alpha B) = |\alpha|^d \lambda^d(B)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\ B \in \mathcal{B}^d$.*

Beweis. Für das Maß $\mu := |\alpha_1 \cdots \alpha_d| D(\lambda^d)$ rechnet man leicht nach, dass $\mu|\mathcal{I}^d = \lambda_0$. Mit (19) folgt $\mu = \lambda^d$, woraus sich die Behauptung ergibt. $\square$

(29) Translationsinvariante Maße. *Für den halboffenen Einheitswürfel $W := [0, 1[^d$ des $\mathbb{R}^d$ gilt $\lambda^d(W) = 1$. Sei $\alpha > 0$. Dann ist $\mu := \alpha\lambda^d$ offenbar ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$ (d.h. $\mu(a + B) = \mu(B)\,\forall\, a \in \mathbb{R}^d\ \forall\, B \in \mathcal{B}^d$) mit $\mu(W) = \alpha$. Es gilt folgende Umkehrung: Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $0 < \mu(W) < \infty$ dann gilt*

$$\mu = \alpha\lambda^d \text{ mit } \alpha := \mu(W).$$

Beweisidee. O.E. sei $\alpha = 1$, sonst betrachte man $\frac{1}{\alpha}\,\mu$. Man zeigt $\mu([a, b[) = \lambda^d([a, b[)\ \forall a \lhd b$ für $a,\ b \in \mathbb{Q}^d$, indem man W und $[a, b[$ in kongruente achsenparallele Würfel mit rationalen Ecken zerschneidet. Der Rest folgt durch Approximation. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man führe die Beweisidee zu (29) aus.

(30) Drehspiegelunsinvarianz von λ^d. *Sei $O : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine lineare Bijektion, die die Vollkugel $K := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$ invariant läßt, d.h. $O(K) = K$. Das ist eine orthogonale Transformation bestehend aus einer Drehung und (eventuell) einer Spiegelung. Dann gilt die Drehspiegelungsinvarianz*

$$O(\lambda^d) = \lambda^d.$$

Es folgt $\lambda^d(OB) = \lambda^d(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$ und alle Drehspiegelungen O.

Beweis. Wir zeigen, dass $O(\lambda^d)$ translationsinvariant ist: $T_a(O(\lambda^d))(B) = O(\lambda^d)(T_a^{-1}(B)) = O(\lambda^d)(B-a) = \lambda^d(O^{-1}(B-a)) = \lambda^d(O^{-1}B - O^{-1}a) = \lambda^d(O^{-1}B) = O(\lambda^d)(B)$, wobei die Translationsinvarianz von λ^d genutzt wurde. Also ist in der Tat $T_a(O(\lambda^d)) = O(\lambda^d)$.

Um (29) anwenden zu können, muß noch $O(\lambda^d)(W) = 1$ gezeigt werden. Weil $O^{-1}W$ beschränkt ist, folgt $O(\lambda^d)(W) = \lambda^d(O^{-1}W) < \infty$. Weil $O^{-1}W$ offenbar einen nichtleeren halboffenen Quader Q enthält, folgt $O(\lambda^d)(W) = \lambda^d(O^{-1}W) \geq \lambda^d(Q) > 0$. Somit ergibt (29), dass $O(\lambda^d) = \alpha\lambda^d$ für ein geeignetes $\alpha \in]0,\infty[$. Zu zeigen bleibt $\alpha = 1$. Für die Vollkugel K gilt wie für $O^{-1}W$, dass $0 < \lambda^d(K) < \infty$. Jetzt folgt $\alpha = 1$ aus $\alpha\lambda^d(K) = O(\lambda^d)(K) = \lambda^d(O^{-1}K) = \lambda^d(K)$. □

(31) Satz. *Sei* $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *eine lineare Bijektion. Es folgt* $T(\lambda^d) = |\det(T)|^{-1}\lambda^d$.

Beweis. Aus der bekannten Polarzerlegung $T = OS$ einer Matrix $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit einer orthogonalen Matrix O und einer positiven symmetrischen Matrix S, folgt durch Diagonalisierung von S die Darstellung $T = O_1 D O_2$, wobei O_1, O_2 orthogonale Matrizen und D eine Diagonalmatrix ist. Dann ist $|\det(T)| = \det(D)$. Die Behauptung folgt nun aus (30) und (28) und der Transitivität der Bildmaße. □

(32) Vervollständigung eines Maßraums. *Seien* μ *ein Maß auf der* σ*–Algebra* $\mathcal{A}$ *und* $\mathcal{J} := \{Q \subset \Omega : Q$ *ist Teilmenge einer* μ*–Nullmenge*$\}$. *Dann ist*

$$\widehat{\mathcal{A}} := \{A_0 \cup Q : A_0 \in \mathcal{A},\ Q \in \mathcal{J}\}$$

eine σ*–Algebra, die* $\mathcal{A}$ *enthält. Die Mengenfunktion* $\widehat{\mu} : \widehat{\mathcal{A}} \to [0,\infty]$, $\widehat{\mu}(A_0 \cup Q) := \mu(A_0)$, *ist ein wohldefiniertes Maß auf* $\widehat{\mathcal{A}}$, *welches* μ *fortsetzt. Jede Teilmenge einer* $\widehat{\mu}$*–Nullmenge ist eine* $\widehat{\mu}$*–Nullmenge.* Man nennt $\widehat{\mathcal{A}}$ und $\widehat{\mu}$ die Vervollständigung von $\mathcal{A}$ bzw. von μ.

Beweis. Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten. Z. B. gilt $\Omega \setminus A \in \widehat{\mathcal{A}}$ für $A \in \widehat{\mathcal{A}}$. Denn ist $A = A_0 \cup Q$ mit $A_0 \in \mathcal{A}$ und $Q \subset N$ für $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$, dann ist $\Omega \setminus A = A_0' \cup Q'$ mit $A_0' := \Omega \setminus (A_0 \cup N) \in \mathcal{A}$ und $Q' := N \setminus (Q \cup A_0) \in \mathcal{J}$. — Zum Nachweis der Wohldefiniertheit von $\widehat{\mu}$ sei $A = A_0 \cup Q = A_0' \cup Q'$. Dann ist $A_0 \setminus (N \cup N') = A_0' \setminus (N \cup N')$ und daher $\widehat{\mu}(A) = \mu(A_0) = \mu(A_0 \setminus (N \cup N')) = \mu(A_0' \setminus (N \cup N')) = \mu(A_0')$. — Die übrigen Teile der Behauptung folgen ebenso einfach. □

(33) Lebesgue Maß. Die Vervollständigung $\widehat{\mathcal{B}^d}$ von $\mathcal{B}^d$ bez. des LB-Maßes λ^d heißt die σ–Algebra der Lebesgue messbaren Mengen. Entsprechend heißt $\widehat{\lambda^d}$ das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^d$. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist also eine Lebesgue messbare Menge genau dann, wenn eine Borelmenge B und eine Teilmenge Q einer Borelmenge N existieren mit $\lambda^d(N) = 0$ und $A = B \cup Q$. Es gilt $\widehat{\lambda^d}(A) = \lambda^d(B)$.

Man kann zeigen, dass es auch nicht Lebesgue messbare Mengen gibt, also dass $\widehat{\mathcal{B}^d} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ gilt.

26 Das Lebesgue Integral

Das Lebesgue Integral bezüglich des Lebesgue Maßes verallgemeinert das Integral für Regelfunktionen in zweifacher Hinsicht:

- es ist für allgemeinere Funktionen als Regelfunktionen erklärt
- es erlaubt die Integration von Funktionen mehrerer Variablen.

Das Lebgesgue Integral wird für einen beliebigen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ erklärt. Das Ziel ist, möglichst vielen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ einen „Mittelwert" $\int f d\mu$ zuzuordnen, der linear und positiv ist:

- $\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu$
- $\int f d\mu \geq 0$ für $f \geq 0$.

(1) $\pm$ **Unendlich.** Für die kompaktifizierte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$ gilt die Anordnung $-\infty < a < \infty \;\; \forall a \in \mathbb{R}$. Die Rechenoperationen $+, \cdot$ sind kommutativ mit

- $a + (\pm\infty) := \pm\infty \;\; \forall \; a \in \mathbb{R}$
- $\infty + \infty := \infty, (-\infty) + (-\infty) := -\infty$
- $a \cdot (\pm\infty) := \pm\infty \;\; \forall \; a \in]0, \infty]$
- $a \cdot (\pm\infty) := \mp\infty \;\; \forall \; a \in [-\infty, 0[$
- $0 \cdot (-\infty) := 0, \quad 0 \cdot \infty := 0$

Man beachte, dass gerade die letzte Regel in der Integrationstheorie besonders wichtig ist. Die Operationen $\infty - \infty$ und $-\infty + \infty$ sind nicht definiert. Weiter wird $\overline{\mathbb{R}}$ mit der σ–Algebra der Borelmengen $\overline{\mathcal{B}^1} := \left\{B \subset \overline{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1\right\}$ versehen. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \;\; \forall \; B \in \overline{\mathcal{B}^1}$.

(2) Indikatorfunktion. Sei $A \subset \Omega$. Die Indikatorfunktion 1_A zu A ist durch

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1 \text{ für } \omega \in A \\ 0 \text{ für } \omega \in \Omega \backslash A \end{cases}$$

definiert. — Offenbar gelten für Indikatorfunktionen die folgenden Aussagen: $1_A \leq 1_B \Leftrightarrow A \subset B$, $1_{\Omega \backslash A} = 1_\Omega - 1_A$, $1_{A \triangle B} = |1_A - 1_B|$, $1_{\bigcup_\iota A_\iota} = \sup_\iota 1_{A_\iota}$, $1_{\bigcap_\iota A_\iota} = \inf_\iota 1_{A_\iota}$ für beliebige A, B, $A_\iota \subset \Omega$. Außerdem ist 1_A genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ benutzen wir im Folgenden die abkürzende Schreibweise $\{f \geq \alpha\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty])$. Entsprechend werden $< \alpha$, $> \alpha$, $\leq \alpha$, $= \alpha$ anstelle von $\geq \alpha$ verwendet.

(3) Messbarkeitskriterium. *Sei* $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. *Dann sind äquivalent:*

(a) f *messbar*

(b) $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Q}$

(c) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}\ \forall\ \alpha \in \mathbb{Q}$

(d) *die Ausagen in* (b) *und* (c)*, wobei* $\leq$ *und* $<$ *anstelle von* $\geq$ *bzw.* $>$ *steht.*

Beweis. Da $\{f \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty])$ und $[\alpha, \infty] \in \overline{\mathcal{B}^1}$, folgen (b), (c) und (d) unmittelbar aus (a). — Nun zeigen wir die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). Zunächst folgen $f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \geq n\} \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f < -n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega \backslash \{f \geq -n\} \in \mathcal{A}$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gelten $[a, b[= [a, \infty] \backslash [b, \infty]$ und $[a, \infty] = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \leq a} [\alpha, \infty]$. Weil f^{-1} alle mengentheoretischen Operationen erhält, folgt damit mit (b), dass $f^{-1}([a, b[) \in \mathcal{A}$. Schließlich ist f messbar nach (25.24), weil $\overline{\mathcal{B}^1}$ von $\mathcal{J}^1 \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ erzeugt wird. — Die übrigen Teile der Behauptung können auf diesen zurückgeführt werden oder direkt in analoger Weise bewiesen werden. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise die übrigen Teile der Behauptung von (3).

(4) Lemma. *Seien* $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar. Dann liegt jede der Mengen* $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$ *in* $\mathcal{A}$.

Beweis. Nach (3) ist $\{f < g\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} \{f < \alpha\} \cap \{\alpha < g\} \in \mathcal{A}$. Die restlichen Aussagen folgen ähnlich. □

(5) Satz. *Seien* $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar. Dann ist* $f + g$ *messbar, falls* $f + g$ *überall auf* Ω *definiert ist. Weiter ist* $f \cdot g$ *messbar.*

Beweis. Da $\{f + g \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha - g\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt (auch falls $g(\omega) = \pm\infty$), folgt aus (4), dass $\{f + g \geq \alpha\} \in \mathcal{A}\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. Aus (3) folgt die Messbarkeit von $f + g$. — Die Messbarkeit von $f \cdot g$ beweist man ähnlich. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Zeigen Sie in (5), dass $f \cdot g$ messbar ist.

(6) Satz. *Seien* $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar,* $n \in \mathbb{N}$. *Dann sind* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ *messbar. Dabei sind diese Funktionen punktweise definiert, z.B.* $\forall \omega \in \Omega : \ (\sup f_n)(\omega) = \sup f_n(\omega)$.

Beweis. Nach (3) ist $s := \sup f_n$ messbar, weil $\{s \le \alpha\} = \bigcap_n \{f_n \le \alpha\} \in \mathcal{A} \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$. Damit ist auch $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ messbar wegen (5). Da $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n \sup_{m\ge n} f_m$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \inf_{m\ge n} f_m$, folgt schließlich daraus die Messbarkeit von $\limsup_n f_n$ und $\liminf_n f_n$. $\square$

(7) Satz. *Seien* $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar,* $n \in \mathbb{N}$. *Existiert der punktweise Limes* $\lim_n f_n$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$, *so ist dieser messbar.*

Beweis. Wegen $\lim_n f_n = \limsup_n f_n (= \liminf_n f_n)$ folgt die Behauptung nach (6). $\square$

(8) Positivteil, Negativteil. Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ seien $f^+ := \sup\{f, 0\}$ der Positivteil und $f^- := -\inf\{f, 0\}$ der Negativteil von f. *Man beachte, dass* $f^+ \ge 0$ *und* $f^- \ge 0$. *Offenbar gelten* $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ *und* $f^- = (-f)^+$, *sowie:*

$$f \text{ messbar} \quad \Leftrightarrow \quad f^+, f^- \text{ messbar} \quad \Rightarrow \quad |f| \text{ messbar.}$$

Lebesgue Leiter: 1 Elementarfunktionen und ihr Integral

(9) Elementarfunktion. Sei $E := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \ge 0 \text{ messbar}, u(\Omega) \text{ endlich}\}$. Dabei heißt $u \in E$ eine Elementarfunktion. Es ist

$$u = \sum_{\alpha \in u(\Omega)} \alpha \, 1_{\{u=\alpha\}},$$

wobei $\{u = \alpha\} \in \mathcal{A}$ und $\Omega = \bigcup_{\alpha\in u(\Omega)} \{u = \alpha\}$ eine endliche disjunkte Vereinigung ist.

(10) Normaldarstellung. *Seien* $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ *und* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \ge 0$. *Dann ist*

$$u := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \in E.$$

Falls die Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ gilt, dann heißt $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ eine Normaldarstellung von u. Dafür ist nicht verlangt, dass die α_i paarweise verschieden sind. Die Normaldarstellung ist offenbar nicht eindeutig.

Beweis. Zunächst ist $u \ge 0$ und messbar nach (5). Außerdem ist $u(\Omega) \subset \{0\} \cup \{\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k} : 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, \ 1 \le k \le n\}$ endlich. Daher ist $u \in E$. $\square$

(11) Lemma. *Seien* $u, v \in E$ *und* $\alpha \ge 0$. *Dann sind* $u + \alpha v$, uv, $\sup\{u, v\}$, $\inf\{u, v\} \in E$.

Beweis. Die Aussage gilt, weil alle diese Funktionen nichtnegativ und nach (5), (6) messbar sind und nur endlich viele Werte annehmen. $\square$

Wir erinnern, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen beliebigen Maßraum bezeichnet.

(12) Lemma. *Für* $u \in E$ *seien* $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j 1_{B_j}$ *zwei Normaldarstellungen. Dann ist* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j)$. *Beachte, dass* $0 \cdot \infty = 0$, *z.B. wenn* $\alpha_i = 0$ *und* $\mu(A_i) = \infty$.

Beweis. Mit $\Omega = \bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j$ folgt $A_i = A_i \cap \Omega = \bigcup_j (A_i \cap B_j)$ und ebenso $B_j = \bigcup_i (A_i \cap B_j)$, wobei die Mengen $A_i \cap B_j$ paarweise disjunkt sind. Daher ist $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$, $\mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i \cap B_j)$. Damit ergibt sich $\sum_i \alpha_i \mu(A_i) = \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j)$ und ebenso $\sum_j \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j)$. Weil $u(\omega) = \alpha_i = \beta_j$ für $\omega \in A_i \cap B_j$, folgt damit die Behauptung. □

(13) Integral einer Elementarfunktion. Sei u eine Elementarfunktion und $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ eine Normaldarstellung von u. Dann heißt

$$\int u \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i) \in [0, \infty]$$

das Integral von u bez. μ. Nach (12) hängt es nicht von der gewählten Normaldarstellung ab.

(14) Satz. *Das Integral* $E \to [0, \infty]$, $u \mapsto \int u \, d\mu$ *hat folgende Eigenschaften.*

(a) $\int 1_A d\mu = \mu(A) \ \forall \ A \in \mathcal{A}$.

(b) *Es ist eingeschränkt linear:* $\int (u + \lambda v) d\mu = \int u \, d\mu + \lambda \int v \, d\mu \ \forall \ \lambda \geq 0$.

(c) *Es ist monoton:* $\int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu$ *falls* $u \leq v$.

Beweis. Die Aussage (a) ist offensichtlich. — Seien $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i 1_{A_i}$ und $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j 1_{B_j}$ jeweils in einer Normaldarstellung gegeben. Dann sind $u = \sum_{i,j} \alpha_{ij} 1_{C_{ij}}$ und $v = \sum_{i,j} \beta_{ij} 1_{C_{ij}}$ ebenfalls Normaldarstellungen von u bzw. v für $C_{ij} := A_i \cap B_j$ und $\alpha_{ij} := \alpha_i$, $\beta_{ij} := \beta_j \ \forall \ i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Daher ist $u + \lambda v = \sum_{i,j} (\alpha_{ij} + \lambda \beta_{ij}) 1_{C_{ij}}$ eine Normaldarstellung von $u + \lambda v$ und definitionsgemäß $\int (u + \lambda v) d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_{ij} + \lambda \beta_{ij}) \mu(C_{ij}) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mu(C_{ij}) + \lambda \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu(C_{ij}) = \int u \, d\mu + \lambda \int v \, d\mu$, was (b) beweist. — Zum Nachweis von (c) sei o.E. angenommen, dass alle $C_{ij} \neq \emptyset$. Dann folgt aus $u \leq v$, dass $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij} \ \forall i, j$ und somit $\int u \, d\mu = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mu(C_{ij}) \leq \sum_{i,j} \beta_{ij} \mu(C_{ij}) = \int v \, d\mu$. □

Lebesgue Leiter: 2 Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Seien $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Man schreibt $f_n \uparrow_n$, wenn (f_n) monoton wachsend ist, d.h. wenn $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega) \ \forall \omega \ \forall n$. In diesem Fall wächst (f_n) monoton gegen $f := \sup_n f_n$ und man schreibt

$$f_n \uparrow_n f.$$

Sind $A_n \subset \Omega$, dann bedeutet $A_n \uparrow_n$, dass (A_n) monoton aufsteigend ist, d.h. $A_n \subset A_{n+1} \ \forall n$. Man schreibt

$$A_n \uparrow_n A \ \text{ für } \ A := \bigcup_n A_n.$$

Im Fall $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \uparrow A$ folgt bekanntlich $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$ für ein Maß μ.

(15) Lemma. *Seien* $u, u_n \in E, u_n \uparrow_n$ *und* $u \le \sup_n u_n$. *Dann gilt* $\int u \, d\mu \le \sup_n \int u_n \, d\mu$.

Beweis. Sei $u = \sum_{j=1}^k \alpha_j 1_{A_j}$. Wähle $\alpha \in]0,1[$ und setze $B_n := \{u_n \ge \alpha u\} \in \mathcal{A}$. Dann gilt offenbar $B_n \uparrow \Omega$ und somit $A_j \cap B_n \uparrow_n A_j$ für $j = 1, \dots, k$. Weil $u_n \ge \alpha u 1_{B_n}$ nach Definition von B_n, ist $\int u_n d\mu \ge \alpha \int u 1_{B_n} d\mu$. Außerdem gilt $\int u d\mu = \int \alpha_j \mu(A_i) = \lim_n \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) = \lim_n \int u 1_{B_n} d\mu$. Damit erhalten wir

$$\sup_n \int u_n \, d\mu \ge \sup_n \alpha \int u 1_{B_n} d\mu = \alpha \lim_n \int u 1_{B_n} d\mu = \alpha \int u \, d\mu \quad \forall \ \alpha \in]0,1[,$$

woraus die Behauptung folgt. □

(16) Lemma. *Seien* (u_n), (v_n) *monoton wachsende Folgen in* E. *Dann gilt*

$$\sup_n u_n = \sup_n v_n \ \Rightarrow \ \sup_n \int u_n \, d\mu = \sup_n \int v_n \, d\mu.$$

Beweis. $\forall m : v_m \le \sup_n u_n \overset{(15)}{\Rightarrow} \int v_m \, d\mu \le \sup_n \int u_n \, d\mu \Rightarrow \sup_m \int v_m \, d\mu \le \sup_n \int u_n \, d\mu$. Ebenso folgt $\sup_m \int u_m \, d\mu \le \sup_n \int v_n \, d\mu$. □

(17) Integral einer Funktion aus $E^\star$. Sei $E^\star := \big\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : \exists \, u_n \in E, \ u_n \uparrow_n f \big\}$. Für $f \in E^\star$ heißt

$$\int f \, d\mu := \sup_n \int u_n \, d\mu \in [0, \infty]$$

das **Integral von f bezüglich μ**. Nach (16) hängt es nicht von der gewählten monoton gegen f aufsteigenden Folge (u_n) von Elementarfunktionen ab. — Ist $u \in E$, dann gilt $u_n \uparrow u$ für $u_n := u \ \forall n$. Das zeigt, dass $E \subset E^\star$ und dass $\int u \, d\mu$ (gemäß (17)) $= \sup_n \int u_n \, d\mu = \int u \, d\mu$ (gemäß (13)). Also wird das Integral von E auf $E^\star$ fortgesetzt.

(18) Satz. *Seien* $f, g \in E^\star$ *und* $\alpha \ge 0$. *Dann sind* $f + \alpha g$, fg, $\sup\{f, g\}$ *und* $\inf\{f, g\}$ *in* $E^\star$. *Das Integral* $E^\star \to [0, \infty], f \mapsto \int f d\mu$ *ist*

(a) *eingeschränkt linear:* $\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu$

(b) *monoton:* $\int f d\mu \le \int g d\mu$ *falls* $f \le g$.

Beweis. Die ersten Aussagen folgen aus (11), aus der Definition von $E^\star$ (17) und wegen $\sup_n u_n = \lim_n u_n$ für $u_n \uparrow$. — (a) Seien $u_n \uparrow f$, $v_n \uparrow g$ gemäß (17). Dann ist $(u_n + \alpha v_n)$ eine Folge von Elementarfunktionen mit $(u_n + \alpha v_n) \uparrow_n (f + \alpha g)$. Daher gilt $\int (f + \alpha g) \, d\mu = \sup_n \int (u_n + \alpha v_n) \, d\mu = \lim_n (\int u_n \, d\mu + \alpha \int v_n \, d\mu) = \lim_n \int u_n \, d\mu + \alpha \lim_n \int v_n \, d\mu = \sup_n \int u_n \, d\mu + \alpha \sup_n \int v_n \, d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu$. — (b) Wegen $f \le g$ ist $u_m \le \sup_n v_n = g \ \forall \ m$. Mit (15) folgt $\int u_m \, d\mu \le \int g \, d\mu$ und somit $\int f \, d\mu = \sup_m \int u_m \, d\mu \le \int g \, d\mu$. □

Der nächste Satz besagt, dass $E^\star$ bereits abgeschlossen ist gegenüber der Bildung von monotonen Limites.

(19) Lemma. *Ist* (f_n) *eine monoton wachsende Folge von Funktionen in* $E^\star$*, dann ist* $\sup_n f_n \in E^\star$*.*

Beweis. Sei $f := \sup_n f_n$. Wir zeigen

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\; \exists\, v_m \in E : v_m \le f_m \text{ und } v_m \uparrow_m f. \tag{$\star$}$$

In der Tat existiert nach (17) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(u_{nm})_m$ in E derart, dass $u_{nm} \uparrow_m f_n$. Nach (11) ist $v_m := \sup\{u_{1m}, \dots, u_{mm}\} \in E$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Für die Folge (v_m) gilt $v_m \uparrow$, weil $u_{nm} \uparrow_m$ für jedes n, und $v_m \le f_m$, weil $\sup\{f_1, \cdots, f_m\} \le f_m$. Hieraus folgt $v_m \le f$ und somit $\sup v_m \le f$. Weiter ist $u_{nm} \le v_m\ \forall\ n \le m$, weshalb $f_n = \sup_m u_{nm} \le \sup_m v_m$ und somit $f \le \sup v_m$. — Damit ist $(\star)$ nachgewiesen. Daraus folgt sofort $f \in E^\star$. □

(20) Satz von der monotonen Konvergenz. Sei (f_n) eine monoton gegen $f = \sup_n f_n$ aufsteigende Folge aus $E^\star$. Dann gilt

$$\int f\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu.$$

Beweis. Nach (19) ist $f \in E^\star$. Mit $(\star)$ aus (19) und der Monotonie des Integrals nach (18) folgt $\int f\, d\mu = \sup_n \int v_n\, d\mu \le \sup_n \int f_n\, d\mu \le \int f d\mu$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: $f_n \in E^\star, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty f_n \in E^\star$ und $\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n d\mu$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: Jedes Maß μ auf auf dem Messraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ist eindeutig durch die Werte $a_n := \mu(\{n\}) \in [0, \infty]$ bestimmt. Man zeige weiter: $E^\star = \{f : \mathbb{N} \to [0, \infty]\}$ und $\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n) a_n$.

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz in der Situation $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$:

$$a_{nm} \in [0, \infty],\ a_{nm} \le a_{n+1,m}\ \forall\ n, m \Rightarrow \sup_n \sum_{m=1}^\infty a_{nm} = \sum_{m=1}^\infty \sup_n a_{nm}.$$

Man gebe ein Gegenbeispiel dazu für den Fall an, dass die Monotonie nicht vorliegt.

Gegenbeispiel: $a_{nm} := 2^{-|n-m|}$. Denn einerseits ist $\sup_n a_{nm} = 2^{-0} = 1$ für jedes m, weshalb $\sum_{m=1}^\infty \sup_n a_{nm} = \infty$. Andererseits ist $\sum_{m=1}^\infty a_{nm} = \sum_{m=1}^\infty 2^{-|n-m|} = \sum_{m=1}^n 2^{-(n-m)} + \sum_{m=n+1}^\infty 2^{-(m-n)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = \frac{1-2^{-n}}{1-\frac{1}{2}} + 1 = 2(1-2^{-n}) + 1$, weshalb $\sup_n \sum_{m=1}^\infty a_{nm} = \sup_n \big(2(1-2^{-n}) + 1\big) = 3$. □

Das nächste Resultat liefert eine einfache Beschreibung der Funktionen aus $E^\star$.

(21) Satz. $E^\star = \big\{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} : f \ge 0 \textit{ messbar}\big\}$.

Beweis. Zur Inklusion " $\subset$ " sei $f \in E^\star$. Dann ist f das Supremum einer aufsteigenden Folge von Elementarfunktionen. Damit ist offensichtlich $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f \geq 0$. Nach (6) ist f messbar. — Zum Nachweis der Inklusion " $\supset$ " sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$f_n := 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{f > k 2^{-n}\}}.$$

Man überlegt sich, dass $f_n \uparrow f$ (und $f \leq f_n + 2^{-n}$). Dann gilt $u_{nm} := 2^{-n} \sum_{k=1}^{m} 1_{\{f > k2^{-n}\}} \uparrow_m f_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $u_{nm} \in E$, weil f messbar ist. Damit ist $f_n \in E^\star$ und $f = \sup f_n \in E^\star$ nach (19). □

Lebesgue Leiter: 3 Integrierbare Funktionen

Für $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ erinnern wir, dass $f = f^+ - f^-$ und dass f nach (8) genau dann messbar ist, wenn f^+ und f^- messbar sind.

(22) Integrierbarkeit. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ–integrierbar, in Zeichen $f \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu)$, wenn

- f messbar ist und
- $\int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$.

Dann heißt $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}$ das **Integral von f bezüglich μ**. — Weil für $f \geq 0$ offenbar $f^+ = f$ und $f^- = 0$, ist $\int f d\mu$ für $f \in \overline{\mathcal{L}^1} \cap E^\star$ weiterhin wie in (17) definiert. Man beachte, dass $\int f d\mu$ nach (17) für alle $f \in E^\star$ definiert ist, aber dass $f \in E^\star$ nur dann integrierbar ist, wenn $\int f d\mu < \infty$. — Im Fall $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ spricht man von **Lebesgue integrierbaren Funktionen** und vom **Lebesgue Integral** (im engeren Sinn).

(23) Satz. *Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind äquivalent*

(i) $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(ii) $f^+, f^- \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iii) $|f| \in \overline{\mathcal{L}^1}$

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gilt definitionsgemäß. — Die Implikation (ii)$\Rightarrow$ (iii) folgt aus der Linearität des Integrals, weil: $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int |f| \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < \infty \Rightarrow |f| \in \overline{\mathcal{L}^1}$. — Schließlich gilt (iii) $\Rightarrow$ (ii) wegen der Monotonie des Integrals, weil: $|f| \in \overline{\mathcal{L}^1} \Rightarrow \int f^\pm \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty \Rightarrow f^\pm \in \overline{\mathcal{L}^1}$. □

Schließlich wird jetzt noch das Integral für komplexwertige Funktionen erklärt.

(24) Integral komplexwertiger Funktionen. Eine komplexwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt μ–integrierbar, in Zeichen $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, wenn Re(f) und Im(f) integrierbar sind. In diesem Fall heißt die komplexe Zahl

$$\int f\,d\mu := \int \mathrm{Re}(f)d\mu + i\int \mathrm{Im}(f)d\mu$$

das Integral von f bezüglich μ. – Dabei sind Re(f) und Im(f) punktweise definiert, d.h. $(\mathrm{Re}(f))(\omega) = \mathrm{Re}((f(\omega))\ \forall\,\omega \in \Omega$ und entsprechend für Im(f). — Aus der Definition des Integrals folgt sofort

$$\mathrm{Re}\left(\int f\,d\mu\right) = \int \mathrm{Re}(f)\,d\mu, \quad \mathrm{Im}\left(\int f\,d\mu\right) = \int \mathrm{Im}(f)\,d\mu.$$

Offensichtlich ist das Integral weiterhin linear.

(25) Betragsintegriebarkeit. *Sei* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*. Dann gilt*

(a) f *ist messbar (bez.* $\mathcal{B}^2$ *auf* $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$*)* $\iff$ $\mathrm{Re}(f)$ *und* $\mathrm{Im}(f)$ *sind messbar.*

Sei f *messbar. Dann ist* $|f|$ *messbar und es gilt*

(b) $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow \int |f|d\mu < \infty$.

Schließlich sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$*. Dann gilt*

(c) $|\int f d\mu| \leq \int |f|d\mu$.

Beweis. (a) " $\Rightarrow$ " Da $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist Re messbar und damit $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re} \circ f$ messbar. Ebenso ist Im(f) messbar. Zur Umkehrung " $\Leftarrow$ " beachte man, dass $\{\omega : f(\omega) \in [\alpha, \beta[+i[\gamma, \delta[\} = \{\alpha \leq \mathrm{Re}(f) < \beta\} \cap \{\gamma \leq \mathrm{Im}(f) < \delta\} \in \mathcal{A}$ nach Voraussetzung. Nun ist $\mathcal{I}^2$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}^2$. Nach (25.24) ist daher f messbar.

Da $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2}$ folgt mit (a) aus der Meßbarkeit von f die von $|f|$.

(b) Weil $|\mathrm{Re}(f)|, |\mathrm{Im}(f)| \leq |f| \leq |\mathrm{Re}(f)| + |\mathrm{Im}(f)|$, folgt die Behauptung aus (24), (23) und wegen der Monotonie des Integrals (18)(b).

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha(\int f d\mu) = [0, \infty[$. Damit folgt $|\int f d\mu| = \alpha \int f d\mu = \int (\alpha f) d\mu = \int \mathrm{Re}(\alpha f) d\mu + i \int \mathrm{Im}(\alpha f) d\mu = \int \mathrm{Re}(\alpha f) d\mu \leq \int |\alpha f| d\mu = \int |f| d\mu$. □

(26) Einschränkung eines Maßraums. *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $M \in \mathcal{A}$*. Setze* $\mathcal{A}_M := \{A \in \mathcal{A} : A \subset M\}$ *und* $\mu_M : \mathcal{A}_M \to [0, \infty]$, $\mu_M(A) := \mu(A)$*. Dann ist* $(M, \mathcal{A}_M, \mu_M)$ *ein Maßraum.*

Für $f \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu)$ *ist* $f|M \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu_M)$ *und* $\int_M f\,d\mu := \int 1_M f\,d\mu = \int f|M\,d\mu_M$.

Für $g \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu_M)$ *sei* $\tilde{g} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *definiert durch* $\tilde{g}|M := g$, $\tilde{g}|\Omega \backslash M := 0$*. Dann ist* $\tilde{g} \in \overline{\mathcal{L}^1}(\Omega)$ *und es gilt* $\int g d\mu_M = \int \tilde{g} d\mu = \int_M \tilde{g} d\mu =: \int_M g d\mu$.

Beweis. Die Aussagen sind offensichtlich. □

(27) Lebesgue Integral für Regelfunktionen. *Sei* $\mathsf{R}[a,b]$ *der Raum der Regelfunktionen über dem Intervall* $[a,b]$. *Dann ist* $\mathsf{R}[a,b] \subset \mathcal{L}^1[a,b]$ *bezüglich des Lebesgue Maßes* λ^1 *auf* $(\mathbb{R},\mathcal{B}^1)$ *und für* $f \in \mathsf{R}[a,b]$ *gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda^1.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathsf{T}[a,b]$ eine Treppenfunktion. Nach Definition (9.2) ist $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k\,1_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^n \varphi(x_k)1_{\{x_k\}}$ mit gewissen $c_k \in \mathbb{C}$. Für $u := \operatorname{Re}\varphi$ und $v := \operatorname{Im}\varphi$ sind offenbar $u^\pm$ und $v^\pm$ Elementarfunktionen. Daher ist einerseits $\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$ nach Definition (9.5) des Regelintegrals. Andererseits ist nach Definition des Lebesgue Integrals $\int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda^1 = \int_{[a,b]} u\,d\lambda^1 + i\int_{[a,b]} v\,d\lambda^1 = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(c_k)(x_k - x_{k-1}) + i\sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(c_k)(x_k - x_{k-1}) + 0 = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$, da $\lambda^1(\{x_k\}) = 0$. Kurz es gilt

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{[a,b]} \varphi\,d\lambda^1.$$

Sei nun $f \in \mathsf{R}[a,b]$. Definitionsgemäß (9.12) existiert eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert und wofür

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Nach (7) ist f messbar. Außerdem ist $|f| \le c1_{[a,b]}$ beschränkt nach der Bemerkung zu (9.11). Es folgt $\int_{[a,b]}|f|d\lambda^1 \le \int c1_{[a,b]}d\lambda^1 = c(b-a) < \infty$, weshalb $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$ nach (25). Wegen der gleichmäßiger Konvergenz existiert zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\varphi_n(x) - f(x)| \le \epsilon\ \forall\ x \in [a,b]\ \forall\, n \ge N$. Daher gilt $\left|\int_{[a,b]}\varphi_n d\lambda^1 - \int_{[a,b]} f d\lambda^1\right| = \left|\int_{[a,b]}(\varphi_n - f)d\lambda^1\right| \le \int_{[a,b]}|\varphi_n - f|d\lambda^1 \le \epsilon\int 1_{[a,b]}\,d\lambda^1 = \epsilon(b-a)\ \forall\ n \ge N$. Das bedeutet

$$\int_{[a,b]} \varphi_n\,d\lambda^1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f\,d\lambda^1.$$

Es folgt die Behauptung. Siehe auch die Bemerkung (30). □

(28) Lemma von Fatou. *Für jede Folge* (f_n) *aus* $E^\star$ *gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu.$$

Beweis. Nach (6), (21) sind $f := \liminf_n f_n$ und $g_n := \inf_{m\ge n} f_m$ aus $E^\star$. Da $g_n \uparrow f$, folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz $\int f d\mu = \sup_n \int g_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu$. Weiter ist $\int g_n d\mu \le \int f_m d\mu\ \forall\ m \ge n$, weshalb $\int g_n d\mu \le \inf_{m\ge n}\int f_m d\mu$. Zusammen folgt die Behauptung. □

Eines der wichtigsten Ergebnisse zur Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert ist der folgende Satz von Lebesgue.

(29) Satz von der majorisierten Konvergenz. *Seien* $K \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ *und* $f_n : (\Omega,\mathcal{A},\mu) \to K$ *messbar für* $n \in \mathbb{N}$. *Weiter sei* $(f_n)_n$ *punktweise konvergent gegen* $f : \Omega \to K$ *und es existiere* $g \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu)$, $g \ge 0$ *mit*

$$|f_n| \le g\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind f_n, $n \in \mathbb{N}$ *und* f *integrierbar und es gilt*

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Die Funktion g heißt eine **integrierbare Majorante** für (f_n).

Beweis. Die Funktion f ist messbar nach (25)(a) und (7) (weil ggf. $\operatorname{Re} f_n \to \operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f_n \to \operatorname{Im} f$). Weil $|f_n|$, $|f| \leq g$ sind f_n und f integrierbar nach (25)(b). Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Es genügt offenbar, den Fall $K = \overline{\mathbb{R}}$ zu betrachten, denn $K = \mathbb{R}$ ist ein Spezialfall davon und der Fall $K = \mathbb{C}$ folgt nach (24), (25). Es genügt außerdem $f^{\pm}$ und $f_n^{\pm}$ zu betrachten wegen der Definition (22) und weil $f_n^{\pm} = \frac{1}{2}(|f_n| \pm f_n) \to \frac{1}{2}(|f| \pm f) = f^{\pm}$ und $f_n^{\pm} \leq |f_n| \leq g$. Also können wir davon ausgehen, dass $f_n, f \in E^\star, f_n \to f$ und $f_n \leq g$. Weil $f = \liminf_n f_n$ gilt nach dem Lemma von Fatou (28)

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Nun betrachten wir $h_n := g - f_n \in E^\star$, wofür $h_n \to g - f \in E^\star$. Weil $\int (g-f) d\mu + \int f d\mu = \int g d\mu < \infty$, ist $\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g-f) d\mu$. Wieder mit (28) folgt $\int (g-f) \, d\mu = \int \liminf_n h_n d\mu \leq \liminf_n \int h_n d\mu = \liminf_n \left(\int g d\mu - \int f_n d\mu\right) = \int g d\mu - \limsup_n \int f_n d\mu$. Das ergibt

$$\int f \, d\mu \geq \limsup_n \int f_n \, d\mu.$$

Es folgt die Behauptung. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Formulieren Sie das Lemma von Fatou und den Satz von der majorisierten Konvergenz für den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$.

(30) Bemerkung. In Hinblick auf den Beweis von (27) erinnern wir an die folgende Aussage des Satzes (9.14): $f, f_n \in R[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \overset{\text{glm}}{\longrightarrow} f \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx$. Die gleichmäßige Konvergenz ist eine starke Voraussetzung für diese Schlußfolgerung. Wegen (27) und nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz reicht z.B. $f_n \overset{\text{pktw}}{\longrightarrow} f$ und $|f_n| \leq c 1_{[a,b]} \; \forall \, n$. Damit läßt sich auch der letzte Beweisteil von (27) verkürzen.

(31) Integration bezüglich des Bildmaßes. *Seien* $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ *messbar,* μ *ein Mass auf* Ω *und* $T(\mu)$ *das Bildmaß* $T(\mu) = \mu \circ T^{-1}$ *gemäß* (25.26)*. Weiter sei* $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$ *und* $g : \Omega' \to K$ *messbar. Dann gilt*

$$g \in \mathcal{L}^1(T(\mu)) \Leftrightarrow g \circ T \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \int g \; dT(\mu) = \int g \circ T \; d\mu.$$

Entsprechendes folgt für $g \in \overline{\mathcal{L}^1}(T(\mu))$. *Schließlich gilt*

$$g \in E^\star(\Omega') \Leftrightarrow g \circ T \in E^\star(\Omega) \implies \int g \; dT(\mu) = \int g \circ T \; d\mu.$$

Beweis. Zunächst ist festzustellen, dass $g \circ T$ messbar ist, weil nach Voraussetzung g und T messbar sind. Nun besteige man die Lebesguesche Leiter.

(1) Sei $g \in E(\Omega')$. Dann ist $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i'}$ mit $A_i' \in \mathcal{A}'$ und es folgt $g \circ T = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{T^{-1}(A_i')} \in E(\Omega)$ mit $\int g \circ T \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \mu(T^{-1}(A_i')) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(\mu)(A_i')) = \int g \, dT(\mu)$ definitionsgemäß.

(2) Als nächstes sei $g \in E^\star(\Omega')$. Dazu existiert eine Folge (ν_n) in $E(\Omega')$ mit $\nu_n \uparrow g$. Dann folgt $\nu_n \circ T \in E(\Omega)$, $\nu_n \circ T \uparrow g \circ T$ und $\int g \, dT(\mu) = \int g \circ T \, d\mu$ wegen der Definition (17) des Integrals für Funktionen aus $E^\star$ und wegen (1).

(3) Jetzt sei $g : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$. Nach (2) sind $g^\pm \in \overline{\mathcal{L}^1}(T(\mu))$ genau dann, wenn $(g \circ T)^\pm = g^\pm \circ T \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu)$, und es ist $\int g^\pm \, dT(\mu) = \int (g \circ T)^\pm \, d\mu$. Die Behauptungen für g gelten daher aufgrund der Definition (22). Die Behauptungen für eine komplexwertige Funktion g folgen dann aus der Definition (24), weil $\mathrm{Re}(g \circ T) = \mathrm{Re}(g) \circ T$ und $\mathrm{Im}(g \circ T) = \mathrm{Im}(g) \circ T$. □

Neben dem Bildmaß ist das Maß mit Dichte die zweite grundlegende Konstruktion eines Maßes aus einem vorgegebenen Maß.

(32) Maß mit Dichte. *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $\rho \in E^\star(\Omega)$. *Dann ist*

$$\mathcal{A} \to [0, \infty], \; A \mapsto \int_A \rho d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es heißt das Maß mit Dichte ρ bezüglich μ und wird mit $\rho\mu$ bezeichnet. *Weiter sei* $f : \Omega \to K$ *messbar mit* $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}\}$. *Dann gilt*

$$f \in \overline{\mathcal{L}^1}(\rho\mu) \Leftrightarrow f\rho \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu) \implies \int f \, d\rho\mu = \int f\rho \, d\mu.$$

Außerdem gilt: $f \in E^\star \Rightarrow \rho f \in E^\star$ *und* $\int f \, d\rho\mu = \int f\rho \, d\mu$. *Wenn* ρ *reellwertig ist, dann gilt auch:* $f \in \mathcal{L}^1(\rho\mu) \Leftrightarrow \rho f \in \mathcal{L}^1(\mu) \;\Rightarrow\; \int f \, d\rho\mu = \int f\rho \, d\mu$.

Beweis. Für $\nu(A) := \int_A \rho \, d\mu$ mit $A \in \mathcal{A}$ gelten $\nu(A) \geq 0$ und $\nu(\emptyset) = 0$. Sind außerdem $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt und ist $A := \bigcup_n A_n$, dann gilt $\sum_{n=1}^N \rho 1_{A_n} \uparrow_N \rho 1_A$, weshalb $\nu(A) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$ aufgrund monotoner Konvergenz (20). Also ist $\nu = \rho\mu$ ein Maß. — Es sei noch festgestellt, dass $f\rho$ messbar ist, weil f und ρ messbar sind. Nun besteige man die Lebesguesche Leiter.

(1) Sei $f \in E$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ und es folgt $f\rho = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \rho \, 1_{A_i} \in E^\star$ mit $\int f\rho \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A_i} \rho \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(A_i) = \int f \, d\nu$ definitionsgemäß.

(2) Als nächstes sei $f \in E^\star$. Dazu existiert eine Folge (u_n) in E mit $u_n \uparrow f$. Dann folgt $u_n\rho \in E^\star$, $u_n\rho \uparrow f\rho$, weshalb $\rho f \in E^\star$ nach (19) und $\int f \, d\nu = \sup_n \int u_n \, d\nu = \sup_n \int u_n\rho \, d\mu = \int f\rho \, d\mu$ wegen (1) und wegen monotoner Konvergenz (20).

(3) Jetzt sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Nach (2) ist $\int f^\pm \, d\nu = \int (f\rho)^\pm \, d\mu$. Daher sind $f^\pm \in \overline{\mathcal{L}^1}(\nu)$ genau dann, wenn $(f\rho)^\pm = f^\pm\rho \in \overline{\mathcal{L}^1}(\mu)$. Die Behauptungen für f gelten daher aufgrund der Definition (22). Ist f komplexwertig und ist ρ reellwertig, dann ist $f\rho$ komplexwertig und die Behauptungen folgen dann aus (24), weil $\mathrm{Re}(f\rho) = \mathrm{Re}(f)\rho$ und $\mathrm{Im}(f\rho) = \mathrm{Im}(f)\rho$. □

(33) Lemma. *Jede* μ*–Nullmenge ist auch eine* $\rho\mu$*–Nullmenge für* $\rho \in E^\star$.

Beweis. Sei $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Dann ist wegen der Monotonie des Integrals $\rho\mu(N) = \int \rho 1_N \, d\mu \leq \int \infty 1_N \, d\mu = \infty \int 1_N \, d\mu = \infty \cdot 0 = 0$. □

(34) Satz. *Seien* I, $J \subset \mathbb{R}$ *offene (auch unbeschränkte) Intervalle und sei* $g : I \to J$ *bijektiv und stetig differenzierbar mit* $g' > 0$. *Dann gelten*

(a) $g(\lambda^1) = (g^{-1})'\lambda^1$ *und* $g(g'\lambda^1) = \lambda^1$.

(b) *Für ein kompaktes Intervall* $D \subset I$ *ist* $W := g(D)$ *ebenfalls ein kompaktes Intervall und es gelten* $g(\lambda^1_D) = (g^{-1})'\lambda^1_W$ *und* $g(g'\lambda^1_D) = \lambda^1_W$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die zweite Formel in (b). Dazu sei $D = [a, b]$. Dann ist $W = [g(z), g(b)]$. Sei $f \in R(W)$. Wir formen die linke Seite der Formel um und erhalten

$$\int f \; dg(g'\lambda'_D) \overset{(31)}{=} \int f \circ g \;\, d(g'\lambda^1_D) \overset{(32)}{=} \int (f \circ g) \; g' d\lambda^1_D \overset{(27)}{=} \int_a^b f(g(t))g'(t)dt.$$

Die rechte Seite lautet

$$\int f d\lambda^1_w \overset{(27)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Nach der Substitutionsregel (9.26) ist die linke Seite gleich der rechten Seite, wenn f eine C^1–Funktion ist. Wegen der Additivität der Integrale gilt diese Übereinstimmung daher auch, wenn f eine stückweise C^1–Funktion und damit auch, wenn f eine Treppenfunktion ist (weil einzelne Punkte das Lebesguemaß Null haben). Also stimmen die Maße $g(g'\lambda^1_D)$ und λ^1_W auf $\left\{I \cap W : I \in \mathcal{I}^1\right\}$ überein. Wegen der Eindeutigkeit des LB–Maßes (siehe (25.19)) folgt daraus die Gleichheit der Maße.

Mit Hilfe der σ–Additivität folgt daraus $g(g'\lambda^1) = \lambda^1$, was die zweite Formel in (a) ist.

Nun ist g^{-1} eine C^1–Funktion mit $(g^{-1})' > 0$. Aus der zweiten Formel in (a) folgt zunächst $g^{-1}(\lambda^1) = g^{-1} \circ g(g'\lambda^1) = g'\lambda^1$. Man ersetze jetzt darin g durch g^{-1}. Dann folgt $g(\lambda^1) = (g^{-1})'\lambda^1$. Das ist die erste Formel in (a). Daraus folgt sofort die erste Formel in (b). □

Den folgenden wichtigen Satz der Maßtheorie zitieren wir ohne Beweis. Zur Illustration dienen die zwei nachfolgenden Beispiele, welche mit der Substitutionsformel für das mehrdimensionale Lebesgue–Borel Maß (siehe Kap. 29) verallgemeinert werden.

(35) Satz von Radon-Nikodym. Seien μ ein σ–endliches Maß und ν ein bezüglich μ absolut stetiges Maß, in Zeichen $\nu \ll \mu$, was $\nu(A) = 0 \;\forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ bedeutet. Dann existiert eine Dichte $\rho \in E^\star$ mit

$$\nu = \rho\mu.$$

Dabei ist ρ μ–fast eindeutig, was $\mu(\{\rho \neq \tilde{\rho}\}) = 0$ für $\tilde{\rho} \in E^\star$ mit $\nu = \tilde{\rho}\mu$ bedeutet. Die Dichte ρ wird mit $\frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet und heißt die **Radon–Nikodym Ableitung** von ν bezüglich μ.

(36) Beispiele. (a) Nach (25.31) ist das Bildmaß des LB–Maßes λ^d unter einer linearen Bijektion $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein konstantes Vielfaches von λ^d, nämlich $T(\lambda^d) = |\det(T)|^{-1}\lambda^d$. Das bedeutet, dass die Radon–Nikodym Ableitung $\frac{dT(\lambda^d)}{d\lambda^d} = |\det(T)|^{-1}1_{\mathbb{R}^d}$ konstant ist. Für jede λ^d–integrierbare Funktion f folgt daher

$$\int f \circ T \, d\lambda^d = \int f \, dT(\lambda^d) = \int f \frac{dT(\lambda^d)}{d\lambda^d} \, d\lambda^d = \int f \, |\det(T)|^{-1} \, d\lambda^d = |\det(T)|^{-1} \int f \, d\lambda^d.$$

(b) In der Situation von Satz (34) gilt $\frac{dg(\lambda^1)}{d\lambda^1} = (g^{-1})'$. Wie schon in (a) gesehen, ist diese Schreibweise in Hinblick auf die Integration bez. des Bildmaßes suggestiv, denn

$$\int f \circ g \, d\lambda^1 = \int f \, dg(\lambda^1) = \int f \, \frac{dg(\lambda^1)}{d\lambda^1} \, d\lambda^1 = \int f \, (g^{-1})' \, d\lambda^1.$$

27 Satz von Fubini

Dieses Kapitel ist weitgehend ohne Beweise. Die Begriffsbildungen und die Voraussetzungen sind jedoch streng und genau formuliert, sodass eine korrekte Anwendung der Ergebnisse möglich ist.

Seien $(\Omega_i, A_i), i = 1,2$ zwei Messräume und $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ das kartesisches Produkt der Grundräume. Auf diesem kartesischen Produkt wird die folgende σ–Algebra eingeführt

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}).$$

Sie heißt das **Produkt der $\sigma-$Algebren** $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ und ist die kleinste $\sigma-$Algebra auf Ω, die alle „Rechtecke" mit messbaren Seiten enthält. Sie ist auch die kleinste $\sigma-$Algebra auf Ω, wofür die Projektionen $p_i : \Omega \to \Omega_i,\ p_i(\omega_1, \omega_2) := \omega_i, \quad i = 1,2$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_i)$–messbar sind, denn

$$p_1^{-1}(A_1) = A_1 \times \Omega_2,\ p_2^{-1}(A_2) = \Omega_1 \times A_2 \text{ und } A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2).$$

Das Produkt endlich vieler $\sigma-$Algebren wird analog definiert.

(1) Lemma. *Es gilt* $\mathcal{B}^d = \underbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^1}_{d\text{-mal}} = \underbrace{\mathcal{B}^{d'} \otimes \mathcal{B}^{d''}}_{d'+d''=d}.$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis der Aussage von (26.25)(a). □

Nach (25.19) ist λ^d das einzige Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\lambda^d(B_1 \times \cdots \times B_d) = \lambda^1(B_1) \cdots \lambda^1(B_d)\ \forall\ B_i \in \mathcal{B}^1$.

(2) Produktmaßraum. *Seien* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ *Maßräume mit σ–endlichen Maßen* μ_i, $i = 1,2$. *Dann existiert genau ein Maß* μ *auf dem* Produktmessraum $(\Omega, \mathcal{A}) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ *derart, dass*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2)\ \forall\ A_i \in \mathcal{A}_i,\ i = 1,2.$$

Das Maß μ heißt das Produktmaß der Maße μ_1 und μ_2 und wird mit $\mu_1 \otimes \mu_2$ bezeichnet. *Es ist $\sigma-$endlich. Entsprechendes gilt für das Produkt endlich vieler Maßräume. Demnach ist* $\lambda^d = \lambda^1 \otimes \cdots \otimes \lambda^1 = \lambda^{d'} \otimes \lambda^{d''}$.

Für das Folgende sei an (17.3) erinnert.

(3) Schnittabbildungen. Seien X eine Menge und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to X$. Für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ heißt

$$f(\omega_1, \cdot) : \Omega_2 \to X,\ \omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$$

der ω_1–**Schnitt** von f. Bei festem $\omega_2 \in \Omega_2$ heißt entsprechend $f(\cdot, \omega_2) : \Omega_1 \to X,\ \omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$ der ω_2–**Schnitt** von f.

(4) Lemma. *Seien* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *ein weiterer Messraum und* $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ *messbar. Dann sind alle* ω_1*–Schnitte* $f(\omega_1, \cdot)$ $(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}')$*–messbar und alle* ω_2*–Schnitte* $f(\cdot, \omega_2)$ $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}')$*–messbar.*

Im allgemeinen gilt die Umkehrung dieser Aussage nicht, d.h. es können alle Schnittabbildungen messbar sein, ohne dass die Funktion selbst messbar ist. — Anstelle von $\int f d\mu$ schreibt man auch $\int f(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$. Dies dient der größerer Deutlichkeit, wenn im Folgenden mehrere Integrationsvariablen vorkommen.

(5) Satz von Tonelli. *Seien* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ*–endliche Maßräume für* $i = 1, 2$ *und sei* $f \in E^\star(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Dann gelten:*

(i) $\omega_2 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)$ *ist* $\mathcal{A}_2$*–messbar und* $\omega_1 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)$ *ist* $\mathcal{A}_1$*-messbar.*

(ii) $\int f \; d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)\right) d\mu_2(\omega_2) = \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)\right) d\mu_1(\omega_1)$.

Erläuterung. Nach (4) ist $f(\cdot, \omega_2) \in E^\star(\Omega_1)$ für jedes festgehaltene $\omega_2 \in \Omega_2$. Daher kann über ω_1 integriert werden und man erhält die Zahl $\int f(\cdot, \omega_2) d\mu_1 = \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)$ in $[0, \infty]$. Nun besagt (i), dass auch diese nichtnegative Abbildung $\omega_2 \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)$ messbar ist. Also existiert deren Integral. Entsprechend kann man mit allen ω_1–Schnitten $f(\omega_1, \cdot)$ verfahren. Dann besagt (ii), das dass Endergebnis in beiden Fällen das gleiche ist, d.h. auf die Integrationsreihenfolge kommt es nicht an, und dass man in beiden Fällen das Integral von f bezüglich des Produktmaßes erhält. Insbesondere sind alle drei Integrale endlich, wenn eines davon endlich ist. Es sei noch erwähnt, dass die Voraussetzung der $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–Messbarkeit von f wichtig ist. Es genügt i.allg. nicht die Messbarkeit aller Schnittabbildungen.

(6) Sprechweise "fast überall". Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $A(\omega)$ bezeichne eine Aussage, die für jedes $\omega \in \Omega$ entweder richtig oder falsch ist. Man sagt: A gilt μ–fast überall auf Ω, kurz μ–f.ü., wenn eine μ–Nullmenge N (d.h. $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$) existiert derart, dass $A(\omega)$ richtig ist für alle $\omega \notin N$, oder anders ausgedrückt, dass $\{\omega \in \Omega : A(\omega) \text{ falsch}\}$ enthalten ist in einer μ–Nullmenge.

(7) Beispiele.

(α) Eine Abbildung $f : \Omega \to X$ ist konstant fast überall, wenn $x_o \in X$ und $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ existieren derart, dass $f(\omega) = x_0 \; \forall \; \omega \in \Omega \backslash N$.

(β) *Sei* $f \in E^\star$. *Dann gilt:* $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *fast überall.*

Beweis. Aus $\int f d\mu = 0$ folgt $0 = \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$, weil $1_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f \geq \frac{1}{n} 1_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}$. Also ist $\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 \; \forall n$. Da $\{f > 0\} = \bigcup_n \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$, folgt schließlich $\mu(\{f > 0\}) = 0$ nach (25.21). — Umgekehrt ist $\int f d\mu = \int (1_N + 1_{\Omega \backslash N}) f d\mu = \int_N f d\mu + \int_{\Omega \backslash N} f d\mu \leq \int_N \infty \, d\mu + \int_{\Omega \backslash N} 0 \, d\mu = \infty \cdot \mu(N) + 0 \cdot \mu(\Omega \backslash N) = 0 + 0 = 0$. □

(γ) *Sei* $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$. *Dann ist* $|f| < \infty$ *fast überall.*

Beweis. $\infty > \int |f| d\mu \geq \int_{\{|f| = \infty\}} |f| d\mu \geq \infty \, \mu(\{|f| = \infty\}) \Rightarrow \mu(\{|f| = \infty\}) = 0$. □

(δ) *Seien* f *messbar und* $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ *mit* $|f| \leq g$ *f.ü. Dann ist* f *integrierbar.*

Beweis. Es ist $|f| \leq g + \infty \cdot 1_{\{|f| > g\}} =: \tilde{g} \geq 0$. Dann ist $\tilde{g}$ integrierbar, denn $\tilde{g}$ ist messbar und $\int \tilde{g} d\mu = \int g \, d\mu + \infty \cdot \mu(\{|f| > g\}) < \infty + \infty \cdot 0 < \infty$. Daraus folgt $\int |f| d\mu < \infty$. □

(8) Definition. Sei f μ–f.ü. auf Ω definiert, d.h. es existiert ein $N \in A$ mit $\mu(N) = 0$ derart, dass f auf $\Omega \backslash N$ definiert ist. Dann f heißt **integrierbar**, wenn $f|\Omega\backslash N$ integrierbar ist. Man setzt $\int f\, d\mu := \int 1_{\Omega\backslash N} f\, d\mu$. Dies ist wohldefiniert, da das Integral über einer Nullmenge Null ist, so dass es auf die spezielle Wahl von N nicht ankommt.

(9) Satz von Fubini. *Seien* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ σ*–endlich,* $i = 1, 2$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *und* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to K$ *integrierbar bezüglich* $\mu_1 \otimes \mu_2$*. Dann gelten für* $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$*:*

(i) $\omega_i \to f(\omega_1, \omega_2)$ *ist* μ_i*–integrierbar für* μ_j*–fast alle* $\omega_j \in \Omega_j$*.*

(ii) $\omega_i \mapsto \int f(\omega_1, \omega_2) d\mu_j(\omega_j)$ *ist* μ_j*—integrierbar und es gilt* (5)(ii).

Erläuterung. Die Funktionen aus (ii) sind nach (i) integrierbar im Sinne von (8). Die Funktion f ist integrierbar, wenn f, wie auch in (5), messbar bez. der Produkt–σ–Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist und wenn eines der Integrale in (5)(ii) für $|f|$ endlich ist.

28 Integration in der Ebene

Der Flächeninhalt einer Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, d.h. $A \in \mathcal{B}^2$, ist definitionsgemäß das Lebesgue Maß $\lambda^2(A)$ dieser Menge. Dieser Flächeninhalt wird oft auch mit $F(A)$ bezeichnet. Die konkrete Berechnung von $\lambda^2(A)$ kann für ein allgemeines A schwierig sein. Wir erinnern, dass $\lambda^2(\text{abzählbare Menge}) = 0$ und $\lambda^2(\text{Gerade}) = 0$, weil eine Gerade eine gedrehte achsenparallele Hyperebene ist. Damit ist $\lambda^2(A) = 0$, wenn A enthalten ist in der Vereinigung von abzählbar vielen Geraden. Allgemeinere Nullmengen ergeben sich aus dem folgenden Satz. Wenn man $A \in \mathcal{B}^2$ zur Bestimmung ihrer Fläche längs stückweise regulären Kurven zerschneidet, entstehen dadurch zusätzliche Randmengen, die jedoch nach (1) Nullmengen sind.

(1) Satz. *Seien* $I \subset \mathbb{R}$ *ein allgemeines Intervall und* $k : I \to \mathbb{R}^2$ *eine reguläre Kurve (d.h.* k *stetig differenzierbar,* $k'(t) \neq 0 \ \forall\ t$*). Dann ist* $\operatorname{Spur} k = k(I)$ *eine* λ^2-*Nullmenge.*

Beweis. Sei $k = (k_1, k_2)$. Da $k_i' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $\{t \in I : k_i'(t) \neq 0\}$ offen in I und daher, wie man sich überlegt, die Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Intervallen $J_{i,n} \subset I, i = 1, 2$. Außerdem ist $\{k_1' \neq 0\} \cup \{k_2' \neq 0\} = I$, weil k regulär ist. Sei J eines dieser Intervalle $J_{i,n}, n \in \mathbb{N}, i = 1, 2$. Wegen (25.21) genügt es zu zeigen, dass die kompakte Menge $k(J)$ (siehe (14.10)) eine λ^2-Nullmenge ist. Sei etwa $k_1'(t) > 0 \ \forall\ t \in J$ (alle übrigen Fälle sind entsprechend zu behandeln). Dann ist

$$\lambda^2\left(k(J)\right) = \int 1_{k(J)}(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int \left(\int 1_{k(J)}(x,y)\, d\lambda^1(y) \right) d\lambda^1(x) = \int 0 \, d\lambda^1(x) = 0,$$

denn aufgrund der strengen Monotonie von k_1 ist $1_{k(J)}(x, y)$ für jedes festgehaltene x höchstens für ein y von Null verschieden. □

Für die Kurve k in (1) gilt nach (16.16), dass $k|_{[a,b]}$ rektifizierbar ist für $a, b \in I$, $a < b$. Mit einer anderen Beweismethode verallgemeinern wir (1) auf solche Kurven.

(2) Satz. *Seien* $I \subset \mathbb{R}$ *ein allgemeines Intervall und* $k : I \to \mathbb{R}^2$ *eine Kurve derart, dass* $k|_{[a,b]}$ *rektifizierbar ist für alle* $a, b \in I$, $a < b$*. Dann ist* $\operatorname{Spur} k = k(I)$ *eine* λ^2-*Nullmenge.*

Beweis. Man überlegt sich, dass es aufgrund von (25.21) genügt, die Behauptung für $I = [a, b]$ zu beweisen. Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = b$ eine Zerlegung von I der Feinheit $\delta > 0$. Bezeichne L die Länge der Kurve k und L_j die der Kurve $k|_{[t_{j-1}, t_j]}$ und sei $\tilde{U}_j$ die abgeschlossene Kreisscheibe um $k(t_j)$ mit Radius L_j für $j = 1, \ldots, l$. Dann ist

$$k(I) \subset \bigcup_{j=1}^{l} \tilde{U}_j,$$

weil die Gerade nach (16.14)(a) die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Hieraus folgt $\lambda^2(k(I)) \leq \sum_{j=1}^{l} \pi L_j^2 \leq \pi \nu(\delta) \sum_{j=1}^{l} L_j = \pi L \nu(\delta)$ mit $\nu(\delta) := \sup\{L(k|_{[r,s]}) : a \leq r < s \leq b,\ s - r \leq \delta\}$, was für $\delta \to 0$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Bogenlänge (16.19)(a) verschwindet. □

Peano Kurve. Es existiert eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]^2$, die surjektiv ist. Das ist also eine Kurve, deren Spur das gesamte Einheitsquadrat $[0,1]^2$ ausfüllt. Eine solche Kurve ist nach (2) nicht rektifizierbar.

Interpretation. Sei $A \in \mathcal{B}^2$ und sei $f \in E^\star(A)$ (d.h $f : A \to [0,\infty]$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^2\ \forall\ B \in \overline{\mathcal{B}^1}$). Dann ist $\int_A f\, d\lambda^2$ definiert. Für $f = 1$ ist $\int_A 1\, d\lambda^2 = \lambda^2(A) = F(A)$. Allgemein ist $\int_A f\, d\lambda^2$ das Volumen des senkrecht auf der $(x,y)-$Ebene stehenden Zylinderabschnitts mit Grundfläche $A \times \{0\}$ und Deckfläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ z = f(x,y)\}$.

(3) Mittelwertsatz. *Seien* $A \subset \mathbb{R}^2$ *kompakt und zusammenhängend,* $f : A \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existiert* $(x^\star, y^\star) \in A$ *mit*

$$\int_A f\, d\lambda^2 = f(x^\star, y^\star)\, F(A).$$

Beweis. Nach (14.10) und (23.37) ist $f(A)$ kompakt und zusammenhängend, weshalb $f(A) = [m, M]$ ein kompaktes Intervall ist. Damit ist $m 1_A \le f \le M 1_A$ und die Monotonie des Integrals ergibt $m\, F(A) \le \int_A f\, d\lambda^2 \le M\, F(A)$. Sei $F(A) > 0$, sonst ist die Aussage trivial. Es folgt

$$m \le \underbrace{\frac{1}{F(A)} \int_A f\, d\lambda^2}_{\text{Integralmittel } \in [m,M] = f(A)} \le M$$

und somit die Existenz von $(x^\star, y^\star) \in A$, wofür $f(x^\star, y^\star)$ gleich dem Integralmittel ist. □

Für viele Anwendungen genügt es, spezielle $A \in \mathcal{B}^2$ zu betrachten.

(4) Regulärer Bereich. Sei w eine einfach geschlossene stückweise reguläre Kuve im $\mathbb{R}^2$. Dann bezeichne $W \subset \mathbb{R}^2$ die offene beschränkte Wegkomponente zu w, d.h. $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \nu(w, x + iy) = 1\}$, wobei ν die Windungszahl (24.13) ist. Sind nun $w_0, \cdots, w_n$ einfach geschlossene stückweise reguläre Kurven in $\mathbb{R}^2$ derart, dass $\overline{W_i} \subset W_0$ und $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} = \emptyset\ \forall\ 1 \le i, j \le n, i \ne j$, dann heißt $A := \overline{W_0} \setminus \bigcup_{i=1}^n W_i$ ein regulärer Bereich.

Vielfach lassen sich reguläre Bereiche in endlich viele sogenannte Normalbereiche durch Hinzu- oder Wegnehmen von Nullmengen (wie einzelne Punkte oder Schnittlinien (vgl. (2)) zerlegen.

(5) Normalbereich. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein Normalbereich vom Typ I, wenn es $u, o \in \mathcal{C}^1[a,b]$ gibt mit $u \le o$ und

$$A = \{(x,y) : a \le x \le b,\ u(x) \le y \le o(x)\}$$

und ein Normalbereich vom Typ II, wenn es $l, r \in \mathcal{C}^1[c,d]$ gibt mit $l \le r$ und

$$A = \{(x,y) : c \le y \le d,\ l(y) \le x \le r(y)\}.$$

(6) Integration über Normalbereiche. Sei $f \in \overline{\mathcal{L}^1}(A)$, wobei A ein Normalbereich vom Typ I ist. Dann folgt mit mit dem Satz von Fubini

$$\int_A f\, d\lambda^2 = \int \left(\int 1_A(x,y) f(x,y)\, d\lambda^1(y) \right) d\lambda^2(x) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[u(x),o(x)]} f(x,y)\, d\lambda^1(y) \right) d\lambda^1(x)$$

$$=: \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Letztere Schreibweise verwenden wir auch, wenn es sich bei den partiellen Funktionen nicht um Regelfunktionen handeln sollte. Entsprechend erhält man, falls A vom Typ II,

$$\int_A f d\lambda^2 = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Der Vorteil ist offensichtlich: Das Integral über eine Fläche wird auf zwei nacheinander auszuführende Integrationen über Intervalle zurückgeführt.

(7) Beispiele.

- Die Fläche einer Ellipse $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ ist vom Typ I, nämlich $A = \left\{(x,y) : -a \le x \le a,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}$. Dann ist der Flächeninhalt

$$F(A) = \pi ab.$$

  In der Tat ist $F(A) = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1dy \right) dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = 4ba\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)d\varphi = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\varphi))d\varphi = ab\pi$. Dabei wurde $t = \sin\varphi$ substituiert.

- Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ berandet von den Kurven $y = x$, $xy = 1$ und $y = 2$. Dann ist offenbar $A = \left\{(x,y) : 1 \le y \le 2, \frac{1}{y} \le x \le y\right\}$ vom Typ II. Demgemäß folgt für den Flächeninhalt

$$F(A) = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y} 1dx \right) dy = \int_1^2 (y - \frac{1}{y})dy = \frac{3}{2} - \ln(2).$$

  Das Volumen des auf $A \times \{0\}$ stehenden Zylinderabschnitts mit Deckfläche $z = \frac{y^2}{x^2}$ ist

$$V(Z) = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{y^2}{x^2}dx \right) dy = \int_1^2 y^2 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{y} \frac{1}{x^2}dx \right) dy = \int_1^2 y^2(y - \frac{1}{y})dy = \frac{9}{4}.$$

- Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ berandet von den vier Kreisen mit Radien 1 und Mittelpunkten $(\sqrt{2},0)$,$(0,\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,-\sqrt{2})$. Offenbar ist A kein Normalbereich. Aber A ist leicht in Normalbereiche zerlegbar, z.B. in die acht Teile, die durch Zerschneiden längs der Koordinatenachsen und den Winkelhalbierenden entstehen. Ein solcher Bereich hat die Fläche

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{2}-\sqrt{1-y^2}} 1dxdy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{2} - \sqrt{1-y^2} - y\right) dy = \frac{3}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-y^2}dy = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

  Das Ergebnis ist daher $F(A) = 4 - \pi$.

(8) Weitere Anwendungen. Sei $A \in \mathcal{B}^2$ beschränkt.

(a) **Masse, Ladung.** Ist $\mu \in \overline{\mathcal{L}^1}(A), \mu \geq 0$ die Massendichte der Platte A, dann ist $M = \int_A \mu \, d\lambda^2 = \int_A \mu(x,y) \, d\lambda^2(x,y) = \int\int_A \mu(x,y)dxdy$ die Gesamtmasse der Platte A. Analog ist $Q = \int q \, d\lambda^2$ die Gesamtladung der Platte A, wenn $q \in \overline{\mathcal{L}^1}(A)$ die Ladungsdichte auf der Platte bezeichnet.

(b) **Momente, Massenmittelpunkt.** Sei μ wie in (a) und $k \in \mathbb{N}_0$. Die zwei k–ten axialen Trägheitsmomente sind $M_{x,k} := \int\int_A x^k \mu(x,y)dxdy, \quad M_{y,k} := \int\int_A y^k \mu(x,y)dxdy$.. Das $k-$te polare Trägheitsmoment lautet $M_{0,k} := \int\int_A (x^2+y^2)^{\frac{k}{2}} \mu(x,y)dxdy$. Der Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt S hat die Koordinaten

$$x_S := \frac{1}{M}\int\int_A x \, \mu(x,y)dxdy, \; y_S := \frac{1}{M}\int\int_A y \, \mu(x,y)dxdy.$$

Den geometrischen Schwerpunkt erhält man im Fall $\mu = 1$.

Beispiel. Ist A ein Normalbereich vom Typ I, dann lauten

$$x_S = \frac{1}{F(A)}\int\int_A x dxdy = \frac{1}{F(A)}\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} x dy\right) dx = \frac{1}{F(A)}\int_a^b x(o(x)-u(x))dx,$$

$$y_s = \frac{1}{F(A)}\int\int_A y dxdy = \frac{1}{F(A)}\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} y dy\right) dx = \frac{1}{F(A)}\int_a^b \frac{1}{2}\left(o(x)^2 - u(x)^2\right) dx.$$

Speziell folgt für den Halbkreis mit Radius r, dass $x_S = 0$ wegen der Symmetrie bez. der y–Achse und $y_S = \frac{1}{\frac{r^2\pi}{2}}\int_{-r}^r \frac{1}{2}(r^2-x^2)dx = \frac{4r}{3\pi}$.

(9) Randintegral eines Vektorfeldes. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich gemäß (4). Der Rand ∂A besteht aus den geschlossenen stückweise regulären Kurven $w_0, w_1, \cdots, w_n$. Ihre Parametrisierung sei so, dass A stets links zur Laufrichtung liegt. Ein solcher **positiver Umlauf** liegt vor, wenn es zum Tangentialvektor $w_i'(t_0) = (\alpha, \beta)$ an w_i an der Stelle $w_i(t_0)$ (dieser Tangentialvektor existiert nicht an höchstens endlich vielen Stellen), ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $\tau(-\beta,\alpha) + w_i(t_0) \in A \backslash \partial A \; \forall \; 0 < \tau \leq \delta$. Sind $D \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial A \subset D$ und $F : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, dann heißt

$$\int_{\partial A} F \cdot dw := \sum_{i=0}^{n} \int_{w_i} F \cdot dw$$

das Integral von F längs ∂A. Zur Erinnerung sei $\int_w F \cdot dw = \int_a^b < F(w(t)), \dot{w}(t) > dt$ angegeben, vergleiche (21.4). Ist w stückweise regulär, dann ist $\int_w F \cdot dw = \int_w F_{\|} \|dw\|$.

(10) Satz von Green. *Sei A ein regulärer Bereich und ∂A werde im positiven Sinne durchlaufen, siehe (9). Weiter seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $A \subset D$ und $F : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} F \cdot dw = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y)\right) dxdy.$$

Beweis. Die Existenz der Integrale ist klar. Zunächst wird der Fall einer einzigen geschlossenen stückweise regulären Randkurve w betrachtet. Einschlüsse können anschließend leicht behandelt werden. Wir beginnen mit zwei Spezialfällen.

(i) Sei $F_2 = 0$ und $A = \{(x, y) : a \le x \le b, u(x) \le y \le o(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ I. Dann besteht ∂A aus den Kurvenstücken

$$w_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2, w_1(x) = (x, u(x)), \quad w_2 : [u(b), o(b)] \to \mathbb{R}^2, w_2(y) = (b, y)$$

und den entgegengesetzt zu durchlaufenden Kurvenstücken

$$w_3^\star : [a, b] \to \mathbb{R}^2, w_3^\star = (x, o(x)), \quad w_4^\star : [u(a), o(a)], w_4^\star = (a, y).$$

Wegen $F_2 = 0$ und $\dot{w}_{2,1} = 0$, $\dot{w}_{4,1} = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} F \cdot dw \quad &= \quad \sum_{i=1}^{4} \int_{w_i} F_1 dx = \int_a^b F_1(x, u(x))dx + 0 - \int_a^b F_1(x, o(x))dx - 0 \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \quad -\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y)dy \right) dx = \int\int_A \left(-\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \right) dxdy.
\end{aligned}$$

Ist $F_1 = 0$ und A ein Normalbereich vom Typ II, so folgt mit einer analogen Rechnung

$$\int_{\partial A} F \cdot dw = \int\int_A \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)dxdy.$$

Ein allgemeines Vektorfeld F läßt sich als $F = G + H$ mit $G := (F_1, 0)$ und $H := (0, F_2)$ schreiben. Damit sind $\int_{\partial A} F \cdot dv = \int_{\partial A} G \cdot dw + \int_{\partial A} H \cdot dw$ und $\int\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \right) dxdy = \int\int_A \frac{\partial}{\partial x} H_2(x, y)dxdy + \int\int_A \left(-\frac{\partial}{\partial y} G_1(x, y) \right) dxdy$. Falls nun A gleichzeitig vom Typ I und Typ II ist, dann folgt aus den obigen Spezialfällen $\int_{\partial A} G \cdot dw = \int\int_A \left(-\frac{\partial}{\partial y} G_1(x, y) \right) dxdy$, $\int_{\partial A} H \cdot dw = \int\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} H_2(x, y) \right) dxdy$, weshalb für ein solches A der Greensche Satz gilt. Dieses Ergebnis wird im Folgenden lediglich für den Fall benötigt, dass A ein Dreieck ist.

(ii) Sei nun A ein Polygon mit $N > 3$ Ecken. Man verbinde eine Ecke E durch ein im Inneren von A verlaufendes Geradenstück mit einer anderen Ecke. Wenn das nicht möglich ist, dann verläuft das die zwei benachbarten Ecken von E verbindende Geradenstück im Inneren von A. Es entstehen zwei Polygone mit höchstens $N-1$ Ecken. Gilt für diese der Greensche Satz, dann auch für A, indem man die Formeln addiert, weil die innere Linie in beiden Richtungen durchlaufen wird und eine Menge vom Maß Null ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Schritts reduziert man die Anzahl der Ecken auf 3. Für ein Dreieck gilt der Greensche Satz nach (i), weil es ggf. in zwei Dreiecke zerlegbar ist, die sowohl vom Typ I wie vom Typ II sind.

(iii) Zum Beweis des allgemeinen Falls ohne Einschlüsse ersetzt man den Rand von A durch n Sehnenstücke wie in (16.11). Bei genügender Feinheit δ der Zerlegung entsteht ein Polygon $A_\delta \subset D$. Nach (ii) gilt hierfür der Greensche Satz

$$\int_{\partial A_\delta} F \cdot dw_\delta = \int\int_{A\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \right) dxdy.$$

Der Grenzübergang $\delta \to 0$ liefert $\int_{\partial A_\delta} F \cdot dw_\delta = \int_{\partial A_\delta} F_\| \|w_\delta\| \to \int_{\partial A} F_\| \|w\| = \int_{\partial A} F \cdot dw$, was man aufgrund der Stetigkeit und Beschränktheit von $F_\|$ mit einem Beweis wie zur Rektifizierbarkeit (16.16) zeigt. Zur Behandlung des Flächenintegrals parametrisiere man die Randkurve w von

A durch die Bogenlänge. Sei L die Gesamtlänge und $\delta := \frac{L}{n}$. Für die äquidistante Zerlegung von $[0, L]$ gilt Spur $w \subset V_\delta := \bigcup_{i=0}^{n-1} U_\delta(w(s_i))$, weil die Gerade gemäß (16.14)(a) die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Daher ist $A \subset A_\delta \cup V_\delta$ und $A_\delta \subset A \cup V_\delta$ mit

$$\lambda^2(V_\delta) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^2\left(U_\delta(w(s_i))\right) = n\delta^2\pi = \frac{L^2}{n}\pi \to 0$$

und folglich $\int |1_A - 1_{A_\delta}| d\lambda^2 = \lambda^2(A \triangle A_\delta) \to 0$ für $n \to \infty$. Weil der Integrand stetig und beschränkt ist, folgt

$$\int\int_{A_\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1\right) dx dy \to \int\int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1\right) dx dy.$$

(iv) Nun wird der allgemeine Fall bewiesen. Wegen Kompaktheit wird der Abstand der äußeren Randkurve w_0 zu den inneren Randkurven w_i angenommen. Verbinde zwei Punkte minimalen Abstands mit einem Geradenstück G. Es verläuft im Inneren von A. Schneide A längs G auf. Es entsteht ein regulärer Bereich A' mit einem Einschluss weniger. Hierfür gelte nach Induktionsvoraussetzung der Greensche Satz. Genauer ist G durch ein paralleles Geradenpaar G_1, G_2 zu ersetzen, dessen Abstand gegen Null geht. Dann heben sich die Beiträge längs G_1 und G_2 auf, da G_1 und G_2 in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Es folgt der Greensche Satz für A.

Bemerkung. Setzt man voraus, dass das Innere des von der äußeren Randkurve eingeschlossenen Gebiets ganz zu D gehört, folgt der Fall mit Einschlüssen durch Substraktion der Formeln ohne Einschluss. □

Wichtige spezielle Formeln folgen aus dem Satz von Green.

(11) Beispiele. *Sei A ein regulärer Bereich.*

(a) *Mit den Vektorfeldern $F(x, y) = (0, x)$ und $F(x, y) = (-y, 0)$ folgt für den Flächeninhalt die* **Leibniz Sektorformel**

$$F(A) = \iint_A dx dy = \int_{\partial A} x dy = -\int_{\partial A} y dx = \frac{1}{2}\int_{\partial A} -y dx + x dy.$$

(b) *Mit $F(x, y) = (-x^2 y, 0)$ und $F(x, y) = (0, \frac{1}{3}x^3)$ folgen für das zweite Moment zu $\mu = 1$ die Gleichheiten $M_{x,2} = -\int_{\partial A} x^2 y dx = \frac{1}{3}\int_{\partial A} x^3 dy$. Analog erhält man $M_{y,2} = \int_{\partial A} xy^2 dy = -\frac{1}{3}\int_{\partial A} y^3 dx$.*

(c) *Mit $F = (0, \frac{1}{2}x^2)$ und $F = (-xy, 0)$ folgt $x_S = \frac{1}{2F(A)}\int_{\partial A} x^2 dy = -\frac{1}{F(A)}\int_{\partial A} xy\, dx$. Analog erhält man $y_S = \frac{1}{F(A)}\int_{\partial A} xy\, dy = -\frac{1}{2F(A)}\int y^2 dy$.*

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige: Der geometrische Schwerpunkt des Bereiches A, der von der Zykloide $w_1(t) = a(2\pi - t + \sin(t), 1 - \cos(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ und der Strecke $w_2(t) = (t, 0),\ 0 \leq t \leq 2\pi a$ begrenzt wird, hat die Koordinaten

$$x_S = \pi a \text{ und } y_S = -\frac{\frac{1}{2}\int_{\partial A} y^2 dx}{\int_{\partial A} y dx} = \frac{\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos(t))^3 dt + 0}{a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos(t))^2 dt + 0} = \frac{5}{6}a.$$

(12) Ebener Satz von Gauß. *Seien* A *ein regulärer Bereich,* $D \subset \mathbb{R}^2$ *offen mit* $D \supset A$ *und* $u : D \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\iint_A \triangle u \, dx dy = \int_{\partial A} \left(-\frac{\partial}{\partial y} u \, dx + \frac{\partial}{\partial x} u \, dy \right) = \int_{\partial A} \langle \operatorname{grad} u, \mathbf{n} \rangle \; ds = \int_{\partial A} \partial_{\mathbf{n}} u \, ds$$

bei Parametrisierung der Randkurve mittels der Bogenlänge s*. (Der Normalenvektor* $\mathbf{n}(s) = (\dot{w}_2(s), -\dot{w}_1(s))$ *hat Länge* 1 *und weist nach außen.) Für eine harmonische Funktion* u *ist wegen* $\triangle u = 0$ *das Integralmittel über die Normalableitung* $\partial_{\mathbf{n}} u$ *längs* ∂A *stets Null.*

Beweis. Man wende den Satz von Green auf das Vektorfeld $F := (-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x})$ an. □

29 Substitutionsformel für das mehrdimensionale Lebesgue Maß

Die bekannte Substitutionsregel $\int_a^b f(g(t))\,g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$ (siehe (9.26), (26.34) und (26.36)(b)) besitzt eine Verallgemeinerung im Mehrdimensionalen. Als Spezialfall erhält man daraus (26.36)(a) für lineare Transformationen.

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Abbildung $T : U \to V$ heißt $\mathcal{C}^1$**–Diffeomorphismus**, wenn T bijektiv ist und T und T^{-1} stetig differenzierbar sind. Nach dem Satz von der lokalen Inversen (19.6) ist $T : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus genau dann, wenn T bijektiv und stetig differenzierbar ist und die totale Ableitung $DT(a)$ invertierbar ist an allen Stellen $a \in U$. Bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^d$ wird $DT(a)$ durch die Jacobi Matrix $J_T(a)$ dargestellt. Für die totale Ableitung der Umkehrabbildung T^{-1} gelten die Beziehungen $DT^{-1}(x) = \left(DT(T^{-1}(x))\right)^{-1}$ und $|\det DT^{-1}(x)| = \left|\det DT\left(T^{-1}(x)\right)\right|^{-1}$. Fortan wird T auch eine **Koordinatentransformation** genannt.

(1) Substitutionsformel. *Es gilt*

$$T\left(\lambda_U^d\right) = \left|\det DT^{-1}\right| \lambda_V^d ,$$

d.h. das Bildmaß des Lebesgue Maßes auf U *bez. der Koordinatentransformation* T *ist absolut stetig bez. des Lebesgue Maßes auf dem Bild* V *mit Radon–Nikodym Ableitung* $\frac{T(\lambda_U^d)}{d\lambda_V^d} = |\det DT^{-1}|$.

Bemerkung. Ausgeschrieben bedeutet die Substitutionsformel

$$\lambda^d\left(T^{-1}(A)\right) = \int_A \left|\det DT^{-1}\right| d\lambda^d$$

für alle $A \in \mathcal{B}^d$, $A \subset V$. Dies lässt sich auch so schreiben

$$\lambda_V^d = T\left(|\det DT|\,\lambda_U^d\right), \quad \lambda^d(A) = \int_{T^{-1}(A)} |\det DT|\, d\lambda^d.$$

Mit Hilfe der Sätze (26.31), (26.32) zur Integration bez. eines Bildmaßes bzw. eines Maßes mit Dichte folgt $f \in \overline{\mathcal{L}^1}(V) \Leftrightarrow |\det DT|\; f \circ T \in \overline{\mathcal{L}^1}(U)$ und

$$\boxed{\int_V f(y)d\lambda^d(y) = \int_U f(T(x))\,|\det DT(x)|\, d\lambda^d(x)}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(a) Behauptung: $I = [a, b[\in \mathcal{I}^d \backslash \emptyset,\ \bar{I} \subset U \Rightarrow \lambda^d(T(I)) \le \sup_{x\in I} |\det DT(x)|\ \lambda^d(I)$.

Beweis. Da $\lambda^d(I) > 0$ existiert $c \ge 0$ mit $\lambda^d(T(I)) = c\lambda^d(I)$. — Man zerlege $I^{(0)} := I$ durch Halbierung jeder Seite in 2^d Teilquader. Unter diesen muss es einen Teilquader $I^{(1)}$ geben, der $\lambda^d\left(T\left(I^{(1)}\right)\right) \geq c\lambda^d\left(I^{(1)}\right)$ erfüllt. Wiederholt man diese Konstruktion für $I^{(1)}$ anstelle von $I^{(0)}$ und so fort, erhält man eine Folge $\left(I^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $I^{(k+1)} \subset I^{(k)}$ und

$$\lambda^d\left(T\left(I^{(k)}\right)\right) \geq c\lambda^d\left(I^{(k)}\right). \tag{$\star$}$$

Da $\overline{I^{(k)}}$ kompakt ist und die Seitenlänge von $\overline{I^{(k)}}$ gegen Null geht, existiert $z_0 \in \bar{I}$ mit

$$\bigcap_k \overline{I^{(k)}} = \{z_0\}.$$

Sei $\epsilon > 0$. Bezeichne $x^{(k)}$ den Mittelpunkt von $I^{(k)}$. Nun wird $I^{(k)}$ zu $I_\epsilon^{(k)} := (1+\epsilon)\left(I^{(k)} - x^{(k)}\right) + x^{(k)}$ aufgebläht. Es genügt

$$T\left(I^{(k)}\right) \subset T(z_0) + DT(z_0)\left(I_\epsilon^{(k)} - z_0\right) \tag{$\star\star$}$$

für ein k zu zeigen, denn mit $(\star)$ und wegen der Eigenschaften (25.27), (25.31) des Lebesgue Maßes ergibt sich daraus $c\lambda^d\left(I^{(k)}\right) \leq \lambda^d\left(T\left(I^{(k)}\right)\right) \leq |\det DT(z_0)|\,\lambda^d\left(I_\epsilon^{(k)}\right) = (1+\epsilon)^d|\det DT(z_0)|\lambda^d\left(I^{(k)}\right)$, weshalb $c \leq (1+\epsilon)^d|\det DT(z_0)|\ \forall\ \epsilon > 0$, woraus (a) folgt.

Es bleibt also $(\star\star)$ zu zeigen. Sei d_k der Durchmesser und ν das von k unabhängige Verhältnis der Länge der kürzesten Seite zum Durchmesser von $I^{(k)}$. Offenbar ist $I^{(k)} + \frac{1}{2}\epsilon\nu d_k \tilde{U}_1(0) \subset I_\epsilon^{(k)}$. Sei $\eta > 0$ so klein, dass $\frac{\eta}{\nu}DT(z_0)^{-1}(\tilde{U}_1(0)) \subset \tilde{U}_1(0)$. Es folgt

$$I^{(k)} + \frac{1}{2}\epsilon d_k\eta\ DT(z_0)^{-1}\left(\tilde{U}_1(0)\right) \subset I_\epsilon^{(k)}.$$

Weil T an der Stelle z_0 differenzierbar ist, existiert $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T(x) - T(z_0) - DT(z_0)(x - z_0)\| \leq \frac{1}{2}\epsilon\eta\,\|x - z_0\| \leq \frac{1}{2}\epsilon\eta d_k\ \ \forall\ x \in I^{(k)}.$$

Daraus folgt für alle $x \in I^{(k)}$, dass $T(x) \in T(z_0)+DT(z_0)(x-z_0)+\frac{1}{2}\epsilon\eta d_k\,\tilde{U}_1(0)$, was enthalten ist in $T(z_0)+DT(z_0)\left(I^{(k)} + \frac{1}{2}\epsilon d_k\eta\ DT(z_0)^{-1}(\tilde{U}_1(0)) - z_0\right) \subset T(z_0)+DT(z_0)\left(I_\epsilon^{(k)} - z_0\right)$.

(b) Behauptung: $I \in \mathcal{I}^d \setminus \emptyset$, $\bar{I} \subset U \Rightarrow \lambda^d(I) \geq \int_I |\det DT|^{-1} dT^{-1}\left(\lambda_V^d\right)$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Man zerlege I durch k-fache Halbierung jeder Seite in disjunkte Teilquader $I_{kj} \in \mathcal{I}^d, 1 \leq j \leq \left(2^d\right)^k$. Für die Elementarfunktion

$$u_k := \sum_{j=1}^{2^{kd}} \mu_{kj} 1_{I_{kj}} \quad \text{mit} \quad \mu_{kj} := \left(\sup_{\xi\in I_{kj}} |\det DT(\xi)|\right)^{-1}$$

gilt $\int_I u_k dT^{-1}\left(\lambda_V^d\right) = \sum_j \mu_{kj}\lambda^d\left(T\left(I_{kj}\right)\right) \overset{(a)}{\leq} \sum_j \lambda^d\left(I_{kj}\right) = \lambda^d(I)$. Weil $|\det DT(\cdot)|^{-1}$ stetig ist, konvergiert $(u_k)_k$ punktweise auf I gegen $|\det DT(\cdot)|^{-1}$. Außerdem ist $|u_k| \leq \mu 1_I$ mit $\mu := \left(\inf_{\xi\in I}|\det DT(\xi)|\right)^{-1}$ eine integrierbare Majorante, weil $\mu < \infty$ ist aufgrund der Stetigkeit von $|\det DT(\cdot)| > 0$ auf dem Kompaktum $\bar{I}$. Mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz folgt daraus die Behauptung.

(c) Behauptung: $\lambda^d(A) \geq \int_A |\det DT|^{-1} dT^{-1}\left(\lambda_V^d\right) \;\; \forall\, A \in \mathcal{B}^d, A \subset U$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition des LB-Maßes (25.19) existieren $I_n \in \mathcal{I}^d$ mit $\bigcup_n I_n \supset A$ und $\lambda^d(A) \geq \sum_n \lambda^d(I_n) - \epsilon$. Man nehme zunächst an, dass $\overline{I_n} \subset U \; \forall\, n$. Dann folgt

$$\epsilon + \lambda^d(A) \geq \sum_n \lambda^d(I_n) \overset{(b)}{\geq} \sum_n \int_{I_n} |\det DT|^{-1} dT^{-1}\left(\lambda_V^d\right) = \sum_n \nu(I_n),$$

wobei ν das Maß $|\det DT|^{-1} T^{-1}(\lambda_V^d)$ bezeichnet. Hierfür gilt die σ–Subadditivität $\nu(A) \leq \sum_n \nu(I_n)$, siehe (25.21). Also ist $\epsilon + \lambda^d(A) \geq \nu(A) \;\forall\, \epsilon > 0$ und somit $\lambda^d(A) \geq \nu(A)$.

Weil U offen ist, ist U die Vereinigung von abzählbar vielen Quadern $Q_m \in \mathcal{J}^n$ mit $\overline{Q_m} \subset U$. Für jedes n sei $H_m := I_n \cap Q_m$. Damit ist $I_n \cap U = \bigcup_m H_m = \bigcup_m H'_m$ mit $H'_1 := H_1$, $H'_m := H_m \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_{m-1})$. Die Figuren $H'_m \in \mathcal{F}^d$ sind paarweise disjunkt mit $\overline{H'_m} \subset U$ und nach (25.3)(γ) Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten $J \in \mathcal{I}^d$. Es folgt, dass $I_n \cap U$ die Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten Quadern J mit $\overline{J} \subset U$ ist, weshalb die Behauptung allgemein gilt.

(d) Nun erfolgt der Beweis der Substitutionsformel. Nach (c) ist $\lambda_U^d \geq |\det DT|^{-1} T^{-1}(\lambda_V^d)$. Diese Formel bedeutet für T^{-1} anstelle von T, dass $\lambda_V^d \geq \left|\det DT^{-1}\right|^{-1} T\left(\lambda_U^d\right)$. Aus der Definition des Maßes mit Dichte (26.32) folgt $\left|\det DT^{-1}\right| \lambda_V^d \geq T\left(\lambda_U^d\right)$ und aus der Definition des Bildmaßes (25.26), (26.31) folgt $\lambda_U^d \leq T^{-1}\left(\left|\det DT^{-1}\right| \lambda_V^d\right) = \left|\left(\det DT^{-1}\right) \circ T\right| T^{-1}\left(\lambda_V^d\right) = |\det DT|^{-1} T^{-1}\left(\lambda_V^d\right)$. Also gilt die Gleichheit überall, insbesondere $T\left(\lambda_U^d\right) = \left|\det DT^{-1}\right| \lambda_V^d$.

$\square$

Die Polarkoordinaten in der Ebene und die Kugelkoordinaten im Raum wurden schon in (17.23) und (19.7) eingeführt.

(2) Polarkoordinaten in der Ebene. Nach (19.7)(a) ist $T:]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$, $T(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus. Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar und setze $\tilde{f}(r,\varphi) := r\, f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(]0,\infty[\times]0,2\pi[)$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,r\,dr\,d\varphi.$$

Die Integrationsreihenfolgen dürfen vertauscht werden.

Beweis. Es ist $J_T(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ und $\det J_T(r,\varphi) = r$. Gemäß (1) sei $U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[$, $V := T(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$. Da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ eine λ^2–Nullmenge ist, gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow f1_V \in \mathcal{L}^1(V)$, sowie $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 = \int_V f d\lambda^2$. Damit folgt die Behauptung aus (1). $\square$

Beispiel. Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, d.h. $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ mit einer Funktion $g: [0,\infty[\to \mathbb{R}$. Mit T aus (2) ist $(f \circ T)(r,\varphi) = g(r)$. Ist g integrierbar bez. $\lambda^1_{[0,\infty[}$, dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} g(r)\,r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^{\infty} g(r)\,r\,dr.$$

Man bearbeite explizite Beispiele als Übung. Für $g := 1_{[0,R]}$ ergibt sich Fläche der Kreisscheibe mit Radius R. Mit $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ und $g(r) = e^{r^2}$ läßt sich bekanntlich mit Hilfe obiger Formel das Gauß Integral berechnen.

(3) Kugelkoordinaten im Raum. Die Abbildung $T: U \to V$ mit $U :=]0,\infty[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ und $T(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$ ist ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar und setze $\tilde{f}(r,\vartheta,\varphi) := r^2 \sin\vartheta\, f(T(r,\vartheta,\varphi))$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(U)$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(T(r,\vartheta,\varphi))r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Die Integrationsreihenfolgen dürfen vertauscht werden.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von (2), weil $\mathbb{R}^3 \backslash V$ eine λ^3–Nullmenge ist. In diesem Fall ist

$$J_T(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det J_T(r,\vartheta,\varphi) = r^2\sin\vartheta.$$

□

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, d.h. $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ mit einer Funktion $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$. Mit T aus (3) ist $(f \circ T)(r,\vartheta,\varphi) = g(r)$. Ist g integrierbar bez. $\lambda^1_{[0,\infty[}$, dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda^3 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} g(r)r^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} g(r)r^2 dr = 4\pi\int_0^{\infty} g(r)r^2 dr.$$

Als explizite Beispiele berechne man

- das Volumen der Kugel mit Radius R, indem man $g = 1_{[0,R]}$ integriert.
- das Gravitationspotenzial $u(x_0)$ der Kugel um 0 mit Radius R bez. der rotationssymmetrischen Dichte ρ im Punkt $x_0 \notin \tilde{U}_R(0)$

  $$u(x_0) = \gamma \int_{\tilde{U}_R(0)} \frac{\rho(\|x\|_2)}{\|x - x_0\|_2} d\lambda^3(x) = \frac{\gamma M}{\|x_0\|_2},$$

  wobei $M := 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2 dr$ die Gesamtmasse der Kugel ist.

Wiederholung Substitutionsformel

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T : U \to V$ eine Koordinatentransformation (d.h. T bijektiv und T, T^{-1} stetig differenzierbar). Dann gilt $\forall f \in \overline{\mathcal{L}^1}(U)$:

$$\int_V f(y)d\lambda^d(y) = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|d\lambda^d(x)$$

---

30 Integration über Flächen im Raum

In diesem Kapitel behandeln wir vornehmlich reguläre Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$. Hierfür werden die Oberflächenintegrale von Skalar- und Vektorfeldern, sowie das Randintegral von Vektorfeldern eingeführt und der Satz von Stokes bewiesen. Ein kurzer Abschnitt widmet sich allgemeinen k–dimensionalen Flächenstücken im $\mathbb{R}^d$.

(1) Reguläres Flächenstück. Seien $A \subset \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich (28.4) und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $A \subset U$. Dann heißt $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit den Komponenten $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ eine Parameterdarstellung des regulären Flächenstücks

$$S := \mathbf{x}(A) = \left\{\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3 : (u, v) \in A\right\} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in A\},$$

wenn

(i) $\mathbf{x}|A$ injektiv ist und

(ii) die partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}$ und $\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}$ in allen Punkten von A linear unabhängig sind.

(2) Bezeichnungen und Eigenschaften. Die Variablen (u, v) heißen die **Parameter** der Darstellung. Die Zuordnung $A \to S, (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ ist bijektiv, d.h. jeder Flächenpunkt ist durch seine Parameterwerte eindeutig bezeichnet.

Im Folgenden werde die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}$ und $\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ bezeichnet:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \begin{pmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \\ z_u(u, v) \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_v(u, v) = \begin{pmatrix} x_v(u, v) \\ y_v(u, v) \\ z_v(u, v) \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung sind sie an jeder Stelle $(u, v) \in A$ linear unabhängig. Das bedeutet, dass an jeder Stelle $(u, v) \in A$ die Jacobi Matrix $J_{\mathbf{x}}(u, v) = (\mathbf{x}_u(u, v) \ \mathbf{x}_v(u, v))$ vollen Rang hat oder gleichwertig, dass $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0$ ist. Geometrisch bedeutet diese Voraussetzung, dass die Fläche S an keinem Punkt zu einer Kurve entartet ist. In jedem Punkt $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ von S existiert daher die **Tangentialebene** an S. Ihre Parameterdarstellung lautet

$$(\lambda, \mu) \mapsto \mathbf{x}(u_0, v_0) + \lambda \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

Senkrecht auf der Tangentialebene an S im Punkt $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ steht die **Flächennormale**

$$\mathbf{n} := \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|_2} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v.$$

Zu einer Kurve $[a, b] \ni t \mapsto (u(t), v(t)) \in A$ im Parameterbreich gehört die **Flächenkurve**

$$[a, b] \ni t \mapsto \mathbf{w}(t) := \mathbf{x}(u(t), v(t)),$$

deren Spur im Flächenstück S liegt. Speziell sind die **Parameterlinien** $u \longmapsto \mathbf{x}(u,v)$ (bei konstantem v) und $v \longmapsto \mathbf{x}(u,v)$ (bei konstantem u) Scharen von Flächenkurven auf S.

Der **Tangentialvektor** an die Flächenkurve $\mathbf{w}$ in t lautet $\dot{\mathbf{w}}(t) = \dot{u}(t)\mathbf{x}_u(u(t),v(t)) + \dot{v}(t)\mathbf{x}_v(u(t),v(t))$. Er liegt offenbar in der oben definierten Tangentialebene an S im Punkt $\mathbf{x}(u(t),v(t))$. Im Folgenden wird oft kurz

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{u}\mathbf{x}_u + \dot{v}\mathbf{x}_v$$

geschrieben, wobei die $t-$ und $u,v-$Abhängigkeit unterdrückt wird. Außerdem schreibt man allgemein $|\mathbf{a}|$ für die Länge $\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ für das euklidische Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ in $\mathbb{R}^3$. Damit ist $\dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}} = (\dot{u}\mathbf{x}_u + \dot{v}\mathbf{x}_v)(\dot{u}\mathbf{x}_u + \dot{v}\mathbf{x}_v) = \underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)}_{=:E}\dot{u}^2 + 2\underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)}_{=:F}\dot{u}\dot{v} + \underbrace{(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)}_{=:G}\dot{v}^2$, weshalb

$$|\dot{\mathbf{w}}|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2.$$

Die Funktionen E, F, G heißen die **metrischen Fundamentalgrößen** des Flächenstücks. Z. B. ist die Bogenlänge gleich $l(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{w}}(t')|dt' = \int_a^t \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}dt'$. Wenn in jedem Punkt $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, d.h. $F = 0$ gilt, dann heißt die Parametrisierung **orthogonal**. Die Parameterlinien kreuzen sich in diesem Fall überall senkrecht.

Besonders interessant wird im Folgenden die Größe

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

(weil $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$) sein. Wegen $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |\mathbf{x}_u||\mathbf{x}_v| \sin\angle(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$ ist diese die Fläche des von $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ aufgespannten Parallelogramms. Daher heißt

$$dO(u,v) := |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| d\lambda^2(u,v)$$

das (Ober–)**Flächenelement** von S und

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \lambda_A^2$$

das **Flächenmaß**. Letzteres ist ein Maß mit Dichte bezüglich des Lebesgue Maßes auf A.

Der **Rand** eines regulären Flächenstücks ist definitionsgemäß $\text{Rand}(S) := \mathbf{x}(\partial A)$. Doch Vorsicht, dieser ist nicht der Rand ∂S der Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, der gleich ganz S ist. Deshalb ist eine unterschiedliche Bezeichnung nötig.

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$, die aus mehreren regulären Flächenstücken $S_1, S_2, \cdots, S_r$ zusammengesetzt ist, von denen je zwei längs gemeinsamer Randstücke zusammenhängen, sonst aber keine weiteren gemeinsamen Punkte haben, nennt man ein **stückweise reguläres** Flächenstück. Dafür definiert man allgemeiner $\text{Rand}(S)$ als die Vereinigung alle Randstücke, die nur einem der Flächenstücke $S_1, \cdots, S_r$ angehören. Das Flächenstück S heißt **geschlossen**, wenn $\text{Rand}(S) = \emptyset$. Typischerweise sind die Oberflächen von Körpern geschlossene stückweise reguläre Flächenstücke.

(3) Beispiele für Flächenstücke.

(a) **Graphen.** *Seien* A, U *wie in* (1) *und* $f : U \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar. Setze* $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(x,y) := (x,y,f(x,y))$. *Dann ist* $\mathbf{x}$ *eine Parametrisierung mit Parametern* x, y *des regulären Flächenstücks* $S := \mathbf{x}(A) = \text{Graph}(f|A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, z = f(x,y)\}$.

Beweis. Es ist $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{x}$ ist injektiv, denn: $(x, y, f(x, y)) = (x', y', f(x', y')) \Rightarrow x = x', y = y' \Rightarrow f(x, y) = f(x', y')$. Schließlich sind die partiellen Ableitungen linear unabhängig, weil

$$\mathbf{x}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \mathbf{x}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}, \mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

wobei $f_x := \frac{\partial}{\partial x} f,\ f_y := \frac{\partial}{\partial y} f$. □

Für die Fundamentalgrößen erhält man $E = 1 + f_x^2,\ F = f_x f_y,\ G = 1 + f_y^2$. Die Parameterlinien sind die Schnitte mit den Ebenen $\{(x, y, z) : x \text{ konstant}\}$ bzw. $\{(x, y, z) : y \text{ konstant}\}$. Das Flächenmaß lautet $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \lambda_A^2$.

(b) **Niveaumengen.** *Seien $W \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ offen und $F : W \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter sei $(x_0, y_0, z_0) \in W$ mit $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ und $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (wobei $F_z = \frac{\partial}{\partial z} F$).*

Nach dem Satz über implizite Funktionen (19.11) existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$ und $Z \subset \mathbb{R}$ derart, dass $(x_0, y_0, z_0) \in U \times Z \subset W$ und genau eine Funktion $f : U \to Z$ mit $F(x, y, f(x, y)) = 0\ \forall\ (x, y) \in U$. Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \frac{-1}{F_z(x, y, f(x, y))} (F_x(x, y, f(x, y)), F_y(x, y, f(x, y))).$$

Sei nun $A \subset U$ ein regulärer Bereich. Nach (a) *ist dann*

$$S := \operatorname{Graph}(f|A) \subset \{(x, y, z) \in W : F(x, y, z) = 0\} = F^{-1}(\{0\}) = N_{F,0}$$

ein reguläres Flächenstück mit Fundamentalgrößen und Flächenmaß

$$E = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2,\ F = \frac{F_x F_y}{F_z^2},\ G = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2,\ \sqrt{1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2}\, \lambda_A^2.$$

Als konkretes Beispiel dazu betrachte man $W = \mathbb{R}^3$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ und $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$. Offenbar ist $N_{F,0}$ die Einheitssphäre.

Dann sind $F_x(x, y, z) = 2x,\ F_y(x, y, z) = 2y,\ F_z(x, y, z) = 2z$ und $F(0, 0, 1) = 0, F_z(0, 0, 1) = 2 \neq 0$. Die Auflösung von $F(x, y, z) = 0$ nach z ergibt

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Für $f : U \to Z,\ f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, mit $U := \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z :=]0, \infty[$ gilt somit $(0, 0, 1) \in U \times Z$ und $\operatorname{Graph}(f) \subset N_{F,0}$. Außerdem sind $E(x, y) = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2}$, $F(x, y) = 1 + \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}$, $G(x, y) = 1 + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}$ die Fundamentalgrößen und $dO(x, y) = \left(1 - x^2 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\, d\lambda^2(x, y)$ das Oberflächenelement.

(c) **Drehflächen**. Eine reguläre Kurve $[a, b] \ni t \mapsto (x(t), 0, z(t)) \in \mathbb{R}^3$ ohne Doppelpunkte und mit $x(t) > 0\ \forall\ t \in [a, b]$ wird um die z–Achse um den Winkel $\varphi_0 \in]0, 2\pi[$ gedreht. Es entsteht ein reguläres Flächenstück $S = \mathbf{x}(A)$ mit Parametrisierung $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$, wobei $U :=]a, b[\times]\varphi_1 - 2\pi, \varphi_1[$ für ein $\varphi_1 \in]\varphi_0, 2\pi[$ und

$$\mathbf{x}(t, \varphi) := \left[\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}\right]^T = (x(t)\cos(\varphi), x(t)\sin(\varphi), z(t)).$$

Der reguläre Bereich $A \subset U$ ist dabei $[t_0, t_1] \times [0, \varphi_0]$ mit $a < t_0 < t_1 < b$.

Die Parameterlinien für konstantes t heißen **Breitenkreise** und für konstantes φ **Meridiane**. Man berechnet für die partiellen Ableitungen

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos(\varphi) \\ \dot{x}\sin(\varphi) \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -x\sin(\varphi) \\ x\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{x}_\varphi = 0, \ \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\varphi = x \begin{pmatrix} -\dot{z}\cos\varphi \\ -\dot{z}\sin\varphi \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Daher sind $E = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$, $F = 0$ und $G = x^2$. Es handelt sich um eine orthogonale Parametrisierung, weil $F = 0$. Für das Oberflächenelement erhält man

$$dO(t, \varphi) = x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\, d\lambda^2(t, \varphi).$$

Man beachte, dass $x > 0$.

Bei der vollen Umdrehung, d.h. $\varphi_0 = 2\pi$, sind die Breitenkreise geschlossen und daher ist die Drehfläche S nur noch stückweise regulär, etwa $S = S_1 \cup S_2$ mit S_1 zu $0 \le \varphi \le \pi$ und S_2 zu $\pi \le \varphi \le 2\pi$. Es ist dann

$$\text{Rand}(S_1) = \{(x(t), 0, z(t)) : t_0 \le t \le t_1\} \cup \{(-x(t), 0, z(t)) : t_0 \le t \le t_1\} \cup$$

$$\{(x(t_0)\cos\varphi, x(t_0)\sin(\varphi), z(t_0)) : 0 \le \varphi \le \pi\} \cup \{(x(t_1)\cos\varphi, x(t_1)\sin(\varphi), z(t_1)) : 0 \le \varphi \le \pi\}$$

und $\text{Rand}(S_2)$ entsprechend. — Bekannte Drehflächen sind etwa die Sphäre, der Torus, der Zylinderstumpf und der Kegelstumpf.

(4) Flächeninhalt. Der Flächeninhalt eines reguären Flächenstückes S ist definitionsgemäß

$$O(S) := \int_S dO = \int_A |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\, d^2\lambda = \iint |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)|\, du dv.$$

Ist $S = S_1 \cup \ldots \cup S_r$ stückweise regulär, dann ist $O(S) := O(S_1) + \ldots + O(S_r)$ sein Flächeninhalt. Offenbar kommt es nicht auf die spezielle Zerlegung in reguläre Flächenstücke an.

(5) Fast überall Parametrisierung. *Sei* S *stückweise regulär. Seien dazu* $A \subset \mathbb{R}^2$ *ein regulärer Bereich* (28.4), $U \subset \mathbb{R}^2$ *offen mit* $A \subset U$ *und* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$. Wir nennen $\mathbf{x}$ eine fast überall Parametrisierung von S, wenn $S = \mathbf{x}(A)$ und eine λ^2–Nullmenge N existiert derart, dass $\mathbf{x}|(A \setminus N)$ injektiv ist und die partiellen Ableitung $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ in allen Punkten von $A \setminus N$ linear unabhängig sind. *Im Falle einer fast überall Parametrisierung gilt für die Oberfläche von* S *weiterhin die Formel* $O(S) = \int_S dO = \int_A |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\, d^2\lambda$.

Beweis. Seien $V_n \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $V_n \downarrow N$ und $\lambda^2(V_n) \to 0$. Setze $A_n := A \setminus V_n$ und $S_n := \mathbf{x}(A_n)$. Dafür gilt $O(S_n) = \int_{A_n} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\, d^2\lambda \to \int_A |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\, d^2\lambda$. Man überlegt sich, dass auch $O(S_n) \to O(S)$ gilt, woraus die Behauptung folgt. □

(6) Beispiele. (a) Für einen Graphen S gemäß (3)(a) gilt

$$O(S) = \iint_A \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, dx dy.$$

(b) Für eine Drehfläche S gemäß (3)(c) gilt die erste **Regel von Guldin**

$$O(S) = \iint_A x(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt d\varphi = \varphi_0 \int_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt = \varphi_0 \int_{\mathbf{x}} x\, d|\mathbf{x}| = \varphi_0\, L\, x_S,$$

wobei L die Länge und $x_S := \frac{1}{L}\int_{\mathbf{x}} x\, d|\mathbf{x}|$ die x–Koordinate des Schwerpunkts des Kurvenstücks ist, das rotiert wird. Für die volle Drehfläche folgt

$$O(S) = 2\pi\, L\, x_S$$

nach (5) weil $S = S_1 \cup S_2$ nach (3)(c) stückweise reguär ist. Es folgen zwei konkrete Beispiele.

Sphäre. Die Sphäre S entsteht durch Drehung eines Halbkreises um die Achse, die den Kreis halbiert. In der Notation von (3)(c) ist $x(t) = R\sin t$, $z(t) = R\cos t$ für $t \in [0, \pi]$, wobei R der Radius des Kreises ist. Durch Drehung erhält man die Koordinaten

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = (R\sin t\cos\varphi, R\sin t\sin\varphi, R\cos t),\;\; 0 \le t \le \pi,\; 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Diese sind keine Parametrisierung der Sphäre, weil $\mathbf{x}$ wegen $\mathbf{x}(t, 0) = \mathbf{x}(t, 2\pi)$ nicht injektiv ist und weil $\mathbf{x}_\varphi = 0$ im Nord- und Südpol. Doch ist S ein stückweise reguläres Flächenstück $S = S_1 \cup \dots \cup S_4$ mit $S_i := \mathbf{x}(R_i)$ und $R_1 := [\epsilon, \pi - \epsilon] \times [0, \pi]$, $R_2 := [\epsilon, \pi - \epsilon] \times [\pi, 2\pi]$, $R_3 := [0, \epsilon] \times [0, 2\pi]$ und $R_4 := [\pi - \epsilon, \pi] \times [0, 2\pi]$. Die Kappen S_3 und S_4 müssen allerdings wegen $\mathbf{x}_\varphi = 0$ an den Polen neu parametrisiert werden, etwa als Graph $\{(x, y, \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) : (x, y) \in A\}$ mit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2 \sin^2\epsilon\}$. Weil $\lambda^2(A) \to 0$ für $\epsilon \to 0$, verschwindet der Beitrag der Kappen. Daher gilt nach (5) und nach (b)

$$O(\text{Sphäre}) = 2\pi \int_0^\pi R\sin t\; R\, dt = 4\pi R^2.$$

Torus. Dieser entsteht durch Drehung eines Kreises um eine äußere Achse. Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(R, 0, 0)$, wobei $r < R$ ist, werde durch $x(t) = R + r\sin t$, $z(t) = r\cos t$ für $0 \le t \le 2\pi$ beschrieben. Damit folgen die Koordinaten des Torus

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = ((R + r\sin t)\cos\varphi, (R + r\sin t)\sin\varphi, r\cos t)$$

für $0 \le t \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Der Torus ist offenbar stückweise regulär. Aus $\dot{x}(t) = r\cos(t)$, $\dot{z}(t) = -r\sin t$ folgt $\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = r$ und somit mit (5) und (b)

$$O(\text{Torus}) = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r\sin t)r\, dt = 4\pi^2 Rr.$$

In den Übungen wird noch das hyperbolische Paraboloid behandelt.

(7) Oberflächenintegral einer skalaren Funktion. Sei $S = \mathbf{x}(A)$ ein reguläres Flächenstück mit Parametrisierung $\mathbf{x}$. Ein Skalarfeld $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **messbar** bzw. **integrierbar**, wenn $f \circ \mathbf{x} : A \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar bzw. integrierbar ist. Sei f ein integrierbares Skalarfeld. Dann heißt

$$\int_S f\, dO := \int_S f(\mathbf{x})\, dO(\mathbf{x}) := \int_A f \circ \mathbf{x}\; |\mathbf{x_u} \times \mathbf{x_v}|\, d\lambda^2 = \iint_A f(\mathbf{x}(u, v))\, |\mathbf{x_u}(u, v) \times \mathbf{x_v}(u, v)|\, du dv$$

das (Ober-)Flächenintegral von f auf S. Ist $S = S_1 \cup \ldots \cup S_r$ stückweise regulär, dann definiert man das Flächenintegral von f als

$$\int_S f\, dO := \sum_{i=1}^r \int_{S_i} f\, dO.$$

(8) Beispiele. (a) Für $f = 1$ ist $\int_S 1\, dO = O(S)$ die Oberfläche von S.

(b) Ist $f = \rho$ eine Massen– oder Ladungsbelegung von S. Dann ist $\int_S \rho\, dO$ die Gesamtmasse von S bzw. die Gesamtladung auf S.

(c) Für ρ wie in (b) ist $\int_S \frac{\rho(x)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\, dO(\mathbf{x})$ das Gravitationspotenzial bzw. elektrostatisches Potential in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Mit der Notation $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sind $M_{i,k} := \int_S x_i^k \rho(\mathbf{x})\, dO(\mathbf{x})$ die k-ten Momente und

$$x_{i,S} := \frac{1}{M} \int_S x_i \rho(\mathbf{x})\, dO(\mathbf{x})$$

die Koordinaten des Massenmittelpunktes, wobei M ist Gesamtmasse bezeichnet.

(d) Als konkretes Beispiel werde das Trägheitsmoment $I_z = \int_S (x^2 + y^2) \frac{M}{4\pi R^2}\, dO(\mathbf{x})$ der Kugelschale $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ bez. der z–Achse bei homogener Massendichte und Gesamtmasse M berechnet. — Für die Koordinaten $\mathbf{x}(t, \varphi)$ der Sphäre aus (6) gilt

$$\mathbf{x}_t = R \begin{pmatrix} \cos t \cos \varphi \\ \cos t \sin \varphi \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin t \sin \varphi \\ \sin t \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\varphi = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 t \cos \varphi \\ \sin^2 t \sin \varphi \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}.$$

Weil $|\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\varphi|^2 = R^2 \sin^2 t$, ist das Oberflächenelement $dO = R^2 \sin t\, dt d\varphi$ und damit

$$I_z = \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin^2 t\, R^2 \sin t\, dt\, d\varphi = \frac{2}{3} M R^2.$$

Allgemeines k-dimensionales Flächenstück in $\mathbb{R}^d$

(9) Definition. Seien $k, d \in \mathbb{N}$ mit $k \leq d$. Weiter seien $A \subset \mathbb{R}^k$ kompakt und $U \subset \mathbb{R}^k$ offen mit $A \subset U$. Dann heißt $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^d)$ eine Parameterdarstellung des Flächenstücks $S := \mathbf{x}(A)$, wenn

(i) $\mathbf{x}|A$ injektiv ist und

(ii) die partiellen Ableitungen $\mathbf{x}_{u_i} = \partial_{u_i} \mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, k$ in allen Punkten $u = (u_1, \ldots, u_k) \in A$ linear unabhängig sind.

Die Bedingung (ii) bedeutet, dass die Jacobi Matrix $J_\mathbf{x}(u) = (\mathbf{x}_{u_1}(u) \ \ldots \ \mathbf{x}_{u_k}(u))$ in allen Punkten $u \in A$ vollen Rang k hat. Aus der Jacobi Matrix gewinnt man die quadratische positive Gram Matrix

$$G(u) := J_\mathbf{x}(u)^T J_\mathbf{x}(u) \in \mathbb{R}^{k,k}.$$

Sie wird auch **metrischer Tensor** genannt. Da

$$G = J_\mathbf{x}^T J_\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{u_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{u_k}^T \end{pmatrix} (\mathbf{x}_{u_1} \cdots \mathbf{x}_{u_k}) = \left(\langle \mathbf{x}_{u_i}, \mathbf{x}_{u_j} \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq k},$$

sind die Matrixelemente von G die euklidischen Skalarprodukte im $\mathbb{R}^d$ der Tangentialvektoren an die Parameterlinien.

Mit Hilfe der **Gram Determinante** $g(u) := \det G(u) > 0$ definiert man das (Ober–)**Flächenelement** und das **Flächenmaß**

$$dO(u) := \sqrt{g(u)}\, d\lambda^k(u), \quad \sqrt{g}\, \lambda_A^k$$

von S. Letzteres ist ein Maß mit Dichte $\sqrt{g}$ bezüglich des Lebesgue Maßes auf A. Weiter werden **Messbarkeit** und **Integrierbarkeit** eines skalaren Feldes $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ wörtlich wie in (7) definiert. Ist f ein integrierbares Skalarfeld auf S, dann ist

$$\int_S f\, dO = \int_S f(\mathbf{x})\, dO(\mathbf{x}) = \int_A f \circ \mathbf{x} \sqrt{g} d\lambda^k = \int \ldots \int_A f(\mathbf{x}(u_1, \ldots, u_k)) \sqrt{g(u_1, \ldots, u_k)} du_1 \ldots du_k$$

das **Oberflächenintegral** von f auf S. Der letzte Ausdruck ist ein k-faches iteriertes Integral.

(10) Bekannte Spezialfälle von (9).

(a) Seien $k = 1$, $d \geq 2$ und $A = [a, b]$. Dann ist $\mathbf{x}|A$ ist $\mathcal{C}^1$**–Kurve** in $\mathbb{R}^d$ und S ihre Spur. Der Parameter heiße t. Damit ist $G(t) = \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle$, weshalb $\sqrt{g(t)} = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_2$. Daher ist $dO(t) = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_2\, dt$ und

$$\int_S f dO = \int_{\mathbf{x}} f\, \|d\mathbf{x}\| = \int_a^b f(x(t))\, \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_2\, dt$$

das Kurvenintegral eines skalaren Feldes.

(b) Seien $k = 2$, $d = 3$. Dann ist $\mathbf{x}(A)$ ein **Flächenstück** in $\mathbb{R}^3$. Die Parameter seien u, v. Damit ist

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_u} \rangle & \langle \mathbf{x_u}, \mathbf{x_v} \rangle \\ \langle \mathbf{x_v}, \mathbf{x_u} \rangle & \langle \mathbf{x_v}, \mathbf{x_v} \rangle \end{pmatrix}$$

und $\det G = EG - F^2 = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2$. Daher ist $\sqrt{g}\, d\lambda_A^2$ das Flächenmaß aus (2) und es gilt die Integralformel aus (7).

(c) Sei $k = d \geq 1$. In diesem Fall ist die Jacobi Determinante $\det(J_{\mathbf{x}}(u, v)) \neq 0$ an jeder Stelle $(u, v) \in A$. Aus Stetigkeitsgründen existiert daher eine offene Menge $U' \subset U$ mit $A \subset U'$, worauf die Jacobi Determinante nicht verschwindet. Aus dem Satz von der lokalen Inversen (19.6) folgt, dass $T := \mathbf{x}|U'$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus auf das Bild ist. Da $G = J_{\mathbf{x}}^T J_{\mathbf{x}}$, ist $\sqrt{g} = |\det D\mathbf{x}| = |\det DT|$. Es folgt die Substitutionsformel (29.1).

(11) Parametertransformation. *Sei* $S = \mathbf{x}(A)$ *ein* k*–dimensionales Flächenstück gemäß* (9). *Sei* $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$ *offen und* $T : \tilde{U} \to U$ *ein* $\mathcal{C}^1$*–Diffeomorphismus. Setze* $\tilde{A} := T^{-1}(A)$. Man nennt T eine Parametertransformation und $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \circ T : \tilde{U} \to \mathbb{R}^d$ die neue Parameterdarstellung des Flächenstücks $S = \mathbf{x}(A) = \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{A})$. *Dann ist*

$$\int_S f\, dO = \int_S f(\mathbf{x})\, dO(\mathbf{x}) = \int_S f(\tilde{\mathbf{x}})\, dO(\tilde{\mathbf{x}}),$$

d.h. das Oberflächenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis. Seien $\tilde{u} \in \tilde{U}$ die neuen und $u = T(\tilde{u}) \in U$ die alten Parameter. Mit der Kettenregel folgt $J_{\tilde{x}}(\tilde{u}) = J_x(T(\tilde{u}))J_T(\tilde{u}) = J_x(u)J_T(\tilde{u})$. Daher ist $\tilde{G}(\tilde{u}) = J_{\tilde{x}}(\tilde{u})^T J_{\tilde{x}}(\tilde{u}) = J_T(\tilde{u})^T J_x(u)^T J_x(u) J_T(\tilde{u}) = J_T(\tilde{u})^T G(u) J_T(\tilde{u})$. Es folgt

$$\sqrt{\tilde{g}(\tilde{u})} = \sqrt{g(u)}\,|\det J_T(\tilde{u})| = \sqrt{g(u)}\,|\det J_{T^{-1}}(u)|^{-1}.$$

Daher ist $\int_S f(\tilde{x}) dO(\tilde{x}) = \int_{\tilde{A}} f \circ \tilde{x}(\tilde{u}) \sqrt{\tilde{g}(\tilde{u})} d\lambda^k(\tilde{u}) = \int_{\tilde{A}} (f \circ x)(T(\tilde{u})) \sqrt{g(T(\tilde{u}))}\,|\det J_T(\tilde{u})|\, d\lambda^k(\tilde{u})$, was gemäß der Substitutionsformel (29.1) gleich $\int_A (f \circ x)(u) \sqrt{g(u)} d^k\lambda(u) = \int_S f(x) dO(x)$ ist. Also ist $\int_S f dO$ invariant unter einer Parametertransformation. □

Wir wenden uns wieder regulären Flächenstücken im $\mathbb{R}^3$ zu.

(12) Oberflächenintegral eines Vektorfeldes im $\mathbb{R}^3$. Sei $S = \mathbf{x}(A)$ ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung $\mathbf{x}$ und Flächennormalen $\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$. Weiter sei $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ ein integrierbares Vektorfeld, d.h. die Komponenten F_i von $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ seien integrierbar gemäß (7). Dann heißt das Flächenintegral (7) der Normalkomponente $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$ von $\mathbf{F}$

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} := \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dO = \int_A (\mathbf{F} \circ \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)\, d\lambda^2 = \int_A [\mathbf{F} \circ \mathbf{x}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]\, d\lambda^2$$

das Oberflächenintegral von $\mathbf{F}$ auf S. Es heißt auch der **Fluss** von $\mathbf{F}$ durch S. Man nennt

$$d\mathbf{O} := \mathbf{n}\, dO = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\, d\lambda^2$$

das vektorielle **Flächenelement** von S. Falls S stückweise regulär ist, setzt man $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \sum_{i=1}^r \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$.

(13) Bedeutung. Das Spatprodukt

$$[\mathbf{F} \circ \mathbf{x}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{F_1} \circ \mathbf{x} & x_u & x_v \\ \mathbf{F_2} \circ \mathbf{x} & y_u & y_v \\ \mathbf{F_3} \circ \mathbf{x} & z_u & z_v \end{pmatrix}$$

gibt das vorzeichenbehaftete Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spats (Prismas) an. Interpretiert man $\mathbf{F}$ als das Geschwindigkeitsfeld einer stationären, d.h. zeitlich unveränderlichen Flüssigkeitsströmung, dann ist $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$ das Volumen der Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche dO fließt. Diese ist positiv, falls $\angle(F, n)$ spitz ist, sonst negativ. Dementsprechend ist $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$ das Gesamtvolumen der Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt S hindurchströmt.

(14) Beispiele.

(a) Im Fall, dass S ein **Graph** ist wie in (3)(a) beschrieben, ist $\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y = (-f_x, -f_y, 1)^T$ und somit $[\mathbf{F}, \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y] = -F_1 f_x - F_2 f_y + F_3$. Daher folgt

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \iint_A [-F_1(x, y, f(x, y)) f_x(x, y) - F_2(x, y, f(x, y)) f_y(x, y) + F_3(x, y, f(x, y))]\, dx dy.$$

(b) Als konkretes Beispiel berechnen wir den Fluss des Feldes $F(x,y,z) = (2z, x+y, 0)$ durch die Sphäre $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ von innen nach außen. Wir benutzen die übliche fast überall Parametrisierung $\mathbf{x}(\vartheta,\varphi) = (R\sin\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\vartheta)$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ der Sphäre. Die Flächennormale $\mathbf{n}(\vartheta,\varphi) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ ist gleich dem normierter Ortsvektor und das Oberflächenelement lautet $dO = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{O} &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta(\sin\varphi+\cos\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi \right) R^2 \sin\vartheta d\vartheta = \\ &= R^3 \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \sin^2\varphi d\varphi\right) \sin\vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

(15) Randintegral eines Vektorfeldes in $\mathbb{R}^3$. Sei $S = \mathbf{x}(A)$ ein reguläres Flächenstück gemäß (1). Der Rand ∂A des regulären Bereichs $A \subset \mathbb{R}^2$ bestehe aus den stückweise regulären geschlossenen Kurven $w_0, \dots, w_n$ und werde positiv umlaufen (siehe (28.9)). $\mathrm{Rand}(S) = \mathbf{x}(\partial A)$ besteht daher aus den geschlossenen stückweise regulären Kurven $\mathbf{x}\circ w_0, \dots, \mathbf{x}\circ w_n$ in $\mathbb{R}^3$. Sei $\mathbf{F}$ ein stetiges Vektorfeld auf S. Dann heißt das Kurvenintegral (21.4) von $\mathbf{F}$ längs Rand(S)

$$\int_{\mathrm{Rand}(S)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} := \sum_{i=0}^n \int_{\mathbf{x}\circ \mathbf{w_i}} \mathbf{F}\cdot d(\mathbf{x}\circ w_i)$$

das **Randintegral** von $\mathbf{F}$ bez. S.

(16) Lemma. *Für das Hilfsvektorfeld $\tilde F$ in $\mathbb{R}^2$ auf A mit $\tilde F(u,v) := D\mathbf{x}(u,v)^T(\mathbf{F}\circ\mathbf{x})(u,v) = (\langle \mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\rangle, \langle \mathbf{x}_v(u,v), \mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\rangle)^T$ gilt*

$$\int_{\mathrm{Rand}(S)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial A} \tilde F \cdot dw.$$

Beweis. $\int_{\mathbf{x}\circ w_i} \mathbf{F}\cdot d(\mathbf{x}\circ w_i) = \int_{a_i}^{b_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}\circ w_i(t))\cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{x}\circ w_i(t))\,dt = \int_{a_i}^{b_i} (\mathbf{F}\circ\mathbf{x})(w_i(t))\cdot D\mathbf{x}(w_i(t))\dot w_i(t)dt = \int_{a_i}^{b_i} D\mathbf{x}(w_i(t))^T(\mathbf{F}\circ\mathbf{x})(w_i(t))\cdot \dot w_i(t)dt = \int_{w_i} \tilde F\cdot dw_i$. Die Summation über i ergibt $\int_{\partial A} \tilde F \cdot dw$. □

(17) Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$. Sei $S = \mathbf{x}(A)$ ein reguläres Flächenstück. Die Parametrisierung $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ sei 2–mal stetig differenzierbar. Weiter sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $S \subset V$ und $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\mathrm{Rand}(S)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{F})\cdot d\mathbf{O}.$$

Beweis. Mit (16) und dem Satz von Green (28.10) folgt

$$\int_{\mathrm{Rand}(S)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial A} \tilde F\cdot dw = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial u}\tilde F_2 - \frac{\partial}{\partial v}\tilde F_1\right) d\lambda^2$$

und $\partial_u\tilde{F}_2(u,v) - \partial_v\tilde{F}_1(u,v) = \langle \partial_u\partial_v\mathbf{x}(u,v), \mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\rangle + \langle \partial_v\mathbf{x}(u,v), D\mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\partial_u\mathbf{x}(u,v)\rangle - \langle \partial_v\partial_u\mathbf{x}(u,v), \mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\rangle - \langle \partial_u\mathbf{x}(u,v), D\mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\partial_v\mathbf{x}(u,v)\rangle = \langle \mathbf{x}_v(u,v), D\mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\mathbf{x}_u(u,v)\rangle - \langle \mathbf{x}_u(u,v), D\mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v))\mathbf{x}_v(u,v)\rangle = \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}(\mathbf{x}(u,v)), \mathbf{x}_u(u,v)\times\mathbf{x}_v(u,v)\rangle$. Dabei besteht das letzte Gleichheitszeichen, weil für jedes $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ und dazu $a := (a_{32}-a_{23}, a_{13}-a_{31}, a_{21}-a_{12})$ die algebraische Identität

$$\langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle = \langle a, \mathbf{x}\times\mathbf{y}\rangle \;\; \forall\, x,y \in \mathbb{R}^3$$

gilt. Es folgt die Behauptung nach Definition von $\int_S (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot \mathbf{dO}$.

Obige Identität sieht man wie folgt ein. Offenbar ist die linke Seite gleich $\langle (A^T - A)x, y\rangle$ und das Spatprodukt gleich $\langle a\times x, y\rangle$. Es bleibt nachzuprüfen, dass für jedes schiefsymmetrische $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ die Beziehung $Bx = b\times x$ mit $b := (b_{32}, b_{13}, b_{21})$ gilt. □

(18) Orientierbarkeit. Im Satz von Stokes (17) ist das reguläres Flächenstück $S = \mathbf{x}(A)$ im folgenden Sinn **positiv orientiert**. Blickt man auf die Oberseite des Flächenstücks, d.h. in Gegenrichtung zur Flächennormalen $\mathbf{n} = \frac{1}{x_u\times x_v}\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v$, dann wird der Rand so durchlaufen, dass S links liegt.

Der Satz von Stokes gilt allgemein für stückweise reguläre Flächenstücke $S = S_1\cup\ldots\cup S_r$ (siehe (30.2)), wenn $\mathrm{Rand}(S)$ aus einfach geschlossenen disjunkten Kurven besteht, die regulären Flächenstücke S_i positiv orientiert sind und wenn gemeinsame Randstücke in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. Dies läßt sich auch kurz so beschreiben: Man denke sich die Kanten von S abgerundet. Dann ist n ein stetiges Vektorfeld auf S und $\mathrm{Rand}\,S$ wird positiv durchlaufen. — Der Beweis des Satzes von Stokes in dieser Situation ergibt sich einfach durch Addieren der Beiträge aller regulären Teilflächenstücke.

Nicht orientierbar ist z.B. das **Möbiusband**. Dies ist ein ebenes Band, was einmal verdreht wird und dessen Enden danach verbunden werden. Es ist ein stückweise reguläres Flächenstück mit zwei ringförmigen disjunkten Randkurven.

$\boxed{\text{Üb}}$ Das positiv orientierte reguläres Flächenstück $S = \mathbf{x}(A)$ soll so umparametrisiert werden (siehe (11)), dass bei positiver Orientierung $\mathrm{Rand}\,(S)$ in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.
Lösung. Gesucht ist offenbar eine Parametrisierung $\tilde{\mathbf{x}}$ derart, dass $S = \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{A})$ und $\tilde{\mathbf{n}}(\tilde{u},\tilde{v}) = -\mathbf{n}(u,v)$ ist. Naheliegend ist $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(u,v) := (v,u)$ und $\tilde{A} := T^{-1}(A)$, $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}\circ T$. Dafür ist $D\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u},\tilde{v}) = D\mathbf{x}(T(\tilde{u},\tilde{v}))\circ T$ (weil T linear ist) $= D\mathbf{x}(u,v)\circ T$. Das bedeutet $(\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}}\;\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}) = (\mathbf{x}_u\;\mathbf{x}_v)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = (\mathbf{x}_v\;\mathbf{x}_u)$. Daher ist $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}}\times\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} = \mathbf{x}_v\times\mathbf{x}_u = -\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v$ wie gewünscht. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Aus dem Satz von Stokes in der Ebene leite man den Satz von Green ab, gewinne die Substitutionsformel für λ^2 und erhalte eine Sektorformel (vgl. (28.11)(a)).
Lösung. Sei S eben, d.h. o.E. $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), 0)$ und $\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v = (0,0,x_uy_v - x_vy_u)$ mit $x_uy_v - x_vy_u > 0$. In diesem Fall ist $\mathrm{Rand}\,(S) = \partial S$, $\mathbf{n} = (0,0,1)$, $x_uy_v - x_vy_u = |\det D(x,y)|$ und $(\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{dO} = (\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dO = (\operatorname{rot}\mathbf{F})_3\,dO = (\partial_xF_2 - \partial_yF_1)\,dO = (\partial_xF_2\circ\mathbf{x} - \partial_yF_1\circ\mathbf{x})(x_uy_v - x_vy_u)\,d\lambda^2$. Der Satz von Stokes besagt dann $\int_{\partial S}(F_1,F_2)\cdot d(x,y) = \int_S(\partial_xF_2 - \partial_yF_1)\,dO$, wobei F_1 und F_2 hier nur noch von zwei Variablen abhängen. Daraus folgt der Satz von Green (28.10), indem man $x(u,v) := u$ und $y(u,v) := v$ wählt. — Für die Vektorfelder $F(x_1,x_2) = (-x_2, 0)$

oder $(0, x_1)$ gilt $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 1$. Somit folgt nach Stokes

$$O(S) = \int_S dO = \int_A |\det D(x,y)|\, d\lambda^2 \quad \text{und} \quad O(S) = -\int_{\partial S} x_2\, dx_1 = \int_{\partial S} x_1\, dx_2.$$

Explizit bedeutet z. B. das letzte Integral $\int_{\partial S} x_1\, dx_2 = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{b_i} x(w_i(t)) \frac{d}{dt} y(w_i(t))\, dt$. □

(19) Beispiel. Das Vektorfeld $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ stelle das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung in dem Zylinder $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$ dar. Wir berechnen das Kurvenintegral $\int_{\text{Rand}(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$ von $\mathbf{F}$ längs der Schnittkurve $\text{Rand}(S)$ des Zylinders mit der Ebene $\{(x,y,z) : x + y + z = 1\}$.

1. Methode. Man parametrisiert die Schnittkurve $\text{Rand}\,(S)$ durch $x = \cos t$, $y = \sin t$ und $z = 1 - \sin t - \cos t$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Damit folgt

$$\int_{\text{Rand}(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(w(t)) \cdot \dot{w}(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin^3 t \\ \cos^3 t \\ -(1 - \sin t - \cos t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [\sin^4 t + \cos^4 t - (1 - \sin t - \cos t)^3 (-\cos t + \sin t)]\, dt = \dots$$

2. Methode. Man wende den Satz von Stokes an. Danach ist $\int_{\text{Rand}(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{dO}$. Dazu wird S wie folgt parametrisiert: $A := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\mathbf{x}(x,y) := (x, y, 1 - x - y)$. Dafür ist

$$\mathbf{x}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \text{rot}\, \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Hiermit erhält man für das Spatprodukt $[(\text{rot}\, \mathbf{F}) \circ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y)](x,y) = 3(x^2 + y^2)$ und

$$\int_{\text{Rand}(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = 3 \iint_A (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi dr = \frac{3}{2}\pi.$$

Man beachte: Offenbar kann die Fläche S durch jedes in $\text{Rand}(S)$ eingespannte reguläre Flächenstück ersetzt werden.

(20) Deutung der Rotation. Seien S und F wie im Satz von Stokes, $s \in S$, $r > 0$, $S_r := S \cap \tilde{U}_r(s)$ und $\text{Rand}(S_r)$ die entsprechend orientierte Randkurve. Dann ist nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\text{Rand}(S_r)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = \int_{S_r} \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{dO} = \int_{S_r} (\text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dO \overset{\text{MWS}}{=} (\text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(s^\star)\, O(S_r)$$

für ein geeignetes $s^\star \in S_r$, wobei $O(S_r)$ die Oberfläche von S_r ist . Es folgt

$$(\text{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(s) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{O(S_r)} \int_{\text{Rand}(S_r)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}.$$

Die Wirbelstärke von $\mathbf{F}$ in s um $\mathbf{n}$ ist also gleich der **Zirkulation** um s pro Flächeneinheit.

31 Integration über 3-dimensionale Bereiche

Das Volumen einer Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^3$, d.h. $B \in \mathcal{B}^3$, ist definitionsgemäß das Lebesgue Maß $\lambda^3(B)$ dieser Menge. Das Volumen wird oft auch mit $V(B)$ bezeichnet. Wir erinnern an (25.19)

$$\lambda^3(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) : I_n \in \mathcal{J}^3, \bigcup_n I_n \supset B\right\}.$$

Die Bestimmung des Infimums ist für ein allgemeines B oftmals schwierig. Aufgrund von (25.22), (25.21) und (25.31) ist $\lambda^3(B) = 0$, falls B enthalten ist in der Vereinigung von abzählbar vielen Ebenen. Allgemeinere Nullmengen ergeben sich aus dem folgenden Satz. Wenn man $B \in \mathcal{B}^3$ zur Bestimmung seines Volumens längs stückweise regulären Flächenstücken zerschneidet, entstehen dadurch zusätzliche Randmengen, die jedoch nach (1) Nullmengen sind.

(1) Satz. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein stückweise reguläres Flächenstück. Dann ist $\lambda^3(S) = 0$.*

Beweis. Offenbar genügt es, ein reguläres $S = \mathbf{x}(A)$ zu betrachten. Nach Definition einer Parametrisierung existiert eine offene Menge $W \supset A$ derart, dass $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ überall auf W. Sei $(u_0, v_0) \in A$ fest. Mit $\mathbf{n}_0 := \mathbf{n}(u_0, v_0)$ bilde die differenzierbare Abbildung

$$T : W \times]-1, 1[\to \mathbb{R}^3,\ T(u, v, t) := \mathbf{x}(u, v) + t\mathbf{n}_0.$$

Ihre Jacobi Matrix ist $J_T = (\mathbf{x}_u\ \mathbf{x}_v\ \mathbf{n}_0)$ mit $\det J_T = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}_0]$. Insbesondere ist $\det J_T(u_0, v_0, 0) = |\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)| > 0$. Nach dem Satz von der lokalen Inversen (19.6) gibt es eine abgeschlosssene Kreisscheibe $K_0 \subset W$ um (u_0, v_0) und $0 < \epsilon_0 < 1$ derart, dass T auf einer offenen Umgebung von $K_0 \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus auf das Bild ist. Außerdem ist $\det J_T$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $K_0 \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ durch ein $c \in]0, \infty[$ beschränkt. Nun werden die Substitutionsformel und der Satz von Fubini angewendet. Es folgt

$$\lambda^3(T(K_0 \times [-\epsilon_0, \epsilon_0])) = \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \left(\int_{K_0} \det J_T(u, v, t)\, d\lambda^2\right) dt \leq 2\epsilon_0 c\, \lambda^2(K_0).$$

Weiter ist $\mathbf{x}(K_0) \subset T(K_0 \times [-\epsilon, \epsilon])$ für jedes $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Mit $c' := 2c\,\lambda^2(K_0)$ folgt $\lambda^3(\mathbf{x}(K_0)) \leq \epsilon c'\ \forall\ \epsilon > 0$ und daher $\lambda^3(\mathbf{x}(K_0)) = 0$. Das gilt für jeden Punkt (u_0, v_0) der kompakten Menge A. Endlich viele K_0 überdecken bereits A. Daraus folgt $\lambda^3(\mathbf{x}(A)) = 0$. □

(2) Messbarer Normalbereich. Seien $A \in \mathcal{B}^2$ und $u, o : A \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $u(x, y) \leq o(x, y)\ \forall\ (x, y) \in A$. Dann heißt

$$B := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A : u(x, y) \leq z \leq o(x, y)\Big\}$$

ein messbarer Normalbereich. (Es ist $B \in \mathcal{B}^3$, weil $h, k : A \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, y, z) := z - u(x, y)$, $k(x, y, z) := o(x, y) - z$ messbar sind und $B = \{h \geq 0\} \cap \{k \geq 0\}$ gilt.) Für $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^3_B)$

gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_B f d^3\lambda = \int_A \left(\int_{u(x,y)}^{o(x,y)} f(x,y,z) d\lambda^1(z) \right) d\lambda^2(x,y).$$

Ist auch $A \subset \mathbb{R}^2$ ein messbarer Normalbereich, etwa $A = \{(x,y) : a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}$, wobei p und q messbar sind mit $p \leq q$, dann gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int_B f d\lambda^3 = \int_a^b \left(\int_{p(x)}^{q(x)} \left(\int_{u(x,y)}^{o(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Anmerkung: Wir haben hier die naheliegende Notation für Regelintegrale übernommen. So ist etwa $\int_{u(x,y)}^{o(x,y)} f(x,y,z) dz := \int_{[u(x,y),o(x,y)]} f(x,y,\cdot) d\lambda^1$.

(3) Beispiel. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich, der vom Ellipsoid $E = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ und vom Kegel $K = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \right\}$ begrenzt wird und im Halbraum $\{z \geq 0\}$ liegt.

Mit $h(x,y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ist $E \cap K = \left\{ (x,y,z) : h(x,y) = \frac{1}{2}, \frac{z^2}{c^2} = h(x,y) \right\}$ und

$$B = \left\{ (x,y,z) : h(x,y) \leq \frac{1}{2}, \sqrt{h(x,y)} \leq \frac{z}{c} \leq \sqrt{1 - h(x,y)} \right\}$$

ein Normalbereich. Sein Volumen ist $V(B) = \int_B 1 d\lambda^3 = \int_{\{h \leq \frac{1}{2}\}} \left(\int_{c\sqrt{h(x,y)}}^{c\sqrt{1-h(x,y)}} 1 dz \right) d\lambda^2(x,y) = c \int_{\{h \leq \frac{1}{2}\}} \left(\sqrt{1 - h(x,y)} - \sqrt{h(x,y)} \right) d\lambda^2(x,y)$. Zur weiteren Berechnung führen wir elliptische Koordinaten $x = \rho a \cos\varphi, y = \rho b \sin\varphi$ für $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ein. Hierfür ist die Funktionaldeterminante gleich $ab\rho$ und $h(x,y) = h(\rho a \cos\varphi, \rho b \sin\varphi) = \rho^2$. Es folgt $V(B) = c \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho \right) ab\rho d\varphi \right) d\rho = 2\pi abc \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\rho\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2 \right) d\rho = \frac{\pi}{3} abc(2 - \sqrt{2})$.

Wir berechnen noch die Koordinaten des geometrischen Schwerpunkts. Aus Symmetriegründen sind $x_S = y_S = 0$. Weiter ist $V(B) z_S = \int_B z d\lambda^3(x,y,z) = \int_{\{h \leq \frac{1}{2}\}} \left(\int_{c\sqrt{h}}^{c\sqrt{1-h}} z dz \right) d\lambda^2 = \int_{\{h \leq \frac{1}{2}\}} \frac{1}{2} c^2 (1 - h - h) d\lambda^2$, was in elliptischen Koordinaten $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} c^2 (1 - 2\rho^2) ab\rho d\varphi \right) d\rho = 2\pi \frac{1}{2} c^2 ab \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\rho - 2\rho^3) d\rho = \frac{1}{8} \pi c^2 ab$ ergibt. Es folgt $z_S = \frac{3}{16}(2 - \sqrt{2})c$.

(4) Volumen eines Drehkörpers. *Der rotationssymmetrische Bereich* $B \in \mathcal{B}^3$ *entsteht durch Drehung um die* z*–Achse der in der Halbebene* $\{y = 0, x > 0\}$ *gelegenen Menge* $A \in \mathcal{B}^2$*. Es gilt die zweite* **Regel von Guldin**

$$V(B) = 2\pi r_0 F(A),$$

wobei r_0 *der Drehachsenabstand des Flächenschwerpunkts ist.*

Beweis. In Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$, wofür die Funktionaldeterminante gleich r ist, ist $B = \{(\varphi, r, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, (r,z) \in A\}$ ein Normalbereich. Es folgt $V(B) = \int_B 1 d\lambda^3 = \int_0^{2\pi} \left(\int_A r d\lambda^2(r,z) \right) d\varphi = 2\pi r_0 F(A)$. $\square$

(5) Vorbereitung Divergenzsatz von Gauß. *Seien* $S = \mathbf{x}(A)$ *ein reguläres Flächenstück* (30.1) *und* $\mathbf{x}(u_0, v_0) \in S \setminus \operatorname{Rand} S$ *für* $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$ *ein sog.* **regulärer Flächenpunkt**.

(α) *Dann existieren eine offene Umgebung* $U_0 \subset \overset{\circ}{A}$ *von* (u_0, v_0)*, ein offenes Rechteck* $R \subset \mathbb{R}^2$ *und eine stetig differenzierbare Abbildung* $h : R \to \mathbb{R}$ *derart, dass* $\mathbf{x}(U_0) = \operatorname{Graph} h$*. D.h. lokal um jeden regulären Flächenpunkt ist* S *der Graph einer* C^1-*Funktion, vgl.* (30.3)(a).

(β) *Seien* $I =]a, b[$ *ein Intervall mit* $h(R) \subset I$*,* $Q := R \times I$*,* $C := \{(\xi, \eta, \zeta) \in Q : \zeta \le h(\xi, \eta)\}$*. Ist* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ein* $\mathcal{C}^1-$*Vektorfeld mit* $\mathbf{F}|\mathbb{R}^3 \setminus Q = 0$*, dann gilt der Divergenzsatz von Gauß*

$$\int_{\partial C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_C (\operatorname{div} \mathbf{F})\, d\lambda^3.$$

Beweis. (α) Die Funktionalmatrix $J_{\mathbf{x}}(u_0, v_0) = (\mathbf{x}_u(u_0, v_0)\ \mathbf{x}_v(u_0, v_0))$ hat maximalen Rang 2. Damit gibt es zwei linear unabhängige Zeilen. Nach etwaiger Umbenennung der Koordinaten x, y, z seien dies die ersten beiden Zeilen. Damit ist

$$J_{(x,y)}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} x_u(u_0, v_0) & x_v(u_0, v_0) \\ y_u(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar. Nach dem Satz von der lokalen Inversen (19.6) existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset \overset{\circ}{A}$ von (u_0, v_0) derart, dass $(x, y)(U_0) =: R \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck ist und $U_0 \to R$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus ist. Dann ist $h : R \to \mathbb{R}$, $h(\xi, \eta) := z((x, y)^{-1}(\xi, \eta))$ stetig differenzierbar und $\{(\xi, \eta, \zeta) : (\xi, \eta) \in R,\ \zeta = h(\xi, \eta)\} = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in U_0\}$, was $\operatorname{Graph} h = \mathbf{x}(U_0)$ bedeutet.

(β) Zunächst ist

$$\int_{\partial C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_R [-F_1(\xi, \eta, h(\xi, \eta))h_\xi(\xi, \eta) - F_2(\xi, \eta, h(\xi, \eta))h_\eta(\xi, \eta) + F_3(\xi, \eta, h(\xi, \eta))]\, d\xi d\eta$$

nach (30.14)(a), wobei nur die Deckfläche beiträgt, weil $F|\mathbb{R}^3 \setminus Q = 0$. — Das Raumintegral über $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3$ liefert demgemäß drei Beiträge. Für

$$\int_C \partial_3 F_3 d^3\lambda = \int_R \left(\int_a^{h(\xi,\eta)} \partial_3 F_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \right) d\xi d\eta = \int_R [F_3(\xi, \eta, h(\xi, \eta)) - F_3(\xi, \eta, a)]\, d\xi d\eta$$

erhält man den letzten Ausdruck des obigen Randintegrals, weil $F_3(\xi, \eta, a) = 0$ wegen $\mathbf{F}|\mathbb{R}^3 \setminus Q = 0$. Es bleibt

$$\int_C \partial_1 F_1 d\lambda^3 = -\int_R F_1(\xi, \eta, h(\xi, \eta)) h_\xi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

und in gleicher Weise den entsprechenden Ausdruck für $\int_C \partial_2 F_2 d\lambda^3$ zu zeigen. Zunächst ist

$$\int_C \partial_1 F_1 d\lambda^3 = \int_R \left(\int_a^{h(\xi,\eta)} \partial_1 F_1(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \right) d\xi d\eta.$$

Mit $R =]\alpha, \beta[\times]\gamma, \delta[$ ist $\int_R = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta$. Wir werden im Folgenden nur das Integral $\int_\alpha^\beta$ betrachten brauchen. Sei G eine Stammfunktion von $F_1(\xi, \eta, \zeta)$ bezüglich ζ, d.h. $\partial_3 G(\xi, \eta, \zeta) = F_1(\xi, \eta, \zeta)$. Vertauscht man die partiellen Ableitungen, so folgt mit dem HDI

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{h(\xi,\eta)} \partial_1 F_1(\xi,\eta,\zeta) d\zeta \right) d\xi = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{h(\xi,\eta)} \partial_3(\partial_1 G)(\xi,\eta,\zeta) d\zeta \right) d\xi =$$

$$= \int_\alpha^\beta (\partial_1 G)(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) d\xi - \int_\alpha^\beta (\partial_1 G)(\xi,\eta,a) d\xi.$$

Da $\frac{d}{d\xi} G(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) = (\partial_1 G)(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) + \partial_3 G(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) h_\xi(\xi,\eta) = (\partial_1 G)(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) + F_1(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) h_\xi(\xi,\eta)$, bleibt damit nur noch zu verifizieren, dass $\int_\alpha^\beta \frac{d}{d\xi} G(\xi,\eta,h(\xi,\eta)) d\xi = \int_\alpha^\beta (\partial_1 G)(\xi,\eta,a) d\xi$. Wertet man die Integrale aus, ergibt sich die Gleichung $G(\beta,\eta,h(\beta,\eta)) - G(\alpha,\eta,h(\alpha,\eta)) = G(\beta,\eta,a) - G(\alpha,\eta,a)$, die in der Tat zutrifft, weil $F_1(\beta,\eta,\zeta) = 0 \ \forall\ \zeta$ und daher $G(\beta,\eta,h(\beta,\eta)) = G(\beta,\eta,a)$ und $G(\alpha,\eta,h(\alpha,\eta)) = G(\alpha,\eta,a)$ gelten. □

(6) Divergenzsatz von Gauß. *Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ kompakt derart, dass ∂B aus endlich vielen paarweise disjunkten geschlossenen stückweise regulären orientierbaren Flächenstücken besteht. Für jeden regulären Flächenpunkt $x \in \partial B$ sei $\mathbf{n}(x)$ die nach außen weisende Normale (d.h. für hinreichend kleines $t > 0$ gilt $x + t\,\mathbf{n}(x) \in \mathbb{R}^3 \backslash B$ und $x - t\,\mathbf{n}(x) \in B \backslash \partial B$) und $d\mathbf{O} = \mathbf{n}\, dO$ bezeichne das vektorielle Oberflächenelement (siehe* (30.12)*). Seien $U \supset B$ offen und $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{F}\, d\lambda^3 = \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}.$$

Beweisplan. (i) Nach (5) besitzt jeder reguläre Flächenpunkt des Randes ∂B eine offene Quaderumgebung Q derart, dass der Divergenzsatz für jedes stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{F}$ mit $\mathbf{F}|\mathbb{R}^3 \backslash Q = 0$ gilt.

(ii) Man zeigt den Divergenzsatz für jedes $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld $\mathbf{F}$, was außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, die keine singulären Flächenpunkte enthält. Dies geschieht durch Rückführung auf (i) mittels einer Zerlegung der Eins.

(iii) Der allgemeine Fall folgt dann durch kompakte Ausschöpfung.

Zu Einzelheiten des Beweises und für eine noch allgemeinere Version des Divergenzsatzes siehe man K. Königsberger Analysis 2, Springer, 12.4, 12.5. □

(7) Bemerkungen. (a) Der Divergenzsatz von Gauß gilt sinngemäß für kompakte Teilmengen $B \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

(b) Der Satz von Green (28.10) und der Divergenzsatzes von Gauß (6) für $d = 2$ sind äquivalente Formulierungen des gleichen Sachverhalts. In der Tat gehen wir vom Satz von Green aus und wählen in (6) für $d = 2$ die Bezeichnungen $A \subset \mathbb{R}^2$ für $B \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{G}$ für das Vektorfeld $\mathbf{F}$. Zunächst ist $\int_{\partial A} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial A} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dO$, wobei $\mathbf{n} = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{x}}\|}(\dot{y}, -\dot{x})$ und $dO = \|\dot{\mathbf{x}}\|\, d\lambda^1$ nach (30.10)(a). Wir setzen jetzt $\mathbf{F} := (-G_2, G_1)$. Dafür gilt $\mathbf{F} \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = \mathbf{G} \cdot (\dot{y}, -\dot{x})$ und somit $\int_{\partial A} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$. Daher folgt aus dem Satz von Green

$$\int_{\partial A} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right) d\lambda^2 = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} G_1 + \frac{\partial}{\partial y} G_2 \right) d\lambda^2 = \int_A \operatorname{div} \mathbf{G}\, d\lambda^2.$$

Ebenso folgt der Satz von Green aus dem Divergenzsatz von Gauß.

(8) Deutung der Divergenz. Seien B, $\mathbf{F}$ wie in (6), $x \in \overset{\circ}{B}$, $B_r := \tilde{U}_r(x) \subset \overset{\circ}{B}$ und S_r die Oberfläche von B_r. Dann ist nach dem Mittelwertsatz $\int_{S_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{B_r} (\operatorname{div} \mathbf{F})\, d\lambda^d = \operatorname{div} \mathbf{F}(x^\star) V(B_r)$ mit einem geeignetem $x^\star \in B_r$. Es folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V(B_r)} \int_{S_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O},$$

wobei auf der rechten Seite der aus der Volumeneinheit heraustretende Fluss, d.h. die **Quelldichte** von F in x steht. Man nennt x eine Quelle, falls $\operatorname{div} \mathbf{F}(x) > 0$ bzw. eine Senke, wenn $\operatorname{div} \mathbf{F}(x) < 0$. Das Vektorfeld $\mathbf{F}$ heißt quellenfrei, wenn $\operatorname{div} \mathbf{F}(x) = 0 \,\forall\, x$.

(9) Beispiele.

(a) Seien $B := \tilde{U}_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{F}(x) := x$. Dann sind ∂B die Einheitssphäre, $\operatorname{div} \mathbf{F} = d$ und $\int \operatorname{div} \mathbf{F}\, d\lambda^d = d\, V_d$, wobei V_d das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$ ist. Weiter ist $\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial B} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}\, dO = O_d$ die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Aus dem Divergenzsatz folgt

$$d\, V_d = O_d.$$

Zum Beispiel gilt für die Einheitskreisscheibe $d = 2$ und $V_2 = \pi$, $O_2 = 2\pi$ und für die Einheitskugel $d = 3$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$, $O_3 = 4\pi$.

(b) Seien $B \subset \mathbb{R}^d$ entsprechend wie B in (6), $a \in \mathbb{R}^d \backslash \partial B$, und $\mathbf{F}(x) := \frac{x-a}{\|x-a\|_2^d}$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$. Weiter sei O_d die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \begin{cases} 0 \text{ falls } a \notin B \\ 0_d \text{ falls } a \in \overset{\circ}{B} \end{cases}$$

Beweis. $\partial_i F_i(x) = \partial_i \frac{x_i - a_i}{(\sum_j (x_j - a_j)^2)^{\frac{d}{2}}} = \frac{\|x-a\|_2^d - (x_i - a_i)\frac{d}{2}\|x-a\|_2^{d-2} 2(x_i - a_i)}{\|x-a\|_2^{2d}} = \|x-a\|_2^{-d}\left(1 - d\frac{(x_i-a_i)^2}{\|x-a\|_2^2}\right)$, weshalb $\operatorname{div} \mathbf{F}(x) = \sum_{i=1}^d \partial_i F_i(x) = \|x-a\|_2^{-d}\left(d - d\sum_{i=1}^d \frac{(x_i-a_i)^2}{\|x-a\|_2^2}\right) = \|x-a\|_2^{-d}(d-d) = 0$ $\forall x \neq a$. Daraus folgt die Behauptung nach (6) falls $a \notin B$. — Sei nun $a \in \overset{\circ}{B}$. Dazu sei $U_r(a) \subset \overset{\circ}{B}$ und setze $B_a := B \backslash U_r(a)$. Wendet man den Divergenzsatz auf B_a an, so folgt aus dem eben Bewiesenem $0 = \int_{\partial B_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} + \int_{\partial U_r(a)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$. Die äußere Flächennormale $\mathbf{n}_a(x)$ im Punkt $x \in \partial U_r(a)$ ist $-\frac{1}{r}(x-a)$. Daher ist

$$\int_{\partial U_r(a)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int_{\partial U_r(a)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_a\, dO = \int_{\partial U_r(a)} \frac{-\frac{1}{r}\|x-a\|_2^2}{\|x-a\|_2^d} dO = -\frac{1}{r} r^{2-d}(O_d r^{d-1}) = -O_d.$$

□

(c) **Gaußsches Gesetz der Elektrostatik.** Die Ladungen $q_1, \cdots, q_n$ in den Punkten $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^3$ erzeugen in $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ das elektrisches Feld

$$\mathbf{E}(x) = \sum_{k=1}^n q_k \frac{x - a_k}{\|x - a_k\|^3}.$$

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ wie in (6) derart, dass $a_k \notin \partial B \;\forall\, k$. Aus (b) folgt

$$\int_{\partial B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{O} = 4\pi \sum_{a_k \in B} q_k = 4\pi \cdot \text{Gesamtladung in B.}$$

(10) Greensche Formeln. *Seien* $B, U \subset \mathbb{R}^d$ *entsprechend wie* B *und* U *in* (6) *und* $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $g \in \mathcal{C}^2(U)$ *skalare Felder. Dann gelten:*

(a)
$$\int_B f\Delta g \, d\lambda^d = -\int_B \nabla f \cdot \nabla g \, d\lambda^d + \int_{\partial B} f\partial_n g \, dO,$$

wobei $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial_k^2$ *den Laplace Operator,* $\nabla = \mathrm{grad}$ *den Gradienten,* $\partial_n g = (\mathrm{grad}\, g) \cdot \mathbf{n}$ *die Ableitung von* g *in Normalenrichtung* (17.2), (18.1) *und* $\cdot$ *das euklidische Skalarprodukt im* $\mathbb{R}^d$ *bezeichnen.*

(b)
$$\int_B \Delta g \, d\lambda^d = \int_{\partial B} \partial_n g \, dO.$$

(c) *Ist auch* $f \in \mathcal{C}^2(U)$, *dann gilt*

$$\int_B (f\Delta g - g\Delta f) \, d\lambda^d = \int_{\partial B} (f\partial_n g - g\partial_n f) \, dO.$$

Beweis. (a) Für $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{F} := f\nabla g$ ist $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = f\partial_n g$ und damit $\mathrm{div}\, \mathbf{F} = \nabla f \cdot \nabla g + f \,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, g = \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g$, siehe (17.14), (17.15). Die Behauptung folgt mit (6). — (b) Wähle $f = 1$ in (a). — (c) Wende (a) auf f und g mit vertauschten Rollen an. □

32 Hilberträume

Der Hilbertraum ist eine Verallgemeinerung des euklidischen und unitären Raums $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$ auf unendlich viele Dimensionen. Die Hilberträume sind die wichtigsten Banachräume und die Funktionalanalysis ist besonders ergebnisreich auf Hilberträumen. Die entscheidende Eigenschaft, die die Geometrie des Hilbertraums bestimmt, ist die Existenz der orthogonalen Projektion auf einen abgeschlossenen Untervektorraum und als Folge davon die Existenz einer Orthonormalbasis. Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.

(1) Skalarprodukt. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

heißt ein Skalarprodukt auf V, wenn

- $\langle\ ,\ \rangle$ linear im zweiten Argument ist, d.h. $\langle x, y + \lambda z\rangle = \langle x, y\rangle + \lambda \langle x, z\rangle\, \forall x, y, z \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$.
- $\langle\ ,\ \rangle$ antisymmetrisch ist, d.h. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}\ \forall\, x, y \in V$.
- $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit ist, d.h. $\langle x, x\rangle > 0\ \forall\, x \in V\backslash\{0\}$.

(2) Bemerkung. Aus den definierenden Eigenschaften des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ ergeben sich leicht die folgenden weiteren Eigenschaften.

(a) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0\ \forall\, x \in V$.

(b) $\langle\ ,\ \rangle$ ist antilinear im ersten Argument, denn $\langle x + \lambda y, z\rangle = \overline{\langle z, x + \lambda y\rangle} = \overline{\langle z, x\rangle + \lambda \langle z, y\rangle} = \overline{\langle z, x\rangle} + \overline{\lambda}\, \overline{\langle z, y\rangle} = \langle x, z\rangle + \overline{\lambda} \langle y, z\rangle\ \forall x, y, z \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

(c) $\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i} \beta_j \langle x_i, y_j\rangle\ \ \forall\ \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K},\ x_i, y_j \in V$.

(d) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\langle\ ,\ \rangle$ bilinear und symmetrisch.

Statt antisymmetrisch und antilinear sagt man auch konjugiert symmetrisch bzw. konjugiert linear.

(3) Ungleichung von Cauchy-Bunjakowski-Schwarz. *Für alle* x, $y \in V$ *gilt*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle\,.$$

Beweis. Falls $y = 0$, dann ist $\langle x, y\rangle = 0$ nach (2)(a) und die Behauptung gilt. Sei daher $y \neq 0$. Mit (2)(c) folgt $0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle x, y\rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle$. Setzt man hierin $\lambda := -\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}$, so ist

$$0 \leq \langle x, x\rangle - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{(\langle y, y\rangle)^2} \langle y, y\rangle\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

(4) Zugeordnete Norm. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Man setzt* $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \forall\, x \in V$. *Dann ist* $\|\cdot\|$ *eine Norm auf* V *(vgl.* (9.3)*). Die Cauchy–Schwarz Ungleichung lautet*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

Beweis. Weil $\langle x, x\rangle > 0$ für $x \neq 0$ und $\langle 0, 0\rangle = 0$ ist $\|\cdot\|$ positiv definit. — Weil $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda\,\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\,\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$, ist $\|\cdot\|$ homogen. — Es bleibt die Dreiecksungleichung nachzuweisen. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz Ungleichung folgt $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

(5) Bemerkung. Ein Vektorraum mit Skalarprodukt wird stets als normierter Raum gemäß (4) und damit insbesondere als metrischer Raum mit der Metrik $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ aufgefasst.

$\boxed{\text{Üb}}$ Sei V ein normierter Raum und $M \subset V$ ein Untervektorraum. Man zeige, dass $\overline{M}$ ein Untervektorraum von V ist.

(6) Satz. *Seien* $x,\ y \in V$. *Dann sind* $x \mapsto \langle y, x\rangle$ *und* $x \mapsto \langle x, y\rangle$ *als Abbildungen von* V *in* $\mathbb{K}$ *Lipschitz stetig. Weiter ist das Skalarprodukt* $\langle\ ,\ \rangle$ *als Abbildung von* $V \times V$ *in* $\mathbb{K}$ *stetig.*

Beweis. Mit (3) folgt $|\langle y, x\rangle - \langle y, x'\rangle| = |\langle y, x - x'\rangle \leq \|y\|\|x - x'\|$. Ebenso folgt die Lipschitz Stetigkeit von $x \to \langle x, y\rangle$. — Ähnlich beweist man die Stetigkeit des Skalarprodukts: $|\langle x, y\rangle - \langle x', y'\rangle| \leq |\langle x, y\rangle - \langle x', y\rangle| + |\langle x', y\rangle - \langle x', y'\rangle| = |\langle x - x', y\rangle| + |\langle x', y - y'\rangle| \leq \|x - x'\|\,\|y\| + \|x'\|\,\|y - y'\| \leq \|x - x'\|\,\|y\| + (\|x - x'\| + \|x\|)\,\|y - y'\| \to 0$ für $x' \to x$, $y' \to y$. □

(7) Skalarprodukt im Fall dim$V < \infty$. Im Folgenden wird erläutert, wie man jedes Skalarprodukt auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V mit Hilfe einer Basis und einer positiv hermiteschen Matrix aus dem Standardprodukt auf $\mathbb{K}^n$ gewinnt.

(a) Bekanntlich versieht man $\mathbb{K}^n$ mit dem **Standardskalarprodukt** $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt es das euklidische Skalarprodukt.

(b) Sei $A = (a_{ij})$ eine positive hermitesche Matrix. Dann ist $\langle x, y\rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{x_i}y_j$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$. Dies ist leicht zu verifizieren. Offensichtlich ist die Linearität im zweiten Argument. Die Antisymmetrie gilt, weil $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$. Die positive Definitheit entspricht genau der Positivität von A.

(c) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis von V. Für x und $y \in V$ seien $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, $\quad y = \sum_{i=1}^n y_i a_i$ die Entwicklungen nach der Basis. Dann ist

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i a_i, \sum_{j=1}^n y_j a_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle a_i, a_j\rangle\, \overline{x_i} y_j,$$

wobei die **Gramsche Matrix** $(\langle a_i, a_j\rangle)$ offensichtlich hermitesch und positiv ist, vgl. (b).

(8) Satz. *Sei* $(V, \langle,\rangle)$ *ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gelten die*

(a) **Polaridentität** *des Skalarprodukts. Mit* $W := \{1, -1, i, -i\}$ *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *und* $W := \{1, -1\}$ *im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ist*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{\zeta \in W} \zeta \, \|\zeta x + y\|^2 .$$

Das Skalarprodukt ist also durch Norm bestimmt.

(b) **Parallelogrammgleichung**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 .$$

Wie man zeigen kann, zeichnet sie diejenigen Normen auf einem Vektorraum aus, die von einem Skalarprodukt herrühren.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen. □

(9) Beispiel. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt. Dann definiert*

$$\langle f, g \rangle := \int \overline{f} g \, d\lambda_U^d$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathcal{C}_b(U) := \{f : U \to \mathbb{C} : f$ stetig und beschränkt$\}$ *über* $\mathbb{C}$.

Beweis. Offenbar ist $\overline{f}g$ stetig und beschränkt und somit Lebesgue integrierbar über U. Weiter ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear im zweiten Argument, denn $\int \overline{f}(g + \lambda g')d\lambda_U^d = \int(\overline{f}g + \lambda\overline{f}g')d\lambda_U^d = \int \overline{f}g \, d\lambda_U^d + \lambda \int \overline{f}g' \, d\lambda_U^d = \langle f, g \rangle + \lambda \langle f, g' \rangle$, und antisymmetrisch, denn $\overline{\langle f, g \rangle} = \overline{\int \overline{f}g \, d\lambda_U^d} = \int \overline{\overline{f}g} \, d\lambda_U^d = \int \overline{g}f \, d\lambda_U^d = \langle g, f \rangle$. Es bleibt die positive Definitheit zu zeigen: Sei $f \neq 0$. Dann existiert $x_0 \in U$ mit $f(x_0) \neq 0$. Weil f stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)| =: \beta \;\forall\, x \in U_\delta(x_0)$, vgl. (7.4). Damit folgt $\langle f, f \rangle = \int_U \overline{f}f d\lambda^d \geq \int_{U_\delta(x_0)} |f(x)|^2 \, d\lambda^d(x) \geq \int_{U_\delta(x_0)} \beta^2 d\lambda^d = \beta^2 \lambda^d(U_\delta(x_0)) > 0$. □

(10) Orthogonalität. Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt.

- $x, y \in V$ heißen orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Allgemeiner heißen zwei Teilmengen $A, B \subset V$ orthogonal, wenn $\langle a, b \rangle = 0 \;\forall a \in A,\, b \in B$.
- $A \subset V$ heißt eine orthogonale bzw. orthonormale Menge, wenn $\langle a, a' \rangle = \|a\|^2 \delta_{aa'}$ bzw. zusätzlich $\|a\| = 1 \;\forall a, a' \in A$ gelten. Entsprechend heißt eine Familie (insbesondere Folge) $(x_\iota)_{\iota \in I}$ orthogonal bzw. orthonormal, wenn $\langle x_\iota, x_\kappa \rangle = \|x_\iota\|^2 \delta_{\iota\kappa}$ bzw. zusätzlich $\|x_\iota\| = 1 \;\forall \iota, \kappa \in I$ gelten.
- Für $A \subset V$ heißt $A^\perp := \{x \in V : \langle x, a \rangle = 0 \;\forall\, a \in A\}$ das orthogonale Komplement von A. Man setzt $\emptyset^\perp := V$.

(11) Satz von Pythagoras. *Seien* $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset V$ *eine orthogonale Menge und* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. *Dann gilt*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2 .$$

Beweis. $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2$, weil $\langle x_i, x_j \rangle = \|x_i\|^2 \delta_{ij}$. □

(12) Lineare Hülle. Seien V ein Vektorraum und $A \subset V$. Dann heißt

$$\mathrm{Span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : a_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \cdots, n \text{ und } n \in \mathbb{N} \right\}$$

die lineare Hülle von A. Offenbar ist $\mathrm{Span}(A)$ der kleinste Untervektorraum von V, der A enthält. Daher ist $A = \mathrm{Span}(A)$ genau dann, wenn A ein Untervektorraum ist.

(13) Lemma. *Sei* $(V, \langle , \rangle)$ *ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gelten*

- $\{0\}^\perp = V, \ \ V^\perp = \{0\}$.
- $A \subset V \Rightarrow A \cap A^\perp \subset \{0\}$.
- $A, B \subset V$ *mit* $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset V \Rightarrow \ A^\perp$ *ist ein abgeschlossener Untervektorraum von* V.
- $A \subset V \Rightarrow A \subset (A^\perp)^\perp$.
- $A \subset V \Rightarrow A^\perp = \mathrm{Span}(A)^\perp = \overline{\mathrm{Span}(A)}^\perp$.

Beweis. Wir zeigen den vierten und den letzten Punkt. Das orthogonale Komplement $A^\perp$ ist ein Untervektorraum von V, denn für alle $x, y \in A^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in A$ gilt: $\langle x + \lambda y, a \rangle = \langle x, a \rangle + \overline{\lambda} \langle y, a \rangle = 0 \Rightarrow x + \lambda y \in A^\perp$. Seien nun (x_n) eine Folge in $A^\perp$ mit $x_n \to x \in V$ und $a \in A$. Es folgt $0 = \langle x_n, a \rangle \overset{n\to\infty}{\to} \langle x, a \rangle$ nach (6), weshalb $\langle x, a \rangle = 0$, d.h. $x \in A^\perp$. Damit ist $A^\perp$ abgeschlossen. — Nun wird der letzte Punkt bewiesen. Zunächst folgt aus $A \subset \overline{\mathrm{Span}\, A}$, dass $\overline{\mathrm{Span}(A)}^\perp \subset A^\perp$ nach dem dritten Punkt. Sei nun $x \in A^\perp$ und $y \in \overline{\mathrm{Span}(A)}$. Zu zeigen bleibt $\langle x, y \rangle = 0$. Seien $y_n \in \mathrm{Span}(A)$ mit $y_n \to y$. Dann ist $\langle x, y_n \rangle = 0 \ \forall \ n$, weil y_n eine Linearkombination von Elementen aus A und somit orthogonal zu x ist. Daher folgt $0 = \langle x, y_n \rangle \overset{n\to 0}{\to} \langle x, y \rangle$, weshalb $\langle x, y \rangle = 0$. □

$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise die restlichen Punkte von (13).

(14) Hilbertraum. Seien H ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\langle \ , \ \rangle$ ein Skalarprodukt auf H und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm (vgl. (4)). Dann heißt $(H, \langle , \rangle)$ ein Hilbertraum, wenn $(H, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, d.h. vollständig ist. Siehe (10.4).

Es folgt ein zentraler Satz der Hilbertraumtheorie.

(15) Projektionssatz. *Seien* H *ein Hilbertraum,* V *ein abgeschlossener Untervektorraum von* H *und* $x \in H$*. Dann gelten*

(a) *Es existiert genau ein* $y \in V$ *mit* $x - y \in V^\perp$. Man nennt $y =: P_V x$ die **orthogonale Projektion** von x auf V.

(b) *Es existiert genau ein* $\tilde{y} \in V$ *mit* $\|x - \tilde{y}\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|$. Man nennt $\tilde{y}$ ist die **Bestapproximation** von x aus V.

(c) *Es ist* $y = \tilde{y}$.

Beweis. Zunächst wird die Eindeutigkeit in (a) bewiesen. Seien y, $y' \in V$ mit $x - y \in V^\perp$ und $x - y' \in V^\perp$. Es folgt

$$\left\|y - y'\right\|^2 = \left\langle \underbrace{y - x}_{\in V^\perp} + \underbrace{x - y'}_{\in V^\perp}, \underbrace{y - y'}_{\in V} \right\rangle = 0 \Rightarrow y = y'.$$

Nun wird die Existenz in (b) gezeigt. Sei $d := \inf_{v \in V} \|x - v\| \geq 0$. Dazu existiert eine Folge (v_n) in V mit $\lim_{n \to \infty} \|x - v_n\| = d$. Es wird jetzt gezeigt, dass (v_n) eine Cauchy Folge ist. Die Parallelogrammgleichung (8)(b) $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ für $a = x - v_m, b = x - v_n$ ergibt

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2\left(\|x - v_m\|^2 + \|x - v_n\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\|^2.$$

Weil $\frac{1}{2}(v_m + v_n) \in V$, ist $\left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\|^2 \geq d^2$. Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x - v_n\|^2 \leq d^2 + \epsilon \; \forall \; n \geq N$. Dann gilt $\forall n, m \geq N : \|v_m - v_n\|^2 \leq 2(d^2 + \epsilon + d^2 + \epsilon) - 4d^2 = 4\epsilon$. Als Cauchy Folge konvergiert (v_n). Damit existiert $\tilde{y} \in V$ mit $v_n \to \tilde{y}$. Dafür gilt $\|x - \tilde{y}\| = d$.

Es bleibt $x - \tilde{y} \in V^\perp$ zu zeigen. Angenommen es existiert ein $v \in V$ mit $\langle x - \tilde{y}, v\rangle \neq 0$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $d^2 = \|x - \tilde{y}\|^2 \leq \|x - \tilde{y} - \lambda v\|^2 = \|x - \tilde{y}\|^2 + |\lambda|^2 \|v\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda \langle x - \tilde{y}, v\rangle)$. Für $\lambda = \epsilon \langle v, x - \tilde{y}\rangle$ mit $\epsilon > 0$ folgt $0 \leq \epsilon^2 |\langle v, x - \tilde{y}\rangle|^2 \|v\|^2 - 2\epsilon |\langle v, x - \tilde{y}\rangle|^2$ und somit $0 \leq \epsilon \|v\|^2 - 2$, was einen Widerspruch ergibt. $\square$

(16) Totale Menge. Seien V ein normierter Raum und $A \subset V$. Man nennt A eine totale Menge, wenn $\overline{\mathrm{Span}\,(A)} = V$ ist.

(17) Korollar. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $A \subset H$*. Es folgt*

(α) $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Span}\,(A)}$.

(β) A *total* $\Leftrightarrow A^\perp = \{0\}$.

Beweis. (α) Nach (13) drittletzter und vorletzter Punkt ist $(A^\perp)^\perp$ ein abgeschlossener Untervektorraum, der A enthält. Damit ist $M := \overline{\mathrm{Span}(A)} \subset (A^\perp)^\perp$. Sei nun $x \in (A^\perp)^\perp$. Nach (15) existiert $y \in M$ mit $x - y \in M^\perp$. Nach (13) letzter Punkt ist $M^\perp = A^\perp$ und somit $(M^\perp)^\perp = (A^\perp)^\perp$. Es folgt

$$\|x-y\|^2 = \Big\langle \underbrace{x-y}_{\in M^\perp}, \underbrace{x}_{\in (M^\perp)^\perp} - \underbrace{y}_{\in M} \Big\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y \in M.$$

(β) Nach (13) letzter Punkt gilt $A^\perp = \overline{\mathrm{Span}(A)}^\perp$. Wenn also A total ist, ist $A^\perp = H^\perp$, was nach (13) erster Punkt gleich $\{0\}$ ist. Ist umgekehrt $A^\perp = \{0\}$, dann ist $(A^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$ nach (13) erster Punkt und A ist total nach (α). □

$\boxed{\text{Üb}}$ Seien H ein Hilbertraum und $A \subset H$. Man zeige:

- $(A^\perp)^\perp = A \Leftrightarrow A$ abgeschlossener Untervektorraum.
- $((A^\perp)^\perp)^\perp = A^\perp$.

Lösung. Nach (17)(α) gilt $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Span}\,(A)}$, was ein abgeschlossener Untervektorraum ist. Für einen abgeschlossenen Untervektorraum M von H gilt offensichtlich $M = \overline{\mathrm{Span}\,(M)}$. Damit folgt die erste Behauptung. — Wendet man (17)(α) auf den abgeschlossenen Untervektorraum $A^\perp$ (siehe (13) vierter Punkt) an, so folgt $((A^\perp)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Span}\,(A^\perp)} = A^\perp$. □

(18) Orthogonale Summe. *Seien H ein Hilbertraum und V, W zwei abgeschlossene Untervektorräume, die orthogonal zueinander seien, in Zeichen $V \perp W$. Dann heißt*

$$V \bigoplus W := \{x \in H : x = v + w \text{ mit } v \in V, w \in W\}$$

die orthogonale Summe von V und W. Sie ist ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Für $x \in V \bigoplus W$ ist die Summe $x = v + w$ mit $v \in V$, $w \in W$ eindeutig und es gilt wegen (11)

$$\|x\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 .$$

Beweis. Zur Eindeutigkeit der Darstellung sei $x = v+w = v'+w'$ mit $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. Dann ist $v-v' = w'-w \in V \cap W \subset V \cap V^\perp = \{0\}$. Es folgt $v = v'$ und $w = w'$. — Offensichtlich ist $V \bigoplus W$ ein Untervektorraum. Er ist abgeschlossen, denn sei (x_n) eine gegen $x \in H$ konvergente Folge aus $V \bigoplus W$. Für $x_n = v_n + w_n$ folgt $\|v_n - v_m\|^2 + \|w_n - w_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$, weshalb insbesondere (v_n) eine Cauchy Folge in V ist. Wegen (13.25)(ii) existiert dann $v \in V$ mit $v_n \to v$. Ebenso folgt $w_n \to w \in W$. Weil $\|x_n - (v+w)\|^2 = \|v_n - v\|^2 + \|w_n - w\|^2 \to 0$, gilt $x_n \to v + w$. Somit ist $x = v + w \in V \bigoplus W$. □

(19) Orthogonale Zerlegung. *Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraums H. Dann gilt*

$$H = V \bigoplus V^\perp.$$

Beweis. Es ist lediglich $H \subset V + V^\perp$ zu zeigen. Sei $x \in H$. Mit der orthogonalen Projektion $v := P_V x$ von x auf V gemäß (15) lässt sich x darstellen als $x = \underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{x - v}_{\in V^\perp}$. □

(20) Linearform. Eine lineare Abbildung $f : H \to \mathbb{K}$ heißt Linearform auf H.

Nach (13.38) ist eine Linearform f genau dann stetig, wenn f beschränkt ist, d.h. wenn $c \geq 0$ existiert mit $|f(x)| \leq c\,\|x\| \;\forall\, x \in H$. — Sei $x_0 \in H$. Dann ist $f : H \to \mathbb{K}$, $f(x) := \langle x_0, x\rangle$ eine stetige Linearform, denn f ist linear, weil das Skalarprodukt im zweiten Argument linear ist, und beschränkt, weil gemäß der Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$|f(x)| = |\,\langle x_0, x\rangle\,| \leq \|x_0\|\,\|x\|\,.$$

(21) Darstellungssatz von Riesz. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $f : H \to \mathbb{K}$ *eine stetige Linearform. Dann existiert genau ein* $x_0 \in H$ *mit* $f(x) = \langle x_0, x\rangle \;\forall\, x \in H$.

Beweis.

- Zur Eindeutigkeit sei $\langle x_0, x\rangle = \langle x_1, x\rangle \;\forall\, x \in H$. Dann ist $0 = \langle x_0, x\rangle - \langle x_1, x\rangle = \langle x_0 - x_1, x\rangle \;\forall\, x \in H$. Es folgt insbesondere $\langle x_0 - x_1, x_0 - x_1\rangle = 0$, d.h. $\|x_0 - x_1\| = 0$, was $x_0 = x_1$ bedeutet.
- Zur Existenz betrachte den Nullraum $N := f^{-1}(\{0\})$, der offensichtlich ein Untervektorraum ist. Er ist abgeschlossen, weil $\{0\}$ abgeschlossen und f stetig ist, siehe (13.40)(iii). Wenn $N = H$, dann ist $f = 0$ und f hat die Darstellung $f(x) = \langle 0, x\rangle \;\forall\, x$, d.h. $x_0 = 0$. Sei nun $N \neq H$. Nach (19) ist dann $H = N \oplus N^\perp$ mit $N^\perp \neq \{0\}$. Daher existiert $z \in N^\perp$ mit $\|z\| = 1$. Dafür ist $\alpha := f(z) \neq 0$. Für $x \in H$ gilt
$$x = \frac{f(x)}{\alpha}z + \left(x - \frac{f(x)}{\alpha}z\right).$$
Weil $f\left(x - \frac{f(x)}{\alpha}z\right) = f(x) + f\left(-\frac{f(x)}{\alpha}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{\alpha}f(z) = f(x) - f(x) = 0$, ist $x - \frac{f(x)}{\alpha}z \in N$ und daher $0 = \left\langle z, x - \frac{f(x)}{\alpha}z\right\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{\alpha}\langle z, z\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{\alpha}$. Daraus folgt $f(x) = \alpha\,\langle z, x\rangle = \langle \overline{\alpha} z, x\rangle \;\forall\, x \in H$, d.h. $x_0 = \overline{\alpha} z$.

□

(22) Separabilität. Ein metrischer Raum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge D in X gibt, d.i. eine abzählbare Teilmenge D mit $\overline{D} = X$. *Dann ist* $\mathbb{K}^n$ *separabel, denn* $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ *bzw.* $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n \subset \mathbb{C}^n$ *ist abzählbar und dicht. Es folgt, dass jeder endlich dimensionale Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *separabel ist.*

(23) Satz. *Ein normierter Raum* V *ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare totale Teilmenge* A *besitzt.*

Beweis. Sei $A \subset V$ abzählbar und total. Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus A mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sei mit $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(A)$ bezeichnet. Offenbar ist $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(A)$ abzählbar und erfüllt $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(A)} \supset \mathrm{Span}(A) \supset \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(A)$. Daher folgt $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(A)} = \overline{\mathrm{Span}(A)} = V$. Also ist V separabel. — Die Umkehrung gilt offensichtlich. □

(24) Orthonormale Mengen. *Seien* H *ein Hilbertraum,* $A \subset H$ *orthonormal,* $V := \overline{\operatorname{Span}(A)}$*.*

(i) *Sei* (a_n) *eine Folge in* A *derart, dass* $a_n \neq a_m$ *für* $n \neq m$*. Weiter sei* (α_n) *eine Folge in* $\mathbb{K}$*. Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ *genau dann, wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$*. Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$*, dann ist* $\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ *und die Summe ist für jede Umordnung (vgl. (6.13)) gleich, d.h.* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi(n)} a_{\pi(n)}$ *für jede Bijektion* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. (I. allg. liegt keine absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ vor!)

(ii) *Sei* $x \in H$*. Dann ist* $A_x := \{a \in A : \langle a, x\rangle \neq 0\}$ *abzählbar und*

$$\sum_{a \in A} |\langle a, x\rangle|^2 := \sum_{a \in A_x} |\langle a, x\rangle|^2 < \infty.$$

Nach (i) *existiert daher die Summe* $\sum_{a\in A} \langle a, x\rangle\, a := \sum_{a \in A_x} \langle a, x\rangle\, a$*. Sie ergibt*

$$P_V x = \sum_{a \in A} \langle a, x\rangle\, a$$

die orthogonale Projektion von x *auf* V*. Insbesondere gilt die* **Bessel Ungleichung** $\|x\|^2 \geq \sum_{a\in A} |\langle a, x\rangle|^2$.

(iii) *Sei* $x \in H$*. Dann gilt*

$$x \in V \;\Leftrightarrow\; x = \sum_{a\in A} \langle a, x\rangle\, a \;\Leftrightarrow\; \textbf{Parseval Gleichung } \|x\|^2 = \sum_{a \in A} |\langle a, x\rangle|^2.$$

Beweis. (i) Nach (11) ist $\| \sum_{n=M}^{N} \alpha_n a_n\|^2 = \sum_{n=M}^{N} |\alpha_n|^2 \;\forall\, N, M \in \mathbb{N}, M \leq N$. Daher existiert $s := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, siehe (10.6), (6.6).

Es bleibt $s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi(n)} a_{\pi(n)}$ zu zeigen. Setze $b_k := \alpha_k a_k$. Sei $\epsilon > 0$ und $M \in N$ so groß, dass $\| \sum_{m>M} b_m\|^2 = \sum_{m>M} |\alpha_m|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}$. Da π surjektiv ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \cdots, M\} \subset \{\pi(1), \cdots, \pi(N)\}$. Für $n > N$ und $I_n := \{\pi(1), \cdots, \pi(n)\} \setminus \{1, \cdots, M\}$ folgt

$$\| \sum_{j=1}^{n} b_{\pi(j)} - s\| \leq \| \sum_{j=1}^{n} b_{\pi(j)} - \sum_{m=1}^{M} b_m\| + \| \sum_{m=1}^{M} b_m - s\| = \| \sum_{m \in I_n} b_m\| + \| \sum_{m>M} b_m\|,$$

was wegen (11) durch $2 \| \sum_{m>M} b_m\| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ abgeschätzt wird.

(ii) Seien $B \subset A$ endlich und $\alpha_a \in \mathbb{K}$ für $a \in B$. Dann ist $\left\|x - \sum_{a\in B} \alpha_a a\right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{a\in B} |\langle a, x\rangle - \alpha_a|^2 - \sum_{a \in B} |\langle a, x\rangle|^2$, weil $\left\|\sum_{a\in B} \alpha_a a\right\|^2 = \sum_{a\in B} |\alpha_a|^2$ nach (11), und somit

$$\left\|x - \sum_{a\in B} \alpha_a a\right\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{a\in B} |\langle a, x\rangle|^2 = \left\|x - \sum_{a\in B} \langle a, x\rangle\, a\right\|^2. \tag{$\star$}$$

Das bedeutet insbesondere, dass $\sum_{a\in B} \langle a, x\rangle\, a$ die Bestapproximation an x aus $\operatorname{Span} B$ ist. Angenommen $A_x \subset A$ ist überabzählbar. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $\{a \in A : |\langle a, x\rangle|^2 > \frac{1}{k}\}$ überabzählbar ist. Wähle $B \subset \left\{a \in A : |\langle a, x\rangle|^2 \geq \frac{1}{k}\right\}$ mit mehr als $k\|x\|^2$ Elementen. Dafür ist $\|x\|^2 - \sum_{a\in B} |\langle a, x\rangle|^2 < 0$, was ein Widerspruch zu $(\star)$ ist.

Aus $(\star)$ folgt damit sofort die Bessel Ungleichung und, weil $\sum_{a\in A} \langle a, x\rangle\, a$ nach (i) existiert, $\left\|x - \sum_{a\in B} \alpha_a a\right\|^2 \geq \left\|x - \sum_{a\in A} \langle a, x\rangle\, a\right\|^2$. Da nun $\sum_{a\in B} \alpha_a a$ ein beliebiges Element aus $\operatorname{Span}(A)$ ist, ergibt sich mit dem Projektionssatz (15)(c) der Rest der Behauptung.

(iii) Folgt aus $P_V x = x$ genau für $x \in V$ und der Gleichung in (ii)$(\star)$ für A anstelle von B. $\square$

(25) Orthonormalbasis. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann heißt $E \subset V$ eine Orthonormalbasis (ONB) von V, wenn E orthonormiert und total ist.

In der Linearen Algebra versteht man unter einer orthonormalen Vektorraumbasis von V eine Teilmenge $E \subset V$, die orthonormal ist und $\operatorname{Span} E = V$ erfüllt. Ist V als Vektorraum endlichdimensional, dann stimmen beide Basisbegriffe überein. Ist hingegen V vollständig (d.h. ein Hilbertraum) und nicht endlichdimensional, dann ist eine ONB obiger Definition keine Vektorraumbasis.

(26) Basissatz. *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) *Ist $A \subset H$, $A \neq \emptyset$ orthonormal, dann existiert eine ONB E von H mit $A \subset E$* (Basisergänzungssatz). *Jeder Hilbertraum $H \neq \{0\}$ besitzt eine ONB* (Basisexistenzsatz).

(ii) *Sind E, F zwei ONB von H, dann ist* $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$ *(d.h. E und F sind bijektiv aufeinander abbildbar).*

(iii) *H ist genau dann separabel, wenn jede ONB E von H abzählbar ist.*

(iv) *Sei H als Vektorraum m–dimensional für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $m = \operatorname{card} E$ für jede ONB E von H.*

Beweis. (i) wird mit Hilfe des Zornschen Lemmas[1] bewiesen. Die Menge $\mathcal{F} := \{L \subset H : L \text{ orthonormal}, L \supset A\}$ werde durch die Mengeninklusion partiell geordnet. Weil $A \in \mathcal{F}$, ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ eine Kette, d.h. total geordnet. Dann ist $K := \bigcup_{L \in \mathcal{K}} L$ eine obere Schranke von $\mathcal{K}$, denn

- $x, x' \in K \Rightarrow \exists\, L, L' \in \mathcal{K}$ mit $x \in L$ und $x' \in L'$ und o.E. $L \subset L' \Rightarrow x, x' \in L' \Rightarrow \langle x, x'\rangle = \delta_{xx'}$ weil L' orthonormal $\Rightarrow K$ orthonormal.
- $A \subset K$.
- $L \subset K \;\forall\, L \in \mathcal{K}$.

Daher existiert ein maximales Element $E \in \mathcal{F}$. Dieses ist eine ONB. Dazu bleibt zu zeigen, dass E total ist. Angenommen E ist nicht total. Nach (19) gibt es ein $x \in E^\perp$ mit $\|x\| = 1$. Dann ist $E' := E \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ mit $E \subset E'$, aber $E \neq E'$, was ein Widerspruch zur Maximalität von E ist. — Ist $H \neq \{0\}$, dann existiert $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ und $A := \{x\}$ ist orthonormiert. Darauf wende man nun obiges Ergebnis an.

(ii) Wenn E endlich ist, dann ist $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$ ein Ergebnis aus der Linearen Algebra. Sei also E nicht endlich. Für jedes $f \in F$ ist $E_f = \{e \in E : \langle e, f\rangle \neq 0\}$ abzählbar nach (24)(ii). Es gilt $E = \bigcup_{f \in F} E_f$, da sonst ein $e_0 \in E$ existiert derart, dass $\langle e_0, f\rangle = 0 \;\forall\, f \in F$, was zum Widerspruch $e_0 \in F^\perp = \{0\}$ führt. Hieraus folgt $\operatorname{card} E \leq \operatorname{card} F \operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} F$. Ebenso folgt $\operatorname{card} F \leq \operatorname{card} E$.

(iii) Sei H separabel und E eine ONB. Dann existiert eine abzählbare dichte Teilmenge D. Wie im Beweis von (ii) folgt $E \subset \bigcup_{y \in D} E_y$, weshalb E abzählbar ist. — Sei nun E eine abzählbare ONB. Dann ist $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}(E)$ abzählbar und dicht, vgl. den Beweis zu (23).

(iv) Diese Aussage wird in der Linearen Algebra bewiesen. □

[1] Eine nichtleere halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt, hat ein maximales Element.

(27) Dimension. Unter der Dimension $\dim \mathsf{H}$ eines Hilbertraum H versteht man die Kardinalität $\operatorname{card} \mathsf{E}$ einer seiner ONB E. In den Anwendungen sind die Hilberträume meist separabel. Diese sind abzählbar dimensional.

(28) ONB Eigenschaften. *Seien* H *ein Hilbertraum und* $\mathsf{E} \subset \mathsf{H}$ *orthonormal. Dann sind äquivalent:*

(i) E *ist eine ONB.*

(ii) $\mathsf{E}^{\perp} = \{0\}$ *(E ist total).*

(iii) F *orthonormal,* $\mathsf{E} \subset \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{E} = \mathsf{F}$ *(E ist maximal).*

(iv) $\forall x \in \mathsf{H}: \ x = \sum_{e \in \mathsf{E}} \langle e, x \rangle e$ *Entwicklung nach der Basis (E ist vollständig).*

(v) $\forall x \in \mathsf{H}: \ \|x\|^2 = \sum_{e \in \mathsf{E}} |\langle e, x \rangle|^2$ *Parseval Gleichung.*

(vi) $\forall x, y \in \mathsf{H}: \ \langle x, y \rangle = \sum_{e \in \mathsf{E}} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$ *Parseval Gleichung.*

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ist klar. — (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) gilt nach (24)(iii). — (v) folgt aus (vi), indem man $x = y$ setzt. — (iv) $\Rightarrow$ (vi): Weil das Skalarprodukt nach (6) stetig ist, folgt aus $x = \sum_{e \in \mathsf{E}} \langle e, x \rangle e$, dass $\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{e \in \mathsf{E}} \langle e, x \rangle e, y \right\rangle = \sum_{e \in \mathsf{E}} \langle \langle e, x \rangle e, y \rangle = \sum_{e \in \mathsf{E}} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$. $\square$

(29) Gram–Schmidt Orthogonalisierungsverfahren. *Seien* V *ein Vektorraum mit Skalarprodukt und* (x_n) *eine endliche oder unendliche Folge linear unabhängiger Vektoren in* V. *Es gibt eine Orthonormalfolge* (e_n) *mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{Span}(\{e_1, \ldots e_n\}) = \mathrm{Span}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

und daher mit $\mathrm{Span}(\{e_1, e_2, \ldots\}) = \mathrm{Span}(\{x_1, x_2, \ldots\})$. *Sie wird wie folgt konstruiert:*

$$y_1 := x_1, \quad e_1 := \frac{1}{\|y_1\|} y_1$$

$$y_2 := x_2 - \langle e_1, x_2 \rangle e_1, \quad e_2 := \frac{1}{\|y_2\|} y_2$$

$$\vdots$$

$$y_n := x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_k, x_n \rangle e_k, \quad e_n := \frac{1}{\|y_n\|} y_n$$

$$\vdots$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n. Zunächst ist $y_1 \neq 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der x_n. Daher ist e_1 wohldefiniert mit $\|e_1\| = 1$. — Es folgt der Induktionsschluss $n \to n+1$. Wäre $y_{n+1} = 0$, dann wäre $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x_n \rangle e_k$ und somit $x_{n+1} \in \mathrm{Span}(\{e_1, \cdots, e_n\}) = \mathrm{Span}(\{x_1, \cdots, x_n\})$ nach Induktionsvoraussetzung, was der linearen Unabhängigkeit der x_n widerspricht. Damit ist e_{n+1} wohldefiniert und normiert. Für $j \leq n$ gilt dann $\|y_{n+1}\| \langle e_{n+1}, e_j \rangle = \langle x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x_{n+1} \rangle e_k, \ e_j \rangle = \langle x_{n+1}, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle e_k, x_{n+1} \rangle} \langle e_k, e_j \rangle = \langle x_{n+1}, e_j \rangle - \langle x_{n+1}, e_j \rangle = 0$ wegen $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$ nach Induktionsvoraussetzung. Schließlich ist offensichtlich $\mathrm{Span}(\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}) = \mathrm{Span}(\{e_1, \ldots, e_n, x_{n+1}\}) = \mathrm{Span}(\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\})$. $\square$

Sei $V_n := \operatorname{Span}(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Das Gram-Schmidt Verfahren basiert auf dem Projektionssatz und der Formel aus (24)(ii) für P_{V_n}, denn $y_n = x_n - P_{V_{n-1}} x_n$ und $P_{V_n} x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k$.

(30) Eindeutigkeit Gram–Schmidt Verfahren. *Seien* $(e_n), (f_n)$ *Orthonormalfolgen mit* $\operatorname{Span}(\{e_1, \ldots, e_n\}) = \operatorname{Span}(\{f_1, \ldots, f_n\})\ \forall\, n = 1, 2, \ldots$. *Dann ist* $f_n = \langle e_n, f_n \rangle\, e_n$ *und* $|\langle e_n, f_n \rangle| = 1$*, d.h. es gilt „Eindeutigkeit bis auf eine Phase“.*

Beweis. Da $f_n \in \operatorname{Span}(\{f_1, \cdots, f_n\}) = \operatorname{Span}(\{e_1, \cdots, e_n\})$ ist $f_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f_n \rangle\, e_k$. Weiter ist f_n orthogonal zu $\operatorname{Span}(\{f_1, \cdots, f_{n-1}\}) = \operatorname{Span}(\{e_1, \cdots, e_{n-1}\})$, weshalb $\langle f_n, e_k \rangle = 0$ für $1 \le k \le n-1$, falls $n > 1$. Es folgt $f_n = \langle e_n, f_n \rangle\, e_n$ und damit $1 = \|f_n\| = |\langle e_n, f_n \rangle|\, \|e_n\| = |\langle e_n, f_n \rangle|$. $\square$

(31) Satz. *Jeder separable Vektorraum* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *mit Skalarprodukt besitzt eine ONB.*

Beweis. Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare totale Teilmenge von V. Man führe mit (x_n) –obwohl $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht notwendig linear unabhängig ist– das Gram–Schmidt Verfahren durch, wobei immer wenn $y_n = 0$ ist, x_n weggelassen und zu x_{n+1} übergegangen wird. Die orthonormale Folge (e_n) ergibt eine Orthonormalbasis von V, weil $\operatorname{Span}(\{e_1, e_2, \ldots\}) = \operatorname{Span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ gilt. $\square$

$\boxed{\text{Üb}}$ **Legendre Polynome**. *Seien* $V := \mathcal{C}[-1, 1]$ *und* $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) \frac{dx}{2}$ *für alle* $f,\ g \in V$.

- *Man zeige, dass* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein Vektorraum mit Skalarprodukt ist.*

Lösung. Dies zeigt man wie in (9).

- *Man zeige, dass die Legendre Polynome* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{(dx)^n} \left[(x^2 - 1)^n \right], n = 0, 1, 2, \ldots$ *eine orthogonale Folge bilden mit* $\operatorname{grad} P_n = n$*, Leitkoeffizienten* $l_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ *und*

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Lösung. Zunächst ist P_n in der Tat ein Polynom n–ten Grades mit dem angegebenen Leitkoeffizienten, weil es bis auf den konstanten Faktor $\frac{1}{2^n n!}$ die n–te Ableitung des Polynoms $R(x) := (x^2 - 1)^n$ vom Grad $2n$ ist. — Die Orthogonalität folgt offenbar aus der allgemeineren Aussage $\langle x^j, R^{(k)} \rangle = 0$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $j < k$, die jetzt durch Induktion nach k gezeigt wird. Für $k = 1$ ist $j = 0$ und $\langle 1, R' \rangle = \frac{1}{2} R|_{-1}^{1} = 0$. Der Schluss $k-1 \to k$ folgt durch partielle Integration $\langle x^j, R^{(k)} \rangle = \frac{1}{2} x^j R^{(k-1)}|_{-1}^{1} - j \langle x^{j-1}, R^{(k-1)} \rangle$. Der zweite Summand ist nach Induktionsvoraussetzung gleich Null und der erste verschwindet, weil $R^{(k-1)}$ eine $(n-(k-1))$–fache Nullstelle bei 1 und -1 hat. — Ganz entsprechend erhält man durch wiederholte partielle Integration, wobei die Randterme verschwinden, $(2^n n!)^2 \langle P_n, P_n \rangle = \langle R^{(n)}, R^{(n)} \rangle = \langle R, R^{(2n)} \rangle = (2n)! \langle R, 1 \rangle = (2n)! \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$, was $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{1}{2n+1}$ ergibt.

- *Sei* $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ *mit* $f_n(x) := x^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. *Man zeige: Wendet man das Gram–Schmidt Verfahren auf* (f_n) *an, erhält man eine Folge von Polynomen* Q_n *mit* $\operatorname{grad} Q_n = n$ *und positiven Leitkoeffizienten, die mit* $Q_0 = 1, Q_1 = \sqrt{3}x$ *die Dreitermrekursion*

$$\frac{n+1}{\sqrt{4(n+1)^2 - 1}} Q_{n+1} = x Q_n - \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}} Q_{n-1} \qquad (\star)$$

für $n = 1, 2, \cdots$ *erfüllen. Es gilt die Beziehung* $Q_n = \sqrt{2n+1}P_n$. *Die Legendre Polynome erfüllen die Dreitermrekursion* $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$.

Lösung. Man rechnet schnell $Q_0 = 1$, $Q_1 = \sqrt{3}x$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2 - 1)$ aus. Aus der Nullpunktsymmetrie des Maßes folgt $Q_{2n}(-x) = Q_{2n}(x)$, $Q_{2n+1}(-x) = -Q_{2n+1}(x)$, denn $\tilde{Q}_{2n}(x) := Q_{2n}(-x)$ und $\tilde{Q}_{2n+1}(x) := -Q_{2n+1}(-x)$ bilden auch eine orthonormale Folge von Polynomen mit gleichen Graden und gleichen Leitkoeffizienten, weshalb $\tilde{Q}_n = Q_n$ nach (30).

Gemäß dem Gram-Schmidt Verfahren ist generell Q_{n+1} bis auf Normierung gleich $x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \left\langle Q_k, x^{n+1} \right\rangle Q_k$. Das gilt daher auch, wenn man statt x^{n+1} das Polynom gleichen Grades xQ_n verwendet. Damit ist $\beta_n Q_{n+1} = xQ_n - \sum_{k=0}^{n} \langle Q_k, xQ_n \rangle Q_k$ mit dem Normierungsfaktor $\beta_n > 0$. Es ist $\langle Q_k, xQ_n \rangle = \langle xQ_k, Q_n \rangle = 0$ für $k \leq n-2$, weil $Q_n \perp \operatorname{Span}(\{Q_0, \cdots, Q_{n-1}\}) = \operatorname{Span}\left(\left\{1, x, \cdots, x^{n-1}\right\}\right)$. Weiter ist $\langle Q_n, xQ_n \rangle = \int_{-1}^{1} xQ_n^2 \frac{dx}{2} = 0$, weil der Integrand ungerade ist. Daher ist $\beta_n Q_{n+1} = xQ_n - \alpha_{n-1} Q_{n-1}$ mit $\alpha_{n-1} := \langle Q_{n-1}, xQ_n \rangle$. Weiter gilt $\alpha_n = \beta_n$. In der Tat ist $\alpha_{n-1} = \langle Q_{n-1}, xQ_n \rangle = \langle xQ_{n-1}, Q_n \rangle = \langle \beta_{n-1} Q_n + \alpha_{n-2} Q_{n-2}, Q_n \rangle = \overline{\beta}_{n-1} = \beta_{n-1}$. Damit gilt schließlich für $n = 1, 2, \ldots$

$$\beta_n Q_{n+1} = xQ_n - \beta_{n-1} Q_{n-1}. \qquad (\star\star)$$

Sei nun $\tilde{P}_n := \sqrt{2n+1}P_n$ für $n = 0, 1, 2 \ldots$. Nach obigem ist auch $(\tilde{P}_n)$ eine orthonormale Folge von Polynomen mit $\operatorname{grad} \tilde{P}_n = n$ und positiven Leitkoeffizienten. Nach (30) ist daher $\tilde{P}_n = Q_n$. Also gilt $\beta_n \tilde{P}_{n+1} = x\tilde{P}_n - \beta_{n-1} \tilde{P}_{n-1}$. Daraus folgt $\beta_n \sqrt{2n+3} l_{n+1} = \sqrt{2n+1} l_n$, was $\beta_n = \frac{n+1}{\sqrt{4(n+1)^2 - 1}}$ ergibt. Geht man hiermit in die Dreitermrekursion für $(\tilde{P}_n)$ folgt die behauptete Rekursion für (P_n).

- *Man zeige, dass für jedes* $x \in [-1, 1]$ *die Funktion* $F(t) := \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$ *in* $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ *die Taylorentwicklung* $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) t^n$ *mit obigen Legendre Polynomen* P_n *hat.*

33 L^p–Räume, speziell der Hilbertraum L^2

Zu den wichtigsten Funktionenräumen in Theorie und Anwendung gehören die L^p–Räume. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ irgendein Maßraum, wie zum Beispiel $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ oder allgemeiner (M, B^d_M, λ^d_M) für $M \in \mathcal{B}^d$ nach (26.26), oder $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ und μ ein gewichtetes Abzählmaß. Außerdem sei zunächst $p \in]0, \infty[$.

(1) L^p–**Raum.** Sei $\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ messbar}, \int |f(\omega)|^p d\mu(\omega) < \infty\right\}$ der Raum der p–fach integrierbaren Funktionen auf Ω. Für $p = 1$ siehe (26.25).

- Zunächst ist $\mathcal{L}^p$ ein Vektorraum. Denn seien $f, g \in \mathcal{L}^p, \alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist bekanntlich $f + \alpha g$ messbar. Weiter gilt die Abschätzung $|f(\omega) + \alpha g(\omega)|^p \leq ((1 + |\alpha|) \max\{|f(\omega)|, |g(\omega)|\})^p = (1 + |\alpha|)^p \max\{|f(\omega)|^p, |g(\omega)|^p\} \leq (1 + |\alpha|)^p (|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p)$, weshalb $\int |f + \alpha g|^p d\mu \leq (1 + |\alpha|)^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right) < \infty$.
- $\mathcal{N} := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ messbar}, f = 0\ \mu - \text{fast überall}\}$ heißt der Raum der **Nullfunktionen**. Dabei bedeutet $f = 0$ μ–fast überall, dass $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, siehe (27.6). Offensichtlich ist $\mathcal{N}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$. Für $f \in \mathcal{L}^p$ gilt nach (27.7)(β): $f \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0$.
- Im Folgenden spielt der **Quotientenraum**

  $$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$$

  von $\mathcal{L}^p(\mu)$ nach dem Nullraum die zentrale Rolle. Er besteht aus allen **Nebenklassen** $[f] = f + \mathcal{N} = \{f + n : n \in \mathcal{N}\}$ mit $f \in \mathcal{L}^p$. Die Nebenklasse $[f]$ ist die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{L}^p$, die sich von f jeweils nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, ist ein Quotientenraum ein Vektorraum, wobei die Vektorraumoperationen repräsentantenweise erfolgen. Für $[f], [g] \in L^p$ ist also

  $$[f] + \alpha[g] = [f + \alpha g]$$

  wohldefiniert. Weil offenbar $\int |f(\omega) + n(\omega)|^p d\mu(\omega) = \int |f(\omega)|^p d\mu(\omega)$, ist auch

  $$\|[f]\|_p := \left(\int |f(\omega)|^p d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

  wohldefiniert auf L^p, da repräsentantenunabhängig.

Ab jetzt gilt stets $p \geq 1$.

(2) L^p–**Norm.** *Sei* $p \in [1, \infty[$. *Dann ist* $\|\cdot\|_p$ *eine Norm auf* L^p.

Beweis. Offenbar gilt: $\|[f]\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{N} \Leftrightarrow [f] = 0 \in L^p$. Daher ist $\|\cdot\|_p$ positiv definit. Die Homogenität ist klar. Es bleibt die Dreiecksungleichung zu zeigen, die hier die Minkowski Ungleichung $\|[f] + [g]\|_p \leq \|[f]\|_p + \|[g]\|_p$ genannt wird. Vgl. (11.6) für den Spezialfall $\mathbb{C}^n \simeq L^p(\alpha)$ bez. des Abzählmaßes α auf $\{1, \ldots, n\}$. Wegen $|f(\omega) + g(\omega)|^p \leq (|f(\omega)| + |g(\omega)|)^p \,\forall\, \omega$ ist der Fall $p = 1$ klar. Außerdem ist es keine Einschränkung $f, g \geq 0$ anzunehmen. Daher folgt die Behauptung aus (3). $\square$

(3) Satz. *Seien* $h, k \geq 0$ *messbar (d.h.* $h, k \in E^\star$*) und* $p, q \in]1, \infty[$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Dann gelten*

(a) $\int hk\, d\mu \leq \left(\int h^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int k^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ *die* **Hölder Ungleichung**.

(b) $\left(\int (h+k)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int h^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int k^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ *die* **Minkowski Ungleichung**.

Man beachte, dass die Integrale in (a),(b) *auch unendlich sein können.*

Beweis. (a) Ist $\left(\int h^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, dann ist $h = 0$ μ–f.ü. und somit auch $h\,k = 0$ μ–f.ü., weshalb in diesem Fall (a) gilt. Sei daher die rechte Seite von (a) positiv und o.E. endlich. Aus der Young Ungleichung $x\,y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^p}{q}$ für x, $y \geq 0$ folgt

$$\frac{h(\omega)}{\left(\int h^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{k(\omega)}{\left(\int k^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{h(\omega)^p}{\int h^p d\mu} + \frac{1}{q} \frac{k(\omega)^q}{\int k^q d\mu}$$

für jedes $\omega \in \Omega$. Integration über Ω liefert $\frac{\int hk d\mu}{(\int h^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int k^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, was (a) beweist.

(b) $(h+k)^p = h(h+k)^{p-1} + k(h+k)^{p-1} \overset{(a)}{\Rightarrow} \int (h+k)^p d\mu \leq \left(\int h^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (h+k)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int k^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (h+k)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\int h^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int k^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int (h+k)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ wegen $(p-1)q = p$. Daraus folgt (b) wegen $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$, falls $0 < \int (h+k)^p d\mu < \infty$. Der Fall, dass das Integral null ist, ist trivial. Falls es unendlich ist, gilt die Behauptung wegen $(h+k)^p \leq (2 \sup\{k, h\})^p = 2^p \sup\{h^p, k^p\} \leq 2^p (h^p + k^p)$. □

(4) L^∞–Raum. Sei $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f$ messbar, $\exists\, c > 0$ mit $|f(\omega)| \leq c$ μ–f.ü.$\}$ der Raum der wesentlich beschränkten Funktionen auf Ω. Offensichtlich ist $\mathcal{L}^\infty$ ein Vektorraum und $\mathcal{N}$ ein Untervektorraum. Wieder betrachtet man den Quotientenraum $L^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/\mathcal{N}$. Für $[f] \in L^\infty$ nennt man

$$\|[f]\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : |f(\omega)| \leq c \ \mu\text{–f.ü.}\}$$

das **wesentliche Supremum**.

(5) L^∞–Norm. *Das wesentliche Supremum* $\|\cdot\|_\infty$ *ist repräsentantenunabhängig und definiert eine Norm auf* $L^\infty(\mu)$*. Außerdem gelten*

- $\forall\ [f] \in L^\infty\ \exists\ \mu$*–Nullmenge* $N \subset \Omega$*:* $\|[f]\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)|$.
- $\forall\ [f] \in L^\infty$, $[g] \in L^1$*:* $\|[fg]\|_1 \leq \|[f]\|_\infty \|[g]\|_1$.

Beweis. Die Repräsentantenunabhängigkeit von $\|\cdot\|_\infty$ ist offensichtlich. — Zum Beweis des ersten Punktes seien N_n μ–Nullmengen mit $\sup_{\omega \in \Omega \setminus N_n} |f(\omega)| \leq \|[f]\|_\infty + \frac{1}{n}$. Dann ist $N := \bigcup_n N_n$ eine μ–Nullmenge, die die Behauptung erfüllt. — Sei $[f] \in L^\infty$ mit $\|[f]\|_\infty = 0$. Nach dem ersten Punkt existiert eine μ–Nullmenge mit $0 = \|[f]\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)|$. Also ist $f = 0$ μ–f.ü. Das beweist, dass $\|\cdot\|_\infty$ positiv definit ist. Die Homogenität ist offensichtlich. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung sei N eine μ–Nullmenge derart, dass $\|[f]\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)|$ und $\|[g]\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |g(\omega)|$. Dann folgt $\|[f] + [g]\|_\infty \leq \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega) + g(\omega)| \leq \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)| + \sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |g(\omega)| = \|[f]\|_\infty + \|[g]\|_\infty$. — Da $\int |fg|\, d\mu = \int_{\Omega \setminus N} |fg|\, d\mu \leq (\sup_{\omega \in \Omega \setminus N} |f(\omega)|) \int |g|\, d\mu$ mit N gemäß dem ersten Punkt, gilt der zweite Punkt. □

Es ist üblich – sofern nicht missverständlich – die Nebenklassenklammern für Elemente aus L^p wegzulassen.

(6) Satz von Riesz–Fischer. *Für* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $L^p(\mu)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Der Fall $p = \infty$ wird separat bewiesen. Sei (f_n) eine CF in L^∞. Nach (5) existieren Nullmengen N_n mit $\sup_{\omega \notin N_n} |f_n(\omega)| = \|f_n\|_\infty$. Dann ist $N := \bigcup_n N_n$ eine Nullmenge mit $\|f_n\|_\infty = \sup_{\omega \notin N} |f_n(\omega)|$. Daher ist $(1_{\Omega \setminus N} f_n)$ eine CF im Banachraum $(B(\Omega), \|\cdot\|_s)$, siehe (10.5). Also existiert $f \in B(\Omega)$ mit $\|1_{\Omega \setminus N} f_n - f\|_s \to 0$. Damit ist $f \in L^\infty$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Sei jetzt $p < \infty$. Zur CF (f_n) in L^p existiert eine Teilfolge (n_k) mit $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq 2^{-k}$. (Dazu geht man wie folgt vor: $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \|f_{n_1} - f_n\|_p \leq 2^{-1}\ \forall\, n \geq n_1$; $\exists\, n_2 > n_1 \in \mathbb{N} : \|f_{n_2} - f_n\|_p \leq 2^{-2}\ \forall\, n \geq n_2$ usw.). Hiermit definiert man

$$g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\ \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \rho(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(\omega)|\ \forall \omega \in \Omega.$$

Für die n–ten Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n |g_k(\cdot)|$ gelten $\|s_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} \leq 1$ und $s_n(\omega)^p \uparrow_n \rho(\omega)^p$. Daher folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $\|s_n\|_p^p \uparrow \|\rho\|_p^p$. Da weiterhin $\int \rho^p d\mu = \|\rho\|_p^p \leq 1$ folgt schließlich nach (27.7)(γ), dass $\rho < \infty$ μ-f.ü.

Wenn $\rho(\omega) < \infty$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty g_k(\omega)$, denn $|\sum_{k=m}^n g_k(\omega)| \leq \sum_{k=m}^n |g_k(\omega)| \to 0$ für $n > m \to \infty$. Also konvergiert $\sum_{k=1}^\infty g_k$ μ–f.ü.

Nun ist $f_{n_{k+1}} = f_{n_1} + g_1 + g_2 + \cdots + g_k$ und daher $|f_{n_{k+1}}(\omega)| \leq |f_{n_1}(\omega)| + \rho(\omega)$. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega) =: f(\omega)$ μ–f.ü., sogar überall bei geeigneter Wahl der Repräsentanten von $[f_{n_k}]$. Es folgt, dass f messbar ist mit $|f| \leq |f_{n_1}| + \rho$. Daher ist $f \in \mathcal{L}^p$. Weiter folgt $\int |f(\omega) - f_{n_k}(\omega)|^p d\mu(\omega) \to 0$ für $k \to \infty$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz (26.29), denn $|f - f_{n_k}| \leq |f| + |f_{n_1}| + \rho \in \mathcal{L}^p$. Das zeigt $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$. Daher ist (f_n) eine CF mit einer gegen f konvergenten Teilfolge, weshalb $f_n \to f$ in L^p nach (14.4)(iv). □

Der Beweis von (6) zeigt auch die folgende Aussage.

(7) L^p– und punktweise Konvergenz. *Sei* $p \in [1, \infty]$ *und* (f_n) *eine Cauchy Folge in* L^p. *Dann existiert* $f \in \mathcal{L}^p$ *mit* $\|f_n - f\|_p \to 0$ *und es existiert eine Teilfolge* (n_k) *mit* $f_{n_k} \to f$ *μ–f.ü.*

$\boxed{\text{Üb}}$ Man finde ein Beispiel zu (7), in dem $(f_n(\omega))$ für kein $\omega \in \Omega$ konvergiert.

(8) Hilbertraum L^2. $L^2(\mu)$ *ist ein Hilbertraum bez. des Skalarprodukts* $\langle f, g\rangle := \int \bar{f} g d\mu$.

Beweis. Nach (3)(a) ist $\int |\bar{f} g| d\mu = \int |f||g| d\mu \leq (\int |f|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} (\int |g|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}} < \infty\ \forall\, f, g \in \mathcal{L}^2$. Also existiert $\langle f, g\rangle$ für die Repräsentanten f, g und ist auch unabhängig von der Repräsentantenwahl, denn für $n, m \in \mathcal{N}$ ist $(\overline{f + n})(g + m) = \bar{f} g$ μ–f.ü. Offenbar ist $\langle\,,\,\rangle$ linear im zweiten Argument und antisymmetrisch. Schließlich ist in der Tat $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. □

Bei der Behandlung von Operatoren auf Funktionenräumen ist oftmals die Methode der Trennung der Variablen erfolgreich. Sie findet Anwendung, wenn es gelingt, den zu untersuchenden Operator so umzuformen, dass er sich als eine Summe von Produkten von Operatoren darstellen läßt, die jeweils auf Funktionen einer Variablen wirken. Es stellt sich dann die Frage nach der Vollständigkeit der betrachteten Funktionenklasse. Der folgende Satz im Fall von L^2–Räumen gehört in diesen Zusammenhang.

(9) Faktorisierende Funktion. Seien Ω_i, $i = 1, \ldots, d$ nichtleere Mengen und $f : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Man sagt, dass f (tensiorell) faktorisiert, wenn Funktionen $f_i : \Omega_i \to \mathbb{C}$ derart existieren, dass

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_d) = f_1(\omega_1) \ldots f_d(\omega_d) \quad \forall \omega_i \in \Omega_i,\ i = 1, \ldots, d.$$

Man schreibt $f = f_1 \times \cdots \times f_d$.

(10) Beispiel. Jede Polynomfunktion in d Variablen von $\mathbb{C}^d$ in $\mathbb{C}$ ist eine Linearkombination von faktorisierenden Funktionen.

(11) Tensorprodukt von L^2–Räumen. *Seien* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ *Maßräume mit* σ*–endlichen Maßen* μ_i, $i = 1,2$ *und* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *der Produktmaßraum gemäß* (27.2)*. Dann gelten*

- $f_i \in L^2(\mu_i)$, $i = 1,2 \Leftrightarrow f_1 \times f_2 \in L^2(\mu)$.
- $f_i, g_i \in L^2(\mu_i)$, $i = 1,2 \Rightarrow \langle f_1 \times f_2, g_1 \times g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle$.
- $M_i \subset L^2(\mu_i)$ *total für* $i = 1,2 \Leftrightarrow M := \{\varphi \times \psi : \varphi \in M_1, \psi \in M_2\} \subset L^2(\mu)$ *total.*
- *Ist* E_i *eine ONB in* $L^2(\mu_i)$ *für* $i = 1,2$*, dann ist* $E := \{\varphi \times \psi : \varphi \in E_1,\ \psi \in E_2\}$ *eine ONB in* $L^2(\mu)$.

Man nennt $L^2(\mu)$ ein Tensorprodukt von $L^2(\mu_1)$ und $L^2(\mu_2)$ und schreibt $L^2(\mu) \simeq L^2(\mu_1) \otimes L^2(\mu_2)$.

Proof. Der erste Punkt folgt sofort aus dem Satz von Tonelli, weil $|f_1 \times f_2|^2 = |f_1|^2 \times |f_2|^2 = \big(|f_1|^2 \circ \mathrm{pr}_1\big)\big(|f_2|^2 \circ \mathrm{pr}_2\big)$ messbar ist. Damit gilt der zweite Punkt nach dem Satz von Fubini. Der vierte Punkt ist wegen (32.28)(i)(ii) eine unmittelbare Folge von Punkt zwei und drei.

Es bleibt, den dritten Punkt zu beweisen. Zum Nachweis der Vorwärtsrichtung sei $f \in L^2(\mu)$ und $\langle \varphi \times \psi, f \rangle = 0\ \forall\ \varphi \times \psi \in M$. Hieraus folgt $\langle \chi, f \rangle = 0\ \forall\ \chi \in V$, wobei V die lineare Hülle aller faktorisierenden Funktionen in $L^2(\mu)$ bezeichnet. Weil nämlich $L^2(\mu_1) = \overline{\mathrm{Span}\, M_1}$, folgt durch lineare und anschließend stetige Fortsetzung aufgrund von Punkt zwei, dass $\langle \varphi \times \psi, f \rangle = 0\ \forall\ \varphi \in L^2(\mu_1)$. Anschließend erfolgt analog aufgrund von Punkt eins die Ausdehnung auf V.

Für $\varphi = 1_{A_1}$ und $\psi = 1_{A_2}$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$, $\mu_i(A_i) < \infty$ für $i = 1,2$ folgt $\int_A f\, d\mu = 0$ für $A = A_1 \times A_2$. Sei $\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{A} : B \subset A,\ \int_B f\, d\mu = 0\}$. Weil $\emptyset \in \mathcal{C}$, $A \setminus B \in \mathcal{C}$ für $B \in \mathcal{C}$ und $\bigcup_n B_n \in \mathcal{C}$ für $B_n \in \mathcal{C}\ \forall\ n$, ist $\mathcal{C}$ eine σ–Algebra auf A. Sie enthält alle messbaren Rechtecke in A. Nach Definition der Produkt–σ–Algebra (siehe Kap. 27) ist daher $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{A} : B \subset A\}$. Es folgt $\int_B f\, d\mu = 0$ für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \infty$. Das bedeutet $f = 0$.

Zur Rückrichtung sei $f_1 \in L^2(\mu_1)$ mit $\langle \varphi, f_1 \rangle = 0\ \forall\ \varphi \in M_1$. Sei $\psi_0 \in M_2 \setminus \{0\}$. Dann ist $\langle \varphi \times \psi, f_1 \times \psi_0 \rangle = \langle \varphi, f_1 \rangle \langle \psi, \psi_0 \rangle = 0\ \forall\ \varphi \times \psi \in M$. Weil M total ist, folgt $f_1 \times \psi_0 = 0$. Das bedeutet $0 = \|f_1 \times \psi_0\| = \|f_1\| \|\psi_0\|$, weshalb $\|f_1\| = 0$, d.h. $f_1 = 0$. Analog folgt, dass M_2 total ist. $\square$

Ist X ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, dann nennt man $\mathrm{Tr}\,(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ den **Träger** von f.

(12) Spezialfall Lebesgue Maß. *Seien* $p \in [1, \infty]$ *und* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$. *Sind* $[f] = [g] \in L^p(\lambda^d)$ *mit* f, g *stetig, dann gilt* $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$. Das ist die Eindeutigkeit stetiger Repräsentanten. *Der Vektorraum der* C^∞*−Funktionen mit kompaktem Träger*

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} :\ f \text{ beliebig oft differenzierbar, } \mathrm{Tr}(f) \text{ kompakt} \Big\}$$

ist (mittels der Einbettung $f \to [f]$*) ein Untervektorraum von* $L^p(\lambda^d)$. *Im Fall* $p < \infty$ *liegt* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *dicht in* $L^p(\lambda^d)$, *d.h.*

$$\forall\ f \in L^p\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ g \in \mathcal{C}_c^\infty : \quad \|f - g\|_p < \epsilon$$

oder anders ausgedrückt, zu jedem $f \in L^p$ *existiert eine Folge* (g_n) *in* $\mathcal{C}_c^\infty$ *mit* $\|f - g_n\|_p \to 0$.

Beweis. Zum Nachweis der Eindeutigkeit stetiger Repräsentanten nehme man an, dass $f(x_0) \neq g(x_0)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann ist aufgrund der Stetigkeit $|f(x) - g(x)| > 0$ für alle x aus einer offenen Umgebung U von x_0. Aber U ist keine Lebesgue Nullmenge und daher $f - g \notin \mathcal{N}$. — Weil stetige Funktionen mit kompaktem Träger beschränkt sind und außerhalb einer Menge endlichen Maßes verschwinden, ist $\mathcal{C}_c^\infty \subset L^p$. — Sei nun $p < \infty$. Der Nachweis der Dichtheit von $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ erfolgt in drei Schritten.

(I) *Behauptung.* $A \in \mathcal{B}^d, \epsilon > 0 \Rightarrow \exists\ U$ *offen,* C *abgeschlossen mit* $C \subset A \subset U$ *und* $\lambda^d(U \backslash C) < \epsilon$.

Beweis. Sei zunächst $\lambda^d(A) < \infty$. Nach (25.19) existieren $I_n \in \mathcal{I}^d$ mit $\bigcup_n I_n \supset A$ und $\lambda^d(A) > \sum_n \lambda(I_n) - \frac{\epsilon}{4}$. Jedes I_n wird ersetzt durch einen offenen Quader $Q_n \supset I_n$ mit $\lambda^d(Q_n \backslash I_n) < \frac{\epsilon}{4} 2^{-n}$. Dann ist $U := \bigcup_n Q_n$ offen mit $U \supset A$ und $\lambda^d(U \backslash A) < \frac{\epsilon}{2}$. Im allgemeinen Fall wähle nach obigem $U_k \supset A_k := A \cap U_k(0)$ offen mit $\lambda^d(U_k \backslash A_k) < \frac{\epsilon}{2} 2^{-k}$. Wieder gilt $\lambda^d(U \backslash A) < \frac{\epsilon}{2}$ für $U := \bigcup_k U_k$. Jetzt wähle V offen mit $V \supset \mathbb{R}^d \backslash A$ und $\lambda^d(A \backslash (\mathbb{R}^d \backslash V)) = \lambda^d(V \backslash (\mathbb{R}^d \backslash A)) < \frac{\epsilon}{2}$. Setze $C := \mathbb{R}^d \backslash V$.

(II) *Reduktion auf den Fall* $f = 1_K$ *mit* $K \subset \mathbb{R}^d$ *kompakt.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^p$. Dann ist $f = (\mathrm{Re}\, f)^+ - (\mathrm{Re}\, f)^- + i(\mathrm{Im}\, f)^+ - i(\mathrm{Im}\, f)^-$ eine Linearkombination von vier nichtnegativen messbaren Funktionen $\leq |f|$, die daher in $\mathcal{L}^p$ liegen. Es genügt jede einzelne durch Funktionen aus $\mathcal{C}_c^\infty$ zu approximieren. Daher darf bereits $f \geq 0$ angenommen werden. Nach (26.17) existiert eine Folge (u_n) von Elementarfunktionen mit $u_n \uparrow f$, weshalb $u_n \in \mathcal{L}^p$ und $\|f - u_n\|_p \to 0$ aufgrund majorisierter Konvergenz. Es genügt also Elementarfunktionen $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ mit $\alpha_i > 0$ zu approximieren. Da $\alpha_i 1_{A_i} \leq f$, ist $1_{A_i} \in \mathcal{L}^p$, was $\lambda^d(A_i) < \infty$ bedeutet. Man kann sich somit auf die Approximation von $f = 1_A$ mit $\lambda^d(A) < \infty$ beschränken. Weil $A_n := A \cap U_n(0)$ beschränkt ist und $1_{A_n} \uparrow 1_A$, erreicht man hiermit die weitere Reduktion auf $f = 1_A$ mit beschränktem A. Gemäß dem Schritt (I) existiert zu $\epsilon > 0$ ein abgeschlossenes und damit kompaktes $K \subset A$ mit $\lambda^d(A \backslash K) < \epsilon^p$. Letzteres ergibt $\|1_A - 1_K\|_p < \epsilon$, womit die Reduktion auf $f = 1_K$ erreicht ist.

(III) **Friedrichs Glättung.**

Sei $f = 1_K$ mit $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und sei $\epsilon > 0$. Nach Schritt (I) existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ mit $U \supset K$ und $\lambda^d(U \backslash K) < \epsilon^p$. Dann ist $C := \mathbb{R}^d \backslash U$ abgeschlossen mit $C \cap K = \emptyset$, weshalb $\alpha := \inf\{|b - a| : b \in C, a \in K\} > 0$. Sei $\delta := \frac{\alpha}{3}$. Setze $K_\delta := \big\{ y \in \mathbb{R}^d : \exists a \in K \text{ mit } |y - a| \leq \delta \big\}$ und ebenso $K_{2\delta}$. Es ist $K_{2\delta} \subset U$, denn zu $x \in K_{2\delta}$ und $b \in C$ existiert $a \in K$ mit $|x - b| \geq$

$|b-a| - |a-x| \geq \alpha - 2\delta = \delta$, weshalb $x \notin C$, was $x \in U$ heißt. Nun wird eine C^∞–Funktion $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

- $h(\mathbb{R}^d) \subset [0,1]$
- $h|K = 1$
- $h|(\mathbb{R}^d \backslash K_{2\delta}) = 0$.

Für diese gilt dann $1_K \leq h \leq 1_U$ und $\|h - 1_K\|_p^p = \int (h - 1_K)^p \, d\lambda^d \leq \int (1_U - 1_K)^p d\lambda^d = \int 1_{U\backslash K} d\lambda^d = \lambda^d(U\backslash K) < \epsilon^p$ wie gewünscht.

Zur Konstruktion von h sei $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\rho \geq 0$, $\rho(x) = 0 \quad \forall\ |x| \geq 1$ und $\int \rho \, d\lambda^d = 1$, z.B. $\rho(x) = \beta \exp\left((|x|^2 - 1)^{-1}\right)$ für $|x| < 1$ mit $\beta > 0$ die Normierungskonstante. Setze $\rho_\delta(x) := \delta^{-d}\rho(\frac{1}{\delta}x)$ für $x \in \mathbb{R}^d$ und $\delta > 0$. Dann hat die Friedrichs Glättung von 1_{K_δ}

$$h(x) := \int 1_{K_\delta}(y)\rho_\delta(x-y) \, d\lambda^d(y)$$

die gewünschten Eigenschaften. Zunächst ist die Existenz des Integrals klar, weil $y \to \rho_\delta(x-y)$ stetig ist und K_δ kompakt ist. Weiter ist offensichtlich $h(x) \geq 0$ und $h(x) \leq \int \rho_\delta(x-y) \, d\lambda^d(y) = \int \rho_\delta(y) d\lambda^d(y) = 1 \ \forall x$ wegen der Translations- und Spiegelungsinvarianz des Lebesgue Maßes. Für $a \in K$ ist $h(a) = \int \rho_\delta(a-y) \, d\lambda^d(y) = 1$, weil $\rho_\delta(x) = 0$ für $|x| \geq \delta$ und $|a-y| > \delta$ für $y \notin K_\delta$. Für $x \in \mathbb{R}^d \backslash K_{2\delta}$ ist $h(x) = 0$, denn für $y \in K_\delta$ ist $|x-y| \geq |x-a| - |a-y| > 2\delta - \delta = \delta$ mit geeignetem $a \in K$, weshalb $\rho_\delta(x-y) = 0$. Schließlich ist $h \in \mathcal{C}^\infty$ mit $\partial^\nu h(x) = \int_{K_\delta} (\partial^\nu \rho_\delta)(x-y) d\lambda^d(y)$ in der Notation von (18.4). Die Vertauschbarkeit von Integration und Differenziation folgt wie im Beweis zu (20.3)(b) bei Induktion nach $|\nu|$. □

(13) Lemma. *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Sind* $W \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $f \in \mathcal{L}^p$ *mit* $\{f(x) \neq 0\} \subset W$ *und* $\epsilon > 0$, *dann existiert* $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ *mit* $\mathrm{Tr}\, g \subset W$ *und* $\|f - g\|_p < \epsilon$.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Beweis von (12) II, III. □

(14) Dichtheit von $\mathcal{C}_c^\infty$. *Seien* $1 \leq p < \infty$ *und* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (M, \mathcal{B}_M^d, \lambda_M^d)$ *mit* $M \in \mathcal{B}^d$ *gemäß (26.26). Ist* $M = W \cup N$, *wobei* $W \subset \mathbb{R}^d$ *offen und* N *eine* λ^d*–Nullmenge ist, dann liegt* $\mathcal{C}_c^\infty(W)$ *dicht in* $L^p(\lambda_M^d)$.

Beweis. Mit (27.8) sind $L^p(\lambda_M^d)$ und $L^p(\lambda_W^d)$ offensichtlich identifizierbar. Die Behauptung folgt damit aus (13). □

$\boxed{\text{Üb}}$ Man zeige, dass die Menge der C_c^∞–Funktionen auf $\mathbb{R}^d$, welche faktorisieren, total in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \leq p < \infty$ ist.

(15) Spezialfall Gewichteter Familienraum. *Seien* $\mu_\omega \in]0, \infty[$ *für* $\omega \in \Omega$. *Man betrachtet auf* Ω *die* σ*–Algebra* $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ *und darauf das gewichtete Abzählmaß* μ *mit* $\mu(A) := \sum_{\omega \in A} \mu_\omega$. *Sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Dann heißt* $\ell^p(\mu) := L^p(\mu)$ *der gewichtete Familienraum. Es sind im Fall* $p < \infty$

$$\ell^p(\mu) = \left\{ x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega} : x_\omega \in \mathbb{C}, \sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega |x_\omega|^p < \infty \right\} \quad \textit{und} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega |x_\omega|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $\sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega |x_\omega|^p := \sup\left\{\sum_{\omega\in F} \mu_\omega |x_\omega|^p : F \subset \Omega, F \text{ endlich}\right\}$, *und im Fall* $p = \infty$

$$\ell^\infty(\Omega) = \left\{ x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega} \subset \mathbb{C} : \sup_{\omega\in\Omega} |x_\omega| < \infty \right\} \quad \textit{und} \quad \|x\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |x_\omega|.$$

Alle diese Räume haben den gemeinsamen Untervektorraum der **abbrechenden Familien**

$$\ell_c := \{x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega} : x_\omega \in \mathbb{C}, \{\omega \in \Omega : x_\omega \neq 0\} \text{ endlich } \}.$$

Spezielle abbrechende Familien sind e_ι *für* $\iota \in \Omega$ *mit* $e_{\iota\omega} := (\mu_\iota)^{-\frac{1}{p}} \delta_{\iota\omega}$. *Sei* $E := \{e_\iota : \iota \in \Omega\}$. *Es gelten*

- $\ell_c = \text{Span}\{E\}$.
- ℓ_c *ist dicht in* $\ell^p(\mu)$ *für* $1 \leq p < \infty$.
- E *ist total in* $\ell^p(\mu)$ *für* $1 \leq p < \infty$.
- E *ist eine ONB in* $\ell^2(\mu)$.

Beweis. Der erste Punkt ist offensichtlich. — Zu $x \in \ell^p(\mu)$ und $\epsilon > 0$ existiert nach Definition der Summe eine endliche Teilmenge $F \subset \Omega$ mit $\epsilon^p + \sum_{\omega\in F} \mu_\omega |x_\omega|^p > \sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega |x_\omega|^p$. Setze $\tilde{x}_\omega := x_\omega$ für $\omega \in F$ und $x_\omega := 0$ sonst. Es folgt $\tilde{x} := (\tilde{x}_\omega) \in l_c(\Omega)$ und $\|x - \tilde{x}\|_p^p = \sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega |x_\omega - \tilde{x}_\omega|^p = \sum_{\omega\in\Omega\setminus F} \mu_\omega |x_\omega|^p < \epsilon^p$, d.h. $\|x - \tilde{x}\|_p < \epsilon$. Das zeigt den zweiten Punkt. — Der dritte Punkt folgt sofort aus den beiden ersten. — Schließlich bleibt zu zeigen, dass E orthonormal ist: $\langle e_\iota, e_{\iota'} \rangle = \sum_{\omega\in\Omega} \mu_\omega \overline{e_{\iota\omega}} e_{\iota'\omega} = \delta_{\iota\iota'} \mu_\iota |e_{\iota\iota}|^2 = \delta_{\iota\iota'}$. □

(16) Spezialfall Hilbertscher Folgenraum. Im Fall, dass μ das Abzählmaß auf $\mathbb{N}$ ist, d.h. $\mu_n = 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, schreibt man $\ell^p := \ell^p(\mu)$. Der Hilbertraum ℓ^2 heißt der Hilbertscher Folgenraum oder Klein-ℓ-2-Raum.

$\boxed{\text{Üb}}$ Gemäß (15) ist $E = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine ONB von ℓ^2. Für $t \in]0, 1[$ sei $x_t := (t, t^2, t^3, \ldots)$. Man zeige

- $\text{Span}\, E \neq \ell^2$. Damit ist E keine Vektorraumbasis von ℓ^2.
- $x_t \in \ell^2 \;\forall\, t \in]0, 1[$.
- $\{x_t : t \in]0, 1[\}$ ist linear unabhängig.
- $\ell_c \cap \text{Span}\{x_t : t \in]0, 1[\} = \{0\}$. Insbesondere ist $\{x_t : t \in]0, 1[\}$ keine Vektorraumbasis von ℓ^2.

Lösung. Nach (15) ist $\operatorname{Span} E = \ell_c$ und $(\frac{1}{n})_n \in \ell^2 \setminus \ell_c$. Das zeigt den ersten Punkt. — $\sum_{n=1}^{\infty} x_{t,n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} = \frac{t^2}{1-t^2} < \infty$, was den zweiten Punkt zeigt. — Zum dritten Punkt seien $t_1, \ldots, t_m$ paarweise verschieden und $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{t_j} = 0$. Letzteres bedeutet $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j t_j^i = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Die $m \times m$ Vandermonde Matrix $V := (t_j^i)_{ij}$ ist bekanntlich invertierbar, woraus $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ folgt. — Zum letzten Punkt sei $a = (a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots) \in \ell_c \cap \operatorname{Span}\{x_t : t \in]0,1[\}$. Dann existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{t_j} = a$. Daraus folgt $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j t_j^{k+i} = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Auch die $m \times m$ Matrix $(t_j^{k+i})_{ij}$ ist invertierbar, da ihre Determinante gleich $(t_1 \cdots t_m)^k \det V \neq 0$ ist. Es folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ und damit $a = 0$. $\square$

(17) Anordnung der ℓ^p–Räume. *Seien $0 < r \leq s$ und $a_n \geq 0$ mit $\sum_n a_n^r < \infty$. Dann gilt $(\sum_n a_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\sum_n a_n^r)^{\frac{1}{r}}$ (Spezialfall der Jensen Ungleichung). Wegen $\|\cdot\|_s \leq \|\cdot\|_r$ ist $l^r \subset l^s$ und, im Fall $r \geq 1$, die identische Einbettung $l^r \hookrightarrow l^s$ ist stetig.*

Beweis. O.E. sei $\sum_n a_n^r =: c > 0$. Dann gilt: $\sum_n \left(\frac{a_n}{c^{\frac{1}{r}}}\right)^r = 1 \Rightarrow \frac{a_n}{c^{\frac{1}{r}}} \leq 1 \Rightarrow (\frac{a_n}{c^{\frac{1}{r}}})^s \leq (\frac{a_n}{c^{\frac{1}{r}}})^r \Rightarrow \sum_n (\frac{a_n}{c^{\frac{1}{r}}})^s \leq 1 \Rightarrow (\sum_n a_n^s)^{\frac{1}{s}} \leq c^{\frac{1}{r}} = (\sum_n a_n^r)^{\frac{1}{r}}$. $\square$

(18) Anordnung der L^p–Räume. *Sei $1 \leq r \leq s$. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem Maß μ. Dann gilt*

$$\mathcal{L}^s(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$$

mit $\|f\|_r \leq \mu(\Omega)^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})} \|f\|_s$. Damit ist die identische Einbettung $L^s(\mu) \hookrightarrow L^r(\mu)$ stetig. Die Aussagen gelten auch für $s = \infty$ mit $\frac{1}{\infty} := 0$.

Beweis. O. E. sei $s > r$. Man setze $t := \frac{rs}{s-r}$. Dann ist $p := \frac{s}{r} > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für $q := \frac{t}{r}$. Man wendet nun die Hölder Ungleichung (3)(a) auf $|f|^r \cdot 1$ an. Es folgt $\int |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int |f|^{rp} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int 1^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^s d\mu\right)^{\frac{r}{s}} \mu(\Omega)^{\frac{r}{t}}$, was die Behauptung ergibt. Der Fall $s = \infty$ ist leicht zu zeigen. $\square$

Ergänzung zu Fourierreihen

Die Ergänzung bezieht sich auf das Kapitel 12, wo die Fourierreihen für Regelfunktionen untersucht werden. Für $f \in R[0, 2\pi]$ ist

$$Sf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}$$

die Fourierreihe von f an der Stelle $x \in [0, 2\pi]$. Die k–ten Fourierkoeffizienten lauten

$$\widehat{f}_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi}.$$

Für $\nu := \frac{1}{2\pi} \lambda^1_{[0,2\pi]}$ steht uns inzwischen der Raum $\mathcal{L}^1(\nu) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : f\ \nu\text{–integrierbar}\}$ zur Verfügung. Da $|e^{-ikx} f(x)| = |f(x)|$, sind die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}_k, k \in \mathbb{Z}$ und somit die Fourierreihe Sf auch für $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ definiert. Es gelten die Inklusionen

$$R[0, 2\pi] \subset \mathcal{L}^\infty(\nu) \subset \mathcal{L}^2(\nu) \subset \mathcal{L}^1(\nu),$$

weil $R[0,2\pi] \subset B(0,2\pi)$ nach der Bemerkung zu (9.11) und $R[0,2\pi] \subset \mathcal{L}^1(\nu)$ nach (26.27), weil $\mathcal{L}^\infty(\nu) \subset \mathcal{L}^2(\nu)$, da ν endlich ist, und schließlich $\mathcal{L}^2(\nu) \subset \mathcal{L}^1(\nu)$ nach (18).

Die Fourierkoeffizienten sind für alle Funktionen einer Nebenklasse gleich, d.h. $\widehat{f}_k = \widehat{g}_k \;\forall\, g \in [f] \in L^1(\nu)$. Daher ist die Fourierreihe für Elemente aus $L^1(\nu)$ definiert.

Im Hilbertraum $L^2(\nu)$ ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $e_k(x) = e^{ikx}$ für $x \in [0,2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ eine orthonormale Familie, d.h. $\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl} \;\forall\, k,l \in \mathbb{Z}$, und die Fourierkoeffizienten für $f \in L^2(\nu)$

$$\widehat{f}_k = \langle e_k, f\rangle$$

sind die Entwicklungskoeffizienten bez. dieses Orthonormalsystems. Daher ist das N–te zu f gehörige trigonometrisches Polynom (12.3)

$$S_N f = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}_k e_k$$

die orthogonale Projektion $P_{\mathcal{T}_N} f$ von f auf den $(2N+1)$–dimensionalen Untervektorraum

$$\mathcal{T}_N := \operatorname{Span}\{e_{-N}, \cdots, e_N\}.$$

Insbesondere gilt $\|f\|_2^2 = \|S_N f\|_2^2 + \|f - S_N f\|_2^2$ und $\|S_N f\|_2 \le \|f\|_2 \;\forall\, f \in L^2(\nu)$.

(19) Fourierreihe für L^2–Funktionen. *Die Menge $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB von $L^2(\nu)$. Für $f \in L^2(\nu)$ gilt daher $\|S_N f - f\|_2 \to 0$ für $N \to \infty$ und die Fouriereihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e_k$ ist die Entwicklung von f nach dieser Basis.*

Beweis. Sei zunächst f stetig und 2π–periodisch. Dann gilt $\|f - \sigma_{N-1} f\|_2^2 = \int |f - \sigma_{N+1} f|^2 d\nu \le \|f - \sigma_{N+1} f\|_s^2 \cdot 1 \overset{N\to\infty}{\to} 0$ nach dem Satz von Fejér (12.9)(b). Sei nun $f \in L^2(\nu)$ beliebig und $\epsilon > 0$. Nach (14) existiert eine $\mathcal{C}^\infty$–Funktion g mit Träger in $]0,2\pi[$ und $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Weil $\sigma_{N+1} g \in \mathcal{T}_N$ und weil g 2π–periodisch stetig fortgesetzt werden kann, gilt $\|S_N g - g\|_2 \le \|\sigma_{N+1} g - g\|_2 < \epsilon$ für alle $N \in \mathbb{N}$ groß genug. Weiter ist $\|S_N g - S_N f\|_2 = \|P_{\mathcal{T}_N}(g - f)\|_2 \le \|g - f\|_2 < \epsilon$. Damit folgt

$$\|f - S_N f\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - S_N g\|_2 + \|S_N g - S_N f\|_2 < 3\epsilon.$$

Schließlich ist $\|f\|_2^2 = \|S_N f\|_2^2 + \|f - S_N f\|_2^2$, weshalb $\|S_N f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |\langle e_k, f\rangle|^2 \overset{N\to\infty}{\to} \|f\|_2^2$. Damit gilt die Parseval Gleichung und $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB nach (32.28). □

(20) Korollar. *$\varphi : L^2(\nu) \to \ell^2(\mathbb{Z}), f \mapsto (\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Hilbertraumisomorphismus, d.h. φ ist linear, bijektiv und $\langle \varphi(f), \varphi(g)\rangle_{\ell^2} = \langle f, g\rangle_{L^2} \;\; \forall\, f, g \in L^2(\nu)$.*