

Analysis 2 für Physiker *

MA9203

Domenico P.L. Castrigiano †

*Vorlesungsskript SS 2010 erstellt von Dipl. Math. W.Kinzner

†Zentrum Mathematik TU München

Inhaltsverzeichnis

12	Fourierreihen	4
13	Metrische Räume	18
14	Kompaktheit	32
15	Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	39
16	Kurven im \mathbb{R}^n	53
17	Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	60
18	Mittelwertsatz und Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	70
19	Implizite Funktionen	76
20	Parameterabhängige Integrale	85
21	Kurvenintegrale	88
22	Gewöhnliche Differentialgleichungen	96

12 Fourierreihen

(1) **Definition.** Seien $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$. Dann heißt

$$T(x) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ein **trigonometrisches Polynom** vom Grad $\leq N$.

Offenbar ist T stetig und 2π -periodisch, d.h. es gilt $T(x + 2\pi) = T(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Eine einfache Anwendung von (7.20) ergibt, dass damit T sogar gleichmäßig stetig ist. Die Koeffizienten c_k sind durch T eindeutig bestimmt, denn

$$\int_0^{2\pi} T(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \sum_{j=-N}^N c_j \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}}_{=\delta_{jk}} = c_k.$$

Ziel ist die Approximation von Regelfunktionen durch trigonometrische Polynome. Wir erinnern, dass nach (9.16) Regelfunktionen solche Funktionen sind, wofür alle links- und rechtsseitigen Grenzwerte existieren, weshalb insbesondere stetige oder monotone Funktionen oder Funktionen beschränkter Variation über $[a, b]$ dazugehören, siehe (9.17). (Die folgenden Resultate für Regelfunktionen lassen sich teilweise auf die größere Klasse der sog. Lebesgue-integrierbaren Funktionen verallgemeinern. Wir werden in Kapitel 33 darauf zurückkommen.)

Für $f, g \in R[0, 2\pi]$ setze

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \frac{dx}{2\pi} \quad \text{und} \quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}}.$$

Dann ist $\|\cdot\|_2$ nichtnegativ, homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung:

- $\|f\|_2 \geq 0$
- $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
- $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

Beweis der Dreiecksungleichung. Sei (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_n \xrightarrow{\text{glm}} f$. Daraus folgt, dass auch $|\varphi_n|^2 \xrightarrow{\text{glm}} |f|^2$. Wegen (9.14) genügt es daher, die Dreiecksungleichung für Treppenfunktionen zu zeigen. Diese folgt aus der Minkowski Ungleichung. \square

Eine Funktion f auf $[a, b]$, die nur an endlich vielen Stellen ungleich Null ist, ist offenbar eine Regelfunktion mit $\|f\|_2 = 0$. Das zeigt, dass $\|\cdot\|_2$ auf $R[0, 2\pi]$ nicht positiv definit und somit keine Norm auf $R[0, 2\pi]$ ist. Siehe jedoch die folgende Übung.

Üb Man zeige, dass $f = 0$ ist, falls f stetig ist mit $\|f\|_2 = 0$. Also ist $(C[0, 2\pi], \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum.

(2) Grundlegendes Orthonormalsystem. Sei $e_k(x) := e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [0, 2\pi]$. Dann gilt offenbar $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$.

(3) Definition. Für $f \in R[0, 2\pi]$ und $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}_k := \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi} = \langle e_k, f \rangle$$

der k -te **Fourierkoeffizient** von f und

$$Sf(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} := \left(\sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

die **Fourierreihe** von f an der Stelle $x \in [0, 2\pi]$. Weiter heißt

$$S_N f := \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e_k$$

das N -te zu f gehörige trigonometrische Polynom.

Im Allgemeinen liegt weder die Konvergenz von $(S_N f(x))_{N \in \mathbb{N}}$ für einzelne x vor, noch ggf. die Gleichheit $Sf(x) = f(x)$. Die Stetigkeit von f und die Gleichheit $f(0) = f(2\pi)$ reichen dazu nicht aus.

(4) Folgerung aus der Orthonormalität. Seien $T := \sum_{k=-N}^N a_k e_k$ und $S := \sum_{k=-N}^N b_k e_k$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ zwei trigonometrische Polynome. Dann ist

$$\langle T, S \rangle = \left\langle \sum_{k=-N}^N a_k e_k, \sum_{j=-N}^N b_j e_j \right\rangle = \sum_{k,j=-N}^N \overline{a_k} b_j \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=-N}^N \overline{a_k} b_k.$$

Insbesondere ist $\|S_N f\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |\hat{f}_k|^2$ für $f \in R[0, 2\pi]$ und $N \in \mathbb{N}$.

(5) Bestapproximation. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ und T ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq N$ mit $T \neq S_N f$. Dann gilt:

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N f\|_2^2 < \|f - T\|_2^2.$$

Das bedeutet, dass $S_N f$ die Bestapproximation von f ist bezüglich $\|\cdot\|_2$ durch trigonometrische Polynome vom Grad $\leq N$. Insbesondere gilt für alle $N \in \mathbb{N}$:

- $\|f\|_2^2 = \|S_N f\|_2^2 + \|f - S_N f\|_2^2$ **Projektionssatz**
- $\|S_N f\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |\hat{f}_n|^2 \leq \|f\|_2^2$ **Bessel Ungleichung**

Beweis. $\|f - T\|_2^2 = \langle f - T, f - T \rangle = \langle f, f \rangle - \langle T, f \rangle - \langle f, T \rangle + \langle T, T \rangle = \|f\|_2^2 - \sum_k \overline{c_k} \langle e_k, f \rangle - \sum_k c_k \langle f, e_k \rangle + \sum_k \overline{c_k} c_k = \|f\|_2^2 - \sum_k \overline{c_k} \hat{f}_k - \sum_k c_k \hat{f}_k + \sum_k \overline{c_k} c_k = \|f\|_2^2 - \sum_k |\hat{f}_k|^2 + \sum_k |c_k - \hat{f}_k|^2.$

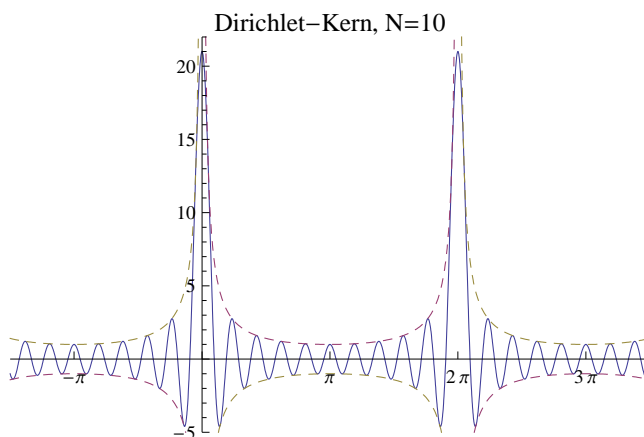
Daher ist $\|f - T\|_2$ minimal genau dann, wenn $\sum_k |c_k - \hat{f}_k|^2 = 0$, d.h. wenn $c_k = \hat{f}_k \forall k$. Daraus folgt die Behauptung. \square

(6) **Dirichlet Kern.** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^N \left(\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) \frac{dt}{2\pi} \right) e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=-N}^N e^{ik(x-t)} \right) \frac{dt}{2\pi} = \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t) \frac{dt}{2\pi} \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{ikt} = \begin{cases} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} & \text{für } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{für } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \quad (*)$$

D_N heißt der Dirichlet Kern N-ten Grades.



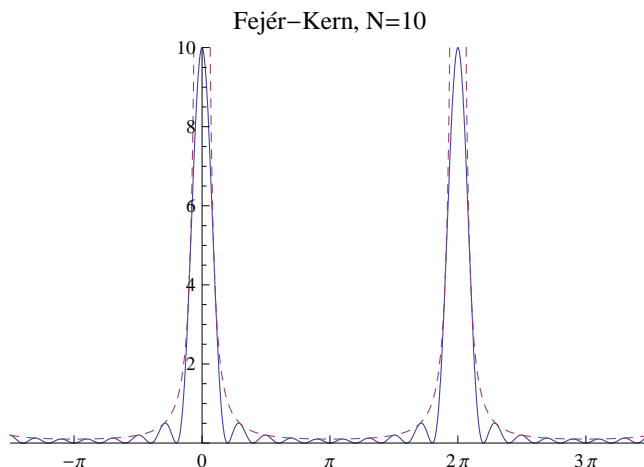
Üb Beweise die Formel (*). Hinweis: Endliche geometrische Reihe.

Um die Konvergenz von $(S_N f)_N$ zu verbessern, bildet man die **Cesàro Mittel** davon. Siehe (11).

(7) **Fejér Kern.** Das Cesàro Mittel $\sigma_N f := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f$ ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad $< N$. Es gilt $\sigma_N f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) F_N(x-t) \frac{dt}{2\pi} \forall x \in \mathbb{R}$ mit

$$F_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} Nt}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 & \text{für } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N & \text{für } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \quad (**)$$

F_N heißt der Fejér Kern N-ten Grades. Eine zusätzliche günstige Eigenschaft von F_N gegenüber D_N ist die Nichtnegativität $F_N(t) \geq 0$.



Üb Beweise die Formel (**). Hinweis: Weise zunächst $(\sin \frac{t}{2})^2 D_k(t) = \frac{1}{2} (\cos kt - \cos(k+1)t)$ nach.

(8) Lemma zum Fejér Kern. F_N hat folgenden Eigenschaften.

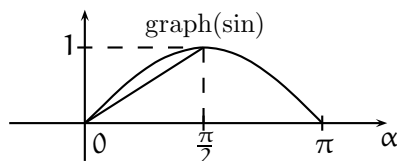
- (i) F_N ist 2π -periodisch, d.h. $F(t+2\pi) = F(t) \forall t$, und gerade, d.h. $F(-t) = F(t) \forall t$.
- (ii) $F_N \geq 0$.
- (iii) $\int_0^{2\pi} F_N(t) \frac{dt}{2\pi} = 1$.
- (iv) $\forall \epsilon > 0 \forall r \in]0, \pi[\exists M \in \mathbb{N} : \int_{-r}^r F_N(t) \frac{dt}{2\pi} > 1 - \epsilon \quad \forall N \geq M$.

Beweis. (i) und (ii) sind klar.

(iii) Weil $F_N = \frac{1}{N}(D_0 + \dots + D_{N-1}) = \frac{1}{N}(e_0 + \underbrace{e_{-1} + e_0 + e_1}_{D_1} + \dots + \underbrace{e_{-N+1} + \dots + e_0 + \dots + e_{N-1}}_{D_{N-1}})$

und $\int_0^{2\pi} e_k \frac{dt}{2\pi} = \delta_{0k}$, gilt die Behauptung.

(iv) Es ist $\sin \alpha > \frac{2}{\pi} \alpha$ für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:



Hiermit folgt $F_N(t) \leq \frac{1}{N} \frac{1^2}{(\frac{2}{\pi} \frac{1}{2} t)^2} = \frac{\pi^2}{Nt^2}$ für $0 < |t| \leq \pi$ und daher $\int_r^\pi F_N(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

□

(9) Satz von Fejér.

(a) Seien $f \in R[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma_N f(x_0) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(f(x_{0-}) + f(x_{0+})) \text{ für } x_0 \in]0, 2\pi[, \\ \sigma_N f(x_0) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(f(0+) + f(2\pi-)) \text{ für } x_0 \in \{0, 2\pi\}. \end{aligned}$$

(b) Für $f \in C[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$ gilt $\sigma_N f \xrightarrow{\text{glm}} f$.

Beweis. Man bilde die 2π -periodische Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x + k2\pi) := f(x) \forall x \in [0, 2\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Aus (7) folgt $\sigma_N \tilde{f}(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x_0 - t) F_N(t) \frac{dt}{2\pi}$, weil der Intergrand 2π -periodisch ist.

(a) Sei $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Weil $\int_0^{\pi} F_N(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}$ nach (8)(i),(iii) und weil $F_N(t) \geq 0$ nach (8)(ii), folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \tilde{f}(x_0 - t) F_N(t) \frac{dt}{2\pi} - \frac{1}{2} \tilde{f}(x_{0-}) \right| &= \left| \int_0^{\pi} (\tilde{f}(x_0 - t) - \tilde{f}(x_{0-})) F_N(t) \frac{dt}{2\pi} \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\pi} |\tilde{f}(x_0 - t) - \tilde{f}(x_{0-})| F_N(t) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und dazu $r \in]0, \pi[$ derart, dass $|\tilde{f}(x_0 - t) - \tilde{f}(x_{0-})| < \epsilon$ für $t \in]0, r]$. Wähle $M(\epsilon, r)$ gemäß (8)(iv). Dann gilt $\forall N \geq M(\epsilon, r)$:

$$\int_0^{\pi} |\tilde{f}(x_0 - t) - \tilde{f}(x_{0-})| F_N(t) \frac{dt}{2\pi} \leq \epsilon \int_0^r F_N(t) \frac{dt}{2\pi} + 2\|\tilde{f}\|_s \int_r^{\pi} F_N(t) \frac{dt}{2\pi} \leq \epsilon + \|\tilde{f}\|_s \epsilon.$$

Das zeigt $\int_0^{\pi} \tilde{f}(x_0 - t) F_N(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \tilde{f}(x_{0-})$. Ebenso folgt $\int_{-\pi}^0 \tilde{f}(x_0 - t) F_N(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \tilde{f}(x_{0+})$.

Damit gilt $\sigma_N \tilde{f}(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\tilde{f}(x_{0+}) + \tilde{f}(x_{0-}))$ für jedes $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Das beweist (a).

(b) Beachte, dass \tilde{f} gleichmäßig stetig ist. Daher ist $r > 0$ so wählbar, dass $|\tilde{f}(x - t) - \tilde{f}(x)| < \epsilon \forall 0 \leq |t| \leq r \forall x \in \mathbb{R}$. Damit folgt $|\sigma_N \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x)| \leq \epsilon(1 + \|\tilde{f}\|_s) \forall x \in \mathbb{R} \forall N \geq M(\epsilon, r)$. \square

(10) Approximation im quadratischen Mittel. Für $f \in R[0, 2\pi]$ gilt

$$\|\sigma_N f - f\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Man sagt, $(\sigma_N f)_N$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f .

Beweis. (a) Sei zunächst $f \in C[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gilt nach (9)(b)

$$\|\sigma_N f - f\|_2^2 \stackrel{(5)}{\leq} \|\sigma_N f - f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |\sigma_N f(t) - f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} \leq \|\sigma_N f - f\|_s^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

(b) Sei nun $f \in R[0, 2\pi]$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $g \in C[0, 2\pi]$ mit $g(0) = g(2\pi)$ und $\|f - g\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$, siehe (c). Damit schätzt man ab

$$\|\sigma_N f - f\|_2 \leq \|\sigma_N f - \sigma_N g\|_2 + \|\sigma_N g - g\|_2 + \|g - f\|_2.$$

Da $\|g - f\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$ nach Wahl, $\|S_N g - g\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle N groß genug nach (a), und $\|S_N f - S_N g\| = \|S_N(f - g)\|_2 \leq \|f - g\|_2 \leq \frac{\epsilon}{3}$ nach (5), folgt die Behauptung.

(c) Es bleibt die Existenz von g zu zeigen. Dazu wird zunächst die Regelfunktion f bez. $\|\cdot\|_s$ durch eine Treppenfunktion φ approximiert. Dann approximiert man φ bez. $\|\cdot\|_2$ durch eine stetige Funktion g , indem man die Indikatorfunktionen $1_{]a,b[}$ bez. $\|\cdot\|_2$ durch stetige Funktionen approximiert. \square

Üb Man führe die Beweisskizze in (10)(c) aus.

(11) Cesàro Mittel. Seien X ein normierter Raum, (a_n) eine Folge in X und $c_n := \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ das Cesàro Mittel, d.i. das arithmetische Mittel der ersten n Folgenglieder. Konvergiert (a_n) gegen $a \in X$, dann auch (c_n) .

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\|a_k - a\| < \frac{\epsilon}{2} \forall k > N$. Sei $N_1 := \max\left\{N, \frac{2}{\epsilon} \sum_{k=1}^N \|a_k - a\|\right\}$. Für $n > N_1$ folgt

$$\begin{aligned} \|c_n - a\| &= \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) - a \right\| = \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - a) \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|a_k - a\| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \|a_k - a\| + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \|a_k - a\| \leq \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^N \|a_k - a\| + \frac{1}{n} (n - N) \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

\square

Ein Beispiel, wofür die Umkehrung von Lemma (11) nicht gilt, ist offenbar die Folge $(-1)^n$. — Es folgt ein weiteres Korollar zum Satz von Fejér.

(12) Grenzwert einer Fourierreihe. Sei $f \in R[0, 2\pi]$ und $x_0 \in [0, 2\pi]$. Falls $Sf(x_0)$ existiert, dann gilt:

$$\begin{aligned} Sf(x_0) &= \frac{1}{2}(f(x_{0-}) + f(x_{0+})) \quad \text{für } x_0 \in]0, 2\pi[, \text{ und} \\ Sf(x_0) &= \frac{1}{2}(f(0+) + f(2\pi-)) \quad \text{für } x_0 \in \{0, 2\pi\}. \end{aligned}$$

Beweis. Wende auf das Cesàro Mittel $\sigma_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + S_1 f + \dots + S_{N-1} f)$ die Aussagen (11) und (9)(a) an. \square

Wie erwähnt, heißt eine Funktion f auf \mathbb{R} 2π -**periodisch**, wenn $f(x + 2\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Eine Funktion auf $[0, 2\pi[$ oder eine Funktion auf $[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$ läßt sich offenbar eindeutig zu einer 2π -periodischen Funktion fortsetzen. Eine 2π -periodische Regelfunktion hat die **Mittelwerteigenschaft**, wenn $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ an jeder Stelle x gilt. Für eine 2π -periodische Regelfunktion f seien \hat{f}_k , $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von $f|_{[0, 2\pi]}$.

(13) Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch und stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe $(S_N f)_N$ normal und somit gleichmäßig gegen f .

Beweis. Die Ableitung f' ist 2π -periodisch und stetig. Daher folgt mit partieller Integration $\hat{f}'_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x) \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} f(x) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-ik) e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi} = 0 + ik \hat{f}_k$. Es gilt also $\hat{f}'_k = ik \hat{f}_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt wegen der Bessel Ungleichung in (5), dass $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}'_k|^2 < \infty$. Für $k \neq 0$ ist schließlich $|\hat{f}'_k| = \frac{1}{k} |\hat{f}'_k| \leq \frac{1}{2} (\frac{1}{k^2} + |\hat{f}'_k|^2)$. Damit folgt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}'_k| < \infty.$$

Da $S_N f = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e_k$ beschränkt ist, ist $(S_N f)_N$ eine Folge in $B(\mathbb{R})$. Sie ist normal konvergent, weil $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\hat{f}_k e_k\|_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty$. Nach dem Weierstraß Kriterium (10.3) ist $(S_N f)_N$ gleichmäßig konvergent und somit Sf stetig nach (9.8). Aus (12) folgt $Sf = f$. \square

(14) Satz. Konvergiert die trigonometrische Reihe $\left(\sum_{k=-N}^N c_k e_k\right)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$, dann ist die durch die Reihe definierte Funktion f mit

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2π -periodisch und stetig und es gilt

$$c_k = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}.$$

Beweis. Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} gegen f wegen der 2π -Periodizität der trigonometrischen Polynome. Daher ist f 2π -periodisch und stetig. Außerdem sind $\int_0^{2\pi}$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ vertauschbar wegen (9.14). Daher gilt für $l \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ilx} \frac{dx}{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} \frac{dx}{2\pi}}_{=\delta_{kl}} = c_l.$$

\square

Bevor die Theorie weiter ausgebaut wird, folgen einige Beispiele für Fourierreihen. Zunächst die

(15) Cosinus-Sinus-Darstellung. Sei $f \in R[0, 2\pi]$. Dann ist

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Dabei gelten die **Euler Formeln**

$$\begin{aligned} a_k &= \hat{f}_k + \hat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

denn $S_N f(x) = \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^N [\hat{f}_k(\cos kx + i \sin kx) + \hat{f}_{-k}(\cos kx - i \sin kx)]$. Offenbar sind alle Koeffizienten a_k, b_k reell, wenn f reellwertig ist. Ist f 2π -periodisch, dann gilt weiter:

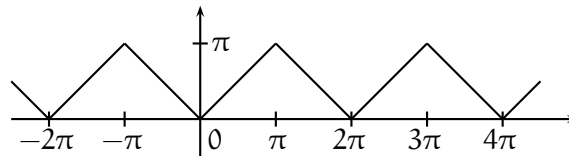
$$f \text{ ungerade} \implies a_k = 0 \quad \forall k, \quad f \text{ gerade} \implies b_k = 0 \quad \forall k.$$

Üb Man zeige: $1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cos kx = \begin{cases} \infty & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \text{divergiert} & \text{sonst.} \end{cases}$

Üb Man zeige: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1-r \cos t}{1-2r \cos t+r^2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin kt = \frac{r \sin t}{1-2r \cos t+r^2}$ für $|r| < 1$.

Üb Man zeige: Die Sinusreihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sin(2^k x)$, $x \in \mathbb{R}$, konvergiert gleichmäßig gegen eine 2π -periodische Funktion f , die stetig aber nirgends differenzierbar ist.

(16) Beispiel. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi[$. Da f gerade ist,



sind $b_k = 0 \quad \forall k$. Für $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx$ erhält man $a_0 = \pi$ und $a_k = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)$ für $k \in \mathbb{N}$ (denn für $k \geq 1$ ist $\int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = x \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin kx \, dx = \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k^2} ((-1)^k - 1)$).

Die Fourierreihe von f lautet daher $Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$. Da die Reihe (normal) konvergiert auf \mathbb{R} und weil f stetig ist, folgt aus (12), dass $Sf = f$ und damit

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Hieraus gewinnt man für $x = 0$ die Gleichung $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, d.h.

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

(17) Beispiel. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = \cos ax$ für $x \in [-\pi, \pi[$. Da f gerade ist, sind $b_k = 0 \quad \forall k$. Für die Cosinusoeffizienten erhält man

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\cos ax \cos kx}_{=\frac{1}{2}[\cos(a+k)x + \cos(a-k)x]} \, dx = \frac{1}{\pi} (-1)^k \sin(a\pi) \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right).$$

Wegen $|a_k| < \frac{1}{\pi} \left| \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| = \frac{2}{\pi k^2} \frac{|a|}{\left| 1 - \frac{a^2}{k^2} \right|} < \frac{|a|}{k^2}$ für $\frac{|a|}{k} < \frac{1}{2}$ ist $Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ (normal) konvergent. Weiter ist f stetig. Daher folgt aus (12), dass $Sf = f$, d.h.

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2a}{a^2 - k^2} \cos kx \right), \quad |x| \leq \pi.$$

Hieraus gewinnt man für $x = \pi$

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

die sogenannte "Partialbruchzerlegung" des Cotangens.

(18) Riemann-Lebesgue Lemma. Sei $f \in R[a, b]$. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-irx} f(x) dx = 0.$$

Beweis. Für $f = 1_{]c,d[}$ mit $a \leq c < d \leq b$ folgt $\left| \int_a^b e^{-irx} 1_{]c,d[}(x) dx \right| = \left| \frac{i}{r} (e^{-ird} - e^{-irc}) \right| \leq \frac{2}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Damit gilt die Behauptung auch für jede Treppenfunktion $f \in T[a, b]$. — Sei nun $f \in R[a, b]$ und $\epsilon > 0$. Nach der letzten Bemerkung zu (9.11) existiert $\varphi \in T[a, b]$ mit $\|\varphi - f\|_s \leq \frac{\epsilon/2}{b-a}$.

Damit ist $\left| \int_a^b e^{-irx} f(x) dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_a^b e^{-irx} (f(x) - \varphi(x)) dx \right|}_{\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \|f - \varphi\|_s (b-a) \leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left| \int_a^b e^{-irx} \varphi(x) dx \right|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} \leq \epsilon \quad \forall r > R$ mit

R groß genug. □

(19) Korollar. Sei $f \in R[a, b]$. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin rx dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos rx dx = 0.$$

Insbesondere gilt $\hat{f}_k \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} 0$ im Fall $[a, b] = [0, 2\pi]$.

Man bemerkt, dass die letzte Aussage von (19) bereits aus der Bessel Ungleichung folgt. Das Riemann-Lebesgue Lemma gilt allgemeiner für Lebesgue integrierbare Funktionen.

(20) Satz von Dirichlet. Sei f 2π -periodisch und $f|_{[0, 2\pi]} \in R[0, 2\pi]$. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Setze

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0} & \text{für } x < x_0, \\ \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} & \text{für } x > x_0, \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Falls $|F|$ uneigentlich integrierbar ist in einer Umgebung von x_0 , dann existiert $Sf(x_0)$.

Beweis. Sei o.E. $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Dann ist $S_N(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi}$. Weiter beachte, dass $\int_0^{\pi} D_N(t) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-N}^N \int_0^{\pi} e^{ikt} \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}$ und $D_N(t) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$ für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi} - \frac{1}{2} f(x_0-) \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0-)}{-t} \frac{-t}{\sin \frac{1}{2}t} \sin(N + \frac{1}{2})t \frac{dt}{2\pi} \right| = \\ &= \left| \int_0^{\pi} \left[F(x_0 - t) \frac{\frac{-t}{2}}{\sin \frac{1}{2}t} \right] \sin(N + \frac{1}{2})t \frac{dt}{\pi} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^{\delta} \dots \frac{dt}{\pi} \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \dots \frac{dt}{\pi} \right| \quad (\text{für } \delta \in]0, \pi[) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} |F(x_0 - t)| dt + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta}^{\pi} \frac{F(x_0 - t) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})t dt \right|, \end{aligned}$$

da $\frac{x}{\sin x} \leq \frac{x}{\pi/2}$ auf $[0, \pi/2]$. Nun ist $\frac{1}{2} \int_0^{\delta} |F(x_0 - t)| dt \leq \epsilon$ für $\delta > 0$ klein genug, weil $|F|$ uneigentlich integrierbar ist in einer Umgebung von x_0 , und $\int_{\delta}^{\pi} \frac{F(x_0 - t) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})t dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue. — Ebenso folgt $\int_{-\pi}^0 f(x_0 - t) D_N(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f(x_0+)$. \square

In (20) ist natürlich $Sf(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$. Siehe dazu (12).

(21) Korollar. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch stückweise stetig differenzierbar, d.h. f ist 2π -periodisch mit einer Zerlegung $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_r = 2\pi$ derart, dass $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ stetig differenzierbar ist für $i \in \{1, \dots, r-1\}$ und $f(x_i-), f(x_i+), f'(x_i-), f'(x_i+)$ existieren in \mathbb{C} für $i \in \{1, \dots, r\}$. Dann gilt

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $Sf(x) = f(x) \quad \forall x \neq x_i + 2\pi k, i \in \{1, \dots, r\}, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach dem Satz von Dirichlet ist lediglich zu prüfen, ob jedes x_i die Voraussetzungen an x_0 in (20) erfüllt. Für $x < x_i$ existiert $\xi \in]x, x_i[$ mit $F(x) = \frac{f(x) - f(x_i-)}{x - x_i} \stackrel{\text{MWS}}{=} f'(\xi) \xrightarrow{x \rightarrow x_i} f'(x_i-)$. Entsprechendes gilt in der Situation $x > x_i$. Also ist F insbesondere beschränkt in einer Umgebung von x_i und somit eine Regelfunktion. \square

Später wird gezeigt, dass Sf in (21) auf jedem Kompaktum gleichmäßig konvergiert, welches keine Unstetigkeitsstelle enthält.

(22) Rechenregeln für die Fourierkoeffizienten. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch mit $f|_{[0, 2\pi]} \in R[0, 2\pi]$. Eine solche Funktion sei auch g . Dann gilt:

(a) *Linearität:* $(\widehat{f + \alpha g})_k = \widehat{f}_k + \alpha \widehat{g}_k$.

(b) *Konjugation:* $g(t) = \overline{f(t)} \implies \widehat{g}_k = \overline{\widehat{f}_{-k}}$.

(c) *Zeitumkehr:* $g(t) = f(-t) \implies \widehat{g}_k = \widehat{f}_{-k}$.

(d) *Verschiebung im Frequenzbereich:* $g(t) = e^{int} f(t)$ für $n \in \mathbb{Z} \implies \widehat{g}_k = \widehat{f}_{n-k}$.

- (e) *Verschiebung im Zeitbereich:* $g(t) = f(t + a)$ für $a \in \mathbb{R} \implies \hat{g}_k = e^{ika} \hat{f}_k$.
- (f) *Stammfunktion und Ableitung:* Sei zusätzlich $\int_0^{2\pi} f = 0$ und sei $g(t) = c + \int_0^t f(s) ds$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Dann ist g 2π -periodisch und stetig und es ist

$$\hat{g}_0 = c - \int_0^{2\pi} sf(s) \frac{ds}{2\pi}, \quad ik\hat{g}_k = \hat{f}_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

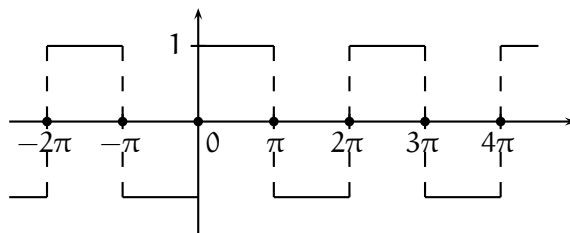
Damit erhält man Sf durch gliedweises differenzieren von Sg . Beachte, dass g nicht differenzierbar zu sein braucht.

Beweis. Die Aussagen in (a) – (e) rechnet man leicht nach. — (f) Offensichtlich ist g 2π -periodisch. Da $|g(t+h) - g(t)| = \left| \int_t^{t+h} f(s) ds \right| \leq \|f\|_\infty |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, ist g stetig. Es ist $\hat{g}_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \left(c + \int_0^t f(s) ds \right) \frac{dt}{2\pi} = c \delta_{0k} + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{-ikt} 1_{[0,t]}(s) f(s) ds \right) \frac{dt}{2\pi}$. Wie anschließend begründet, darf man in diesem Ausdruck die Integrationsreihenfolge vertauschen. Mit $1_{[0,t]}(s) = 1_{[s,2\pi]}(t)$ erhält man $\hat{g}_k = c \delta_{0k} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left(\int_s^{2\pi} e^{-ikt} dt \right) ds$. Wertet man das innere Integral aus und benutzt $\int_0^{2\pi} f = 0$, so folgt die Behauptung: $\hat{g}_0 = c + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)(2\pi - s) ds = c + 0 - \int_0^{2\pi} sf(s) \frac{ds}{2\pi}$ und $\hat{g}_k = \int_0^{2\pi} f(s) \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikt} \right]_{t=s}^{t=2\pi} \frac{ds}{2\pi} = -\frac{1}{ik} \cdot 0 + \frac{1}{ik} \hat{f}_k$ für $k \neq 0$.

Ist f eine Treppenfunktion, so läßt sich die Vertauschbarkeit der obigen Integrale direkt nachrechnen. Für den allgemeinen Fall einer Regelfunktion f approximiert man diese durch eine Treppenfunktion in der Supremumsnorm. \square

Üb Man zeige (a) – (e) von (22).

(23) Beispiel zur Regel (22)(f). Sei f 2π -periodisch mit $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ und $f(x) = \text{signum}(x)$ für $x \in]-\pi, \pi[$. Es gilt $\hat{f}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f = 0$ und $g(x) := \int_0^x f(s) ds = |x|$ für $|x| \leq \pi$.



Nach (16) ist $Sg(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. Daher ist $Sf(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ nach (22)(f). Nun ist f 2π -periodisch stückweise stetig differenzierbar und hat die Mittelwerteigenschaft. Nach (21) konvergiert daher und ist $Sf = f$. Somit gilt

$$\text{signum}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad |x| < \pi.$$

Es folgt eine Verschärfung von (13).

(24) Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $f(x) = c + \int_0^x g(t) dt$ gilt für ein $c \in \mathbb{C}$ und eine 2π -periodische Funktion g mit $g|_{[0,2\pi]} \in R[0,2\pi]$ und $\int_0^{2\pi} g(x) dx = 0$. Dann ist f 2π -periodisch und stetig und die Fourierreihe von f konvergiert normal und somit gleichmäßig gegen f .

Beweis. Nach (22)(f) ist f 2π -periodisch und stetig und es ist $\hat{g}_k = ik\hat{f}_k$. Außerdem ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_k|^2 < \infty$ aufgrund der Bessel Ungleichung. Wie in (13) folgt daraus $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < \infty$. Den Rest zeigt man ebenfalls wie im Beweis zu (13). \square

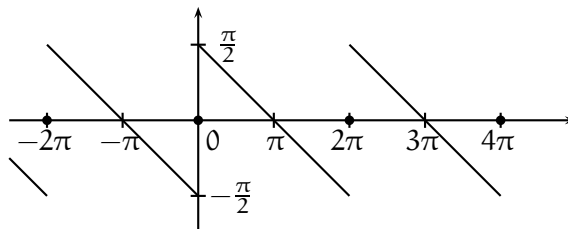
(25) Das zentrale Beispiel einer trigonometrischen Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Hierfür gelten:

(a) Die Reihe konvergiert punktweise gegen die 2π -periodische **Sägezahnfunktion** h mit

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{\pi-x}{2} & \text{für } x \in]0, 2\pi[. \end{cases}$$



Die Sprungstellen von h sind bei $2k\pi$ mit $h(2k\pi) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}$.

(b) Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ für jedes $\delta \in]0, \pi[$. Damit konvergiert sie gleichmäßig auf jeder kompakten Menge, die keine Sprungstelle enthält.

Beweis. (a) Weil h ungerade ist, sind alle $a_k = 0$. Für die Sinuskoeffizienten erhält man $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin kx \, dx = \frac{1}{k}$. Also ist $Sh = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\cdot)}{k}$. Nach (21) gilt $Sh = h$ punktweise.

(b) Sei $x \in]0, 2\pi[$ und

$$R_N(x) := \int_{\pi}^x \frac{1}{2} D_N(t) dt = \int_{\pi}^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

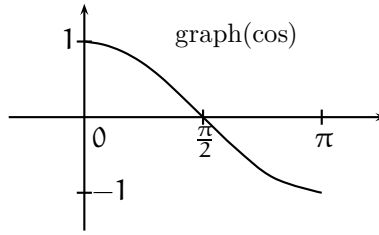
Dann ist einerseits

$$R_N(x) = \frac{1}{2}(x - \pi) + \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin Nx}{N},$$

weil $D_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{ikt} = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos kt$. Andererseits erhält man mittels partieller Integration

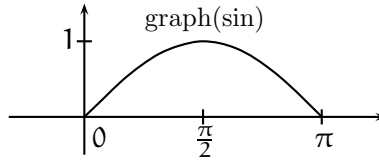
$$R_N(x) = -\frac{\cos(N + \frac{1}{2})t}{(2N + 1) \sin \frac{t}{2}} \Big|_{t=\pi}^{t=x} + \frac{1}{2N + 1} \int_{\pi}^x \cos(N + \frac{1}{2})t \left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right)' dt.$$

Nun hat $\left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right)' = -\frac{1}{(\sin \frac{t}{2})^2} (\cos \frac{t}{2}) \frac{1}{2}$ ein einheitliches Vorzeichen auf dem Integrationsbereich $[\pi, x]$ bzw. $[x, \pi]$.



Daher ist der MWS der Integralrechnung (9.29) anwendbar: Es gibt ein ξ zwischen π und x mit $\int_{\pi}^x \cos(N + \frac{1}{2})t \left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}}\right)' dt = \cos(N + \frac{1}{2})\xi \int_{\pi}^x \left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}}\right)' dt = \cos(N + \frac{1}{2})\xi \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - 1\right)$. Hieraus folgt

$$|R_N(x)| \leq \left| \frac{\cos(N + \frac{1}{2})x}{(2N + 1) \sin \frac{x}{2}} \right| + \frac{1}{2N + 1} \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - 1 \right) \leq \frac{1}{(2N + 1) \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2N + 1} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{(2N + 1) \sin \frac{x}{2}}.$$



Für $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta \in]0, \pi[$, ist $\sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2} > 0$ und daher $|R_N(x)| \leq \frac{2}{2N+1} \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ unabhängig von x . \square

Schließlich erfolgt mit (25) eine Verschärfung der Aussage (21), was einen weiteren Hauptsatz über Fourierreihen ergibt.

(26) Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch stückweise stetig differenzierbar (siehe (21)). Dann konvergiert die Fourierreihe Sf gleichmäßig auf jeder kompakten Menge K , die keine Unstetigkeitsstelle von f enthält. (Knickstellen dürfen enthalten sein.) Im Übrigen gilt (21).

Beweis. Seien s_1, s_2, \dots, s_m Unstetigkeitsstellen von f in $[0, 2\pi[$ und

$$\eta_i := f(s_i+) - f(s_i-), \quad i = 1, \dots, m$$

die Sprunghöhen. Nun hat $h_i(x) := h(x - s_i)$ mit h aus (25) Sprungstellen genau bei $x = s_i + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ mit Sprunghöhe π . Sei

$$\varphi(x) := f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\eta_i}{\pi} h_i(x), \quad x \neq s_i + 2\pi k.$$

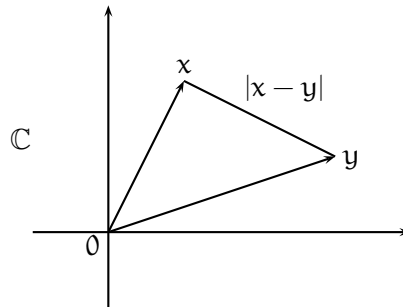
φ ist stetig fortsetzbar auf ganz \mathbb{R} zu einer 2π -periodischen stückweise stetig differenzierbaren Funktion, denn $\varphi(x+) - \varphi(x-) = f(x+) - f(x-) - \sum_{i=1}^m \frac{\eta_i}{\pi} (h_i(x+) - h_i(x-)) \stackrel{x=s_i+2\pi k}{=} \eta_j - \frac{\eta_j}{\pi} \pi = 0 \forall j, k$. Die stetige Fortsetzung werde weiterhin mit φ bezeichnet. Sei $\varphi'(x)$ die Ableitung von φ an jeder Stelle x , die keine Knickstelle x_i von φ ist. An den Knickstellen, wovon es in $[0, 2\pi[$ nur endlich viele gibt, wird φ' beliebig gesetzt. Dann gilt

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt,$$

denn für $x \in [0, 2\pi[$ ist $\int_0^x \varphi'(t) dt = \int_0^{x_1} \varphi'(t) dt + \sum_{i=1}^l \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'(t) dt \right) + \int_{x_{l+1}}^x \varphi'(t) dt = \varphi(x_1) - \varphi(0) + \sum_{i=1}^l (\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)) + \varphi(x) - \varphi(x_{l+1}) = -\varphi(0) + \varphi(x)$. Nach (24) konvergiert $S\varphi$ gleichmäßig auf \mathbb{R} . Nach (25) konvergieren Sh_i gleichmäßig auf K . Das ergibt die Behauptung. \square

13 Metrische Räume

Der Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{K}$ ist der Betrag $|x - y|$ der Differenz von x und y .



Generell ist in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ der Abstand zweier Vektoren $x, y \in V$ durch die Norm $\|x - y\|$ der Differenz der Vektoren x und y gegeben. So ist z.B.

$$\|z - w\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |z_i - w_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für Vektoren z, w in \mathbb{K}^n versehen mit der p -Norm oder

$$\|f - g\|_s = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in D\}$$

für Funktionen f, g aus dem Raum $B(D)$ der beschränkten Funktionen auf einer Menge D versehen mit der Supremumsnorm (9.3). Allgemeiner als normierte Räume sind metrische Räume.

(1) **Definition.** Sei X eine Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$$

heißt eine **Metrik** auf X , wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt

- $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ nur für $x = y$ (positiv definit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisch)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

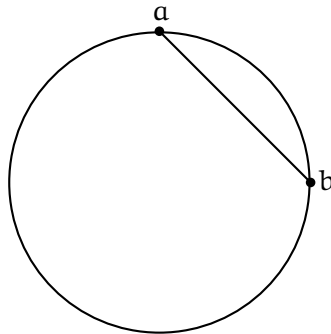
(X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

(2) **Beispiele.**

- (a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann definiert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V . Es ist die von der Norm **erzeugte Metrik**.

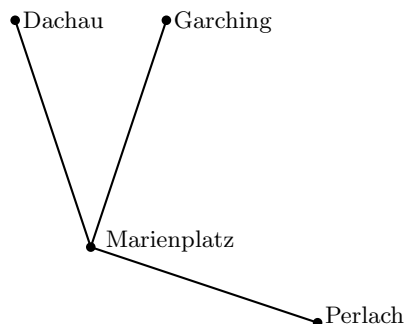
Beweis. Es ist $\|x-y\| \geq 0$ und es gilt $\|x-y\| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$. Also ist d positiv definit. — Da $d(x, y) = \|x-y\| = \|(-1) \cdot (y-x)\| = \|y-x\| = d(y, x)$, ist d symmetrisch. — Schließlich ist $d(x, z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x, y) + d(y, z)$. Also erfüllt d die Dreiecksungleichung. \square

- (b) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist die Beschränkung von d auf A , d.h. $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x, y) := d(x, y)$, offensichtlich eine Metrik auf A und somit (A, d_A) ein metrischer Raum. d_A heißt die von d auf A **induzierte Metrik** und (A, d_A) ein **Unterraum** von (X, d) .
- (c) Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subset V$ (nicht notwendig ein Untervektorraum von V). Dann ist $d_A(x, y) := \|x-y\| \forall x, y \in A$ ist eine Metrik auf A und (A, d_A) ein metrischer Raum.
- (d) Für a und b auf der Kreislinie sei $d_1(a, b)$ die Bogenlänge des kürzeren Bogens zwischen a und b und $d_2(a, b)$ die Länge der Sehne von a nach b .



Offenbar sind d_1 und d_2 zwei Metriken auf der Kreislinie. Dabei ist d_2 die durch die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 induzierte Metrik.

- (e) MVV-Metrik. Die Länge der Verbindung über den Marienplatz bestimmt den Abstand zweier verschiedener Orte.



- (f) Sei X irgendeine Menge. Dann definiert $d(x, y) := 1$ für $x \neq y$ und $d(x, x) := 0$ eine Metrik auf X , die sogenannte **diskrete Metrik**.

(3) **Definition.** Seien (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$. Dann heißt

$$U_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

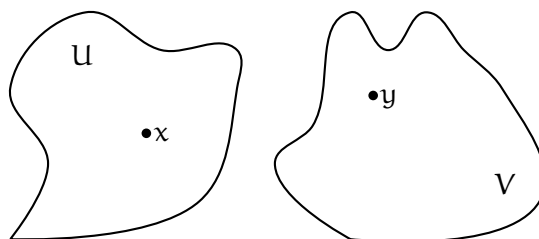
die **offene Kugel** mit Mittelpunkt a und Radius r . Für $x \in X$ heißt $U \subset X$ eine **Umgebung** von x , wenn ein $r > 0$ mit $U_r(x) \subset U$ existiert.

(4) **Beispiele.**

- Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $a \in V$, und $r > 0$. Dann ist $U_r(a) = \{a + rx : \|x\| < 1\} = a + rU_1(0)$. Alle offenen Kugeln gehen also durch Streckung (bzw. Stauchung) und Translation aus der offenen **Einheitskugel** $U_1(0)$ hervor.
- In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist $U_r(a) =]a - r, a + r[$ ist das offene Intervall um a der Länge $2r$.
- In $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist $U_r(a)$ ist die offene Kreisscheibe um a mit Radius r .
- In $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ ist $U_r(a)$ die offene Kugel (ohne Oberfläche) um a mit Radius r .

Üb Zeichne $U_1(0)$ in \mathbb{R}^2 bezüglich der von $\|\cdot\|_p$ für $p = 1, \infty, 2, \frac{3}{2}$ und 4 erzeugten Metrik.

(5) **Satz.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann haben je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen, d.h. $\forall x, y \in X, x \neq y \exists$ Umgebung U von x , Umgebung V von y : $U \cap V = \emptyset$.



Beweis. Setze $r := \frac{1}{2}d(x, y) > 0$, $U := U_r(x)$ und $V := U_r(y)$. Für ein beliebiges $z \in U$ gilt dann:
 $2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + d(z, y) \implies d(z, y) > r \implies z \notin V$. □

(6) **Definition.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **offen**, falls U Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h.

$$\forall x \in U \exists r > 0 : U_r(x) \subset U.$$

Beispiele. • Ein Intervall in \mathbb{R} ist offen genau dann, wenn es im Sinne von (6) offen ist.

- Allgemeiner sind offene Kugeln $U_r(a)$ im Sinne (6) offen, denn ist $x \in U_r(a)$, dann ist $\epsilon := r - d(x, a) > 0$ und $U_\epsilon(x) \subset U_r(a)$. In der Tat gilt: $y \in U_\epsilon(x) \implies d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \epsilon = r \implies y \in U_r(a)$.
- Offenheit einer Menge hängt von der Metrik ab. Bei der diskreten Metrik ist jede Teilmenge offen, weil $U_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$ für jedes x .

- $[0, 1]$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist nicht offen, wohl aber ist $[0, 1]$ in $([0, 1], d_{[0,1]})$ offen.

(7) Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\tau := \{U \subset X : U \text{ offen}\}$. Dann ist τ eine **Topologie**, d.h. es gelten:

- (i) $\emptyset, X \in \tau$. D.h. \emptyset und X sind offen.
- (ii) $\mathcal{F} \subset \tau$ endlich $\implies \bigcap \mathcal{F} \in \tau$. D.h. der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
- (iii) $\mathcal{F} \subset \tau \implies \bigcup \mathcal{F} \in \tau$. D.h. die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Beweis. (i) ist klar. — (ii) Es genügt zu zeigen, dass $U \cap V \in \tau$ für $U, V \in \tau$. Sei dazu $x \in U \cap V$. Dann existieren $r_1 > 0$ mit $U_{r_1}(x) \subset U$ und $r_2 > 0$ mit $U_{r_2}(x) \subset V$. Setze $r := \min\{r_1, r_2\}$. Dafür ist $U_r(x) \subset U_{r_i}(x)$ für $i = 1, 2$ und somit $U_r(x) \subset U \cap V$. — (iii) Sei $V := \bigcup \mathcal{F}$ und $x \in V$. Dann existiert $U \in \mathcal{F}$ mit $x \in U$. Dazu existiert $r > 0$ mit $U_r(x) \subset U$. Somit ist $U_r(x) \subset V$. \square

(8) Definition. Im metrischen Raum (X, d) heißt $A \subset X$ **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

(9) Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (i) \emptyset und X sind abgeschlossen.
- (ii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (iii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus (7). \square

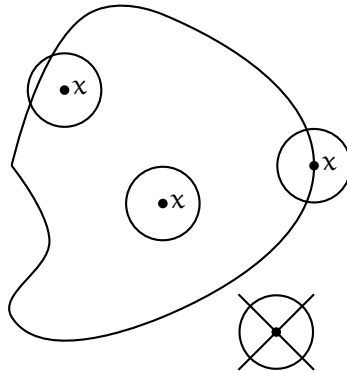
(10) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt $\tilde{U}_r(a) := \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ für $a \in X$ und $r > 0$ die **abgeschlossene Kugel um a mit Radius r** .

Üb Zeige: $\tilde{U}_r(a)$ ist abgeschlossen im Sinne von (8).

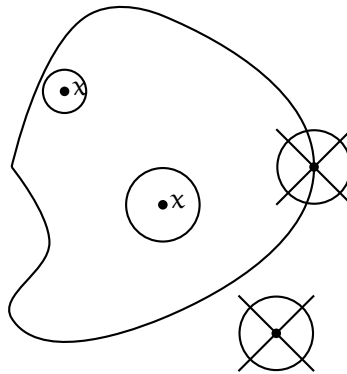
Üb Gebe jeweils ein Beispiel von abzählbar vielen offenen Mengen (U_n) und abgeschlossenen Mengen (A_n) eines metrischen Raumes an derart, dass $\bigcap_n U_n$ nicht offen und $\bigcup_n A_n$ nicht abgeschlossen ist.

(11) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt $x \in X$ ein **Berührungspunkt** von A , wenn für alle Umgebungen U von x gilt:

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

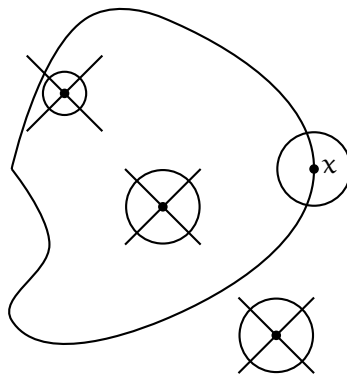


Die Menge $\bar{A} := \{x \in X : x \text{ ist Berührungspunkt von } A\}$ heißt der **Abschluss** von A. Weiter heißt $x \in A$ ein **innerer Punkt** von A, wenn A eine Umgebung von x ist.



Die Menge $\overset{\circ}{A} := \{x \in A : x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ heißt das **Innere** von A. Schließlich heißt $x \in X$ ein **Randpunkt** von A, wenn für alle Umgebungen U von x gilt:

$$U \cap A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$



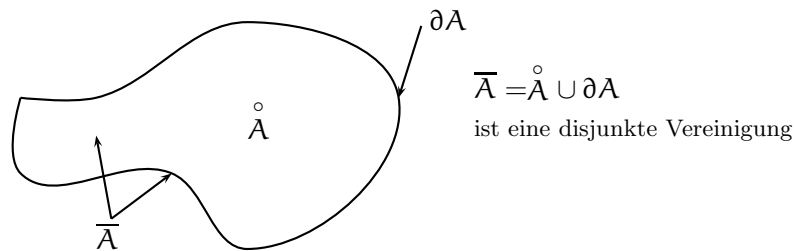
Die Menge $\partial A := \{x \in X : x \text{ ist Randpunkt von } A\}$ heißt **Rand** von A.

(12) Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gelten:

- (i) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$
- (ii) $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

$$(iii) \partial A = \partial A, \quad \overline{A} = \overset{\circ}{A}, \quad \overset{\circ}{A} = \overline{A}.$$

Beweis. (i) folgt sofort aus der Definition. — (ii) Sei $x \in \partial A$. Dann ist $x \in \overline{A}$, denn $U \cap A \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von x . Auch ist $x \notin \overset{\circ}{A}$, da sonst $\overset{\circ}{A}$ eine Umgebung U von x wäre mit $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Also ist $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Sei nun umgekehrt $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Dann gilt für alle Umgebungen U von x : $U \cap A \neq \emptyset$ (da $x \in \overline{A}$) und $U \not\subset A$ (da $x \notin \overset{\circ}{A}$ kein innerer Punkt von A ist). $U \not\subset A$ heißt $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Also ist $x \in \partial A$.



(iii) $\partial A = \partial A$ folgt sofort aus der Definition des Randes. — $x \in \overset{\circ}{A} \iff x \notin \overset{\circ}{A} \iff \forall$ Umgebung U von x : $U \not\subset A$, d.h. $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{A}$. — Die letzte Behauptung beweist man analog oder indem man A durch \overline{A} ersetzt. \square

Üb Man beweise $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$, $\overline{A} = A \cup \partial A$ und $\overset{\circ}{A} = \overline{A}$.

Üb Seien (X, d) gleich \mathbb{R} mit der euklidischen Metrik, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $A \subset \mathbb{R}$ mit $]a, b[\subset A \subset [a, b]$. Man zeige: $\partial A = \{a, b\}$, $\overset{\circ}{A} =]a, b[$ und $\overline{A} = [a, b]$.

Üb Man zeige: $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

Üb Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $a \in V$ und $r > 0$. Man zeige: $\{x \in V : \|x - a\| = r\} = \tilde{U}_r(a) \setminus U_r(a) = \partial U_r(a) = \partial \tilde{U}_r(a)$ und $\tilde{U}_r(a) = \overline{U_r(a)}$.

(13) Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:

- (i) $\overset{\circ}{A}$ ist offen. Ist $U \subset A$, U offen, dann ist $U \subset \overset{\circ}{A}$. Also ist $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U : U \subset A, U \text{ offen}\}$ die größte offene Menge, die in A enthalten ist. Insbesondere gilt: A offen $\iff A = \overset{\circ}{A}$.
- (ii) \overline{A} ist abgeschlossen. Ist $C \supset A$, C abgeschlossen, dann ist $C \supset \overline{A}$. Also ist $\overline{A} = \bigcap \{C : C \supset A, C \text{ abgeschlossen}\}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die in A enthält. Insbesondere gilt: A abgeschlossen $\iff A = \overline{A}$.

(iii) ∂A ist abgeschlossen.

Beweis. (i) Sei $x \in \overset{\circ}{A}$. Nach Definition von $\overset{\circ}{A}$ existiert U offen mit $x \in U \subset A$. Alle $y \in U$ sind innere Punkte von A . Daher ist $U \subset \overset{\circ}{A}$. Also ist $\overset{\circ}{A}$ offen. — (ii) Nach (i) und (12)(iii) ist $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}} = \bigcup \{U : U \subset A, U \text{ offen}\} = \bigcup \{C : C \subset A, C \text{ abgeschlossen}\} = \bigcup \{C : C \supset A, C \text{ abgeschlossen}\}$. Daher ist $\overline{A} = \bigcap \{C : C \supset A, C \text{ abgeschlossen}\}$. — (iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (X \setminus \overset{\circ}{A})$ ist abgeschlossen, weil \overline{A} und $X \setminus \overset{\circ}{A}$ abgeschlossen sind. \square

(14) Definition und Satz. Seien (X, d^X) und (Y, d^Y) metrische Räume. Dann ist

$$d : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}, \quad d((x, y), (x', y')) := \max\{d^X(x, x'), d^Y(y, y')\}$$

eine Metrik auf $X \times Y$. Sie heißt die **Maximummetrik** und $(X \times Y, d)$ der **Produktraum**. Die offenen Kugeln im Produktraum sind das Produkt von offenen Kugeln in den Faktorräumen, denn $U_r(a, b) = \{(x, y) \in X \times Y : d((x, y), (a, b)) < r\} = \{(x, y) \in X \times Y : d^X(x, a) < r, d^Y(y, b) < r\} = U_r(a) \times U_r(b)$. Entsprechendes gilt für die abgeschlossenen Kugeln: $\tilde{U}_r(a, b) = \tilde{U}_r(a) \times \tilde{U}_r(b)$.

Üb Man zeige, dass die Maximummetrik d in (14) tatsächlich eine Metrik ist.

(15) Satz. Im Produktraum $(X \times Y, d)$ gelten: $U \subset X$ offen, $V \subset Y$ offen $\implies U \times V$ offen in $X \times Y$; $A \subset X$ abgeschlossen, $B \subset Y$ abgeschlossen $\implies A \times B$ abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis. $(x, y) \in U \times V \implies x \in U, y \in V \implies \exists r_1, r_2 > 0 : U_{r_1}(x) \subset U, U_{r_2}(y) \subset V, r := \min\{r_1, r_2\} > 0 \implies U_r(x, y) \stackrel{(14)}{=} U_r(x) \times U_r(y) \subset U \times V$. Daher ist $U \times V$ offen. — $(X \times Y) \setminus (A \times B) = (\underbrace{(X \setminus A)}_{\text{offen}} \times \underbrace{Y}_{\text{offen}}) \cup (\underbrace{X}_{\text{offen}} \times \underbrace{(Y \setminus B)}_{\text{offen}})$ ist offen. Daher ist $A \times B$ abgeschlossen. \square

(16) Verallgemeinerung auf endlich viele Faktoren. Seien (X_i, d_i) metrische Räume für $i = 1, \dots, m$, $X := \prod_{i=1}^m X_i := X_1 \times \dots \times X_m$. Dann definiert $d(x, x') := \max\{d_i(x_i, x'_i) : i = 1, \dots, m\}$, eine Metrik auf X , die **Maximummetrik**. Dafür gelten: $U_i \subset X_i$ offen für $i = 1, \dots, m \implies U := \prod_{i=1}^m U_i \subset X$ offen; $A_i \subset X_i$ abgeschlossen für $i = 1, \dots, m \implies A := \prod_{i=1}^m A_i \subset X$ abgeschlossen.

Bemerkung. Seien $X_i = \mathbb{K}$, d_i die Betragsmetrik für $i = 1, \dots, m$ und $X := \mathbb{K}^m$. Dann ist $d(x, x') := \max\{|x_i - x'_i| : i = 1, \dots, m\} = \|x - x'\|_\infty$. Die Maximummetrik wird also von der Maximumnorm erzeugt. Für $X_i = \mathbb{R}$ ist der offene achsenparallele Quader $\prod_{i=1}^m]a_i, b_i[$ eine offene Menge im Produktraum \mathbb{R}^m . Entsprechend ist $\prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ abgeschlossen.

Die Produktabbildung ist offenbar assoziativ, d.h.

$$(X_1 \times X_2) \times X_3 = X_1 \times (X_2 \times X_3) = X_1 \times X_2 \times X_3.$$

(17) **Definition.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent**, wenn $a \in X$ existiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0,$$

d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, a) < \epsilon$. Man schreibt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oder $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Üb Zeige die Eindeutigkeit des Grenzwertes mit Hilfe der Dreiecksungleichung.

Falls d von einer Norm erzeugt wird, d.h. $d(x, y) = \|x - y\|$, dann erhält man die bekannte Definition der Konvergenz im normierten Raum.

(18) **Satz.** Seien (X_i, d_i) metrische Räume, $X := \prod_{i=1}^m X_i$ der Produktraum mit der Maximummetrik d , (x_n) eine Folge in X und $a \in X$. Dann gilt:

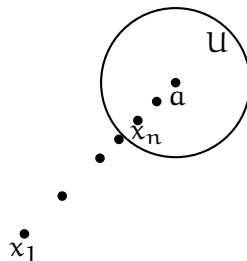
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Beweis. $d(x_n, a) \rightarrow 0 \iff \max_{i=1, \dots, m} d_i(x_{ni}, a_i) \rightarrow 0 \iff d_i(x_{ni}, a_i) \rightarrow 0$ für jedes $i = 1, \dots, m$. □

Das besagt, dass die Folge (x_n) in X genau dann konvergiert, wenn die Folgen der Komponenten $(x_{ni})_n$ in X_i für $i = 1, \dots, m$ konvergieren. Insbesondere gilt dies für die Folgen in

$$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) = \prod_{i=1}^n (\mathbb{K}, |\cdot|).$$

(19) **Satz.** Seien (X, d) ein metrischer Raum, (x_n) in X und $a \in X$. Dann gilt: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \iff \forall$ Umgebung U von $a \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U$.

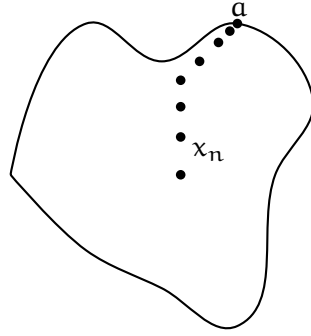


Beweis. Nach Definition gilt: $x_n \rightarrow a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in U_\epsilon(a)$. Damit folgt " \Leftarrow ", indem man $U = U_\epsilon(a)$ wählt. Zu " \Rightarrow " ist nur zu beachten, dass jede Umgebung U von a eine ϵ -Kugel $U_\epsilon(a)$ enthält. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in U_\epsilon(a)$ für alle $n \geq N$. □

Also wird die Konvergenz einer Folge im metrischen Raum lediglich von den Umgebungen und daher letztlich nur von den offenen Mengen, d.h. der Topologie bestimmt. Es kann sein, dass zwei verschiedene Metriken d_1 und d_2 auf derselben Menge X existieren, die die gleiche Topologie definieren. Wir kommen darauf zurück.

(20) **Satz.** Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:

$$\overline{A} = \{a \in X : \exists (x_n) \text{ in } A \text{ mit } x_n \rightarrow a\}.$$



Beweis. " \subset ": $a \in \bar{A} \implies U_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset \forall n \implies \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a), x_n \in A \implies (x_n)$ in A und $d(x_n, a) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also $x_n \rightarrow a$. — " \supset ": Sei (x_n) in A mit $x_n \rightarrow a$ und U eine Umgebung von a . Dann existiert $x_n \in U$, weshalb $U \cap A \neq \emptyset$. Da U beliebig ist, folgt $a \in \bar{A}$. \square

(21) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ **beschränkt**, falls $A = \emptyset$ oder

$$\text{diam } A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty.$$

Dabei heißt $\text{diam } A$ der **Durchmesser** von A . — Z.B. ist $\text{diam } U_r(a) \leq 2r$ und $\text{diam } \tilde{U}_r(a) \leq 2r$.

(22) Lemma. Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$ und $c \in X$. Dann gilt:

$$A \text{ beschränkt} \iff \sup\{d(c, a) : a \in A\} < \infty.$$

Beweis. Sei $A \subset X$ beschränkt. Für $x, y \in A$ folgt $d(c, x) \leq d(c, y) + d(y, x) \leq d(c, y) + \text{diam } A$, weshalb $\sup\{d(c, a) : a \in A\} < \infty$. — Sei umgekehrt $s := \sup\{d(c, a) : a \in A\} < \infty$. Für $x, y \in A$ gilt dann $d(x, y) \leq d(x, c) + d(c, y) \leq 2s$, weshalb A beschränkt ist. \square

In einem normierten Raum ist A genau dann beschränkt, wenn $A \subset U_r(0)$ für ein $r > 0$. — Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum heißt **beschränkt**, wenn $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(23) Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt **Cauchy Folge** (CF), wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

(X, d) heißt **vollständig**, wenn jede CF in X konvergiert.

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum versehen mit der von der Norm erzeugten Metrik, dann stimmen die Definitionen (23) und (10.4) der Vollständigkeit für V offensichtlich überein.

(24) Lemma. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Jede konvergente Folge ist CF. Jede CF ist beschränkt.

Beweis. Sei (x_n) konvergent mit $a := \lim x_n$. Dann gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Daher ist $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \epsilon \forall n, m \geq N$. Also ist (x_n) eine CF. — Sei nun (x_n) eine CF. Dann gilt: $\exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < 1 \implies \forall k \in \mathbb{N} : d(x_N, x_k) \leq \max\{1, d(x_N, x_1), \dots, d(x_N, x_{N-1})\}$. Daher ist $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. \square

(25) Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Dann gelten:

- (i) (Y, d_Y) vollständig $\implies Y$ abgeschlossen in X .
- (ii) (X, d) vollständig, Y abgeschlossen in $X \implies (Y, d_Y)$ vollständig.

Beweis. (i) Wir zeigen $Y = \overline{Y}$ mit Hilfe von (20). Sei also (y_n) in Y mit $y_n \rightarrow a$. Zu zeigen ist $a \in Y$. Nach (24) ist (y_n) CF in X und somit auch CF in (Y, d_Y) . Damit existiert $b \in Y$ mit $y_n \rightarrow b$. Weil der Grenzwert eindeutig ist, ist $a = b$. Also ist $a \in Y$.

- (ii) Sei (y_n) eine CF in Y . Dann ist (y_n) auch CF in X . Daher existiert $a \in X$ mit $y_n \rightarrow a$. Weil Y abgeschlossen ist, ist $a \in Y$ nach (20). Also konvergiert (y_n) in Y . Daher ist (Y, d_Y) vollständig.

□

(26) Bemerkung. Sei D eine nichtleere Menge. Nach (10.5) ist $(B(D), \|\cdot\|_s)$ ein Banachraum. Daher ist $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum, weil dieser gleich $(B(\{1, \dots, n\}), \|\cdot\|_s)$ ist. Weiter sei an die folgenden Untervektorräume von $B[a, b]$ erinnert: $T[a, b] \subset R[a, b] \subset B[a, b]$ und $C[a, b] \subset R[a, b]$. Siehe dazu (9.16) und die Bemerkungen nach (9.11).

(27) Satz. Die Vektorräume $C[a, b]$ und $R[a, b]$ sind bez. $\|\cdot\|_s$ vollständig, also Banachräume. Sie sind Untervektorräume von $(B[a, b], \|\cdot\|_s)$. Weiter ist $\overline{T[a, b]} = R[a, b]$ bez. $\|\cdot\|_s$. — Sei $D \subset \mathbb{C}$ nichtleer. Dann ist $C(D) \cap B(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ beschränkt und stetig}\}$ ein vollständiger Untervektorraum von $(B(D), \|\cdot\|_s)$. Für $D = [a, b]$ gilt $C[a, b] \subset B[a, b]$.

Beweis. $C(D) \cap B(D)$ ist offenbar ein Vektorraum. Er ist abgeschlossen in $B(D)$. Zum Beweis sei $f \in B(D)$ und (f_n) eine Folge in $C(D) \cap B(D)$ mit $f_n \rightarrow f$ in $B(D)$, d.h. $\|f_n - f\|_s \rightarrow 0$. Das bedeutet, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen ist stetig nach (9.8). Also ist $f \in C(D) \cap B(D)$. Damit ist $C(D) \cap B(D)$ abgeschlossen nach (13)(ii) und (20). Nach (25)(ii) ist $C(D) \cap B(D)$ vollständig.

Sei $D = [a, b]$ und $f \in C[a, b]$. Dann ist $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und daher $|f|$ nach (7.16) beschränkt, d.h. $f \in B[a, b]$. Also ist $C[a, b] \subset B[a, b]$ und somit $C[a, b]$ nach obigem Ergebnis vollständig bezüglich $\|\cdot\|_s$. Nach Definition von $R[a, b]$ und wegen (20) ist $R[a, b] = \overline{T[a, b]}$ bez. $\|\cdot\|_s$. Nach (13)(ii) und (25)(ii) ist $R[a, b]$ abgeschlossen und damit vollständig. □

Die in Kapitel 7 eingeführten Begriffe des Grenzwertes und der Stetigkeit von Funktionen, deren Definitionsbereich und Wertebereich Teilmengen von \mathbb{C} sind, werden jetzt allgemein für Abbildungen zwischen metrischen Räumen erklärt.

(28) Definition. Seien (X, d) , (Y, d) metrische Räume, $D \subset X$, $f : D \rightarrow Y$ und $a \in \overline{D}$. Dann hat f einen **Grenzwert** in a , wenn $b \in Y$ existiert derart, dass

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \text{ mit } d(x, a) < \delta : d(f(x), b) < \epsilon.$$

Offenbar ist $b \in Y$ eindeutig. Man schreibt $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ oder auch $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

(29) Definition. Seien $(X, d), (Y, d)$ metrische Räume, $D \subset X$, $f : D \rightarrow Y$ und $a \in D$. Dann heißt f **stetig** in a , wenn $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, d.h. wenn $f(a)$ der Grenzwert von f in a ist gemäß (28).

(30) Folgenkriterium. Seien f und a wie in (28). Dann hat f einen Grenzwert in a genau dann, wenn ein $b \in Y$ existiert derart, dass $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Insbesondere ist f in $a \in D$ stetig genau dann, wenn für jede gegen a konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim_n f(x_n) = f(a)$.

Beweis. Da $a \in \overline{D}$ ist, existiert nach (20) eine Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$.

Sei b wie in (28) und (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$. Zu zeigen ist $f(x_n) \rightarrow b$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ sei $\delta > 0$ aus (28). Da $d(x_n, a) \rightarrow 0$, existiert $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, a) < \delta \forall n \geq N$. Damit folgt $d(f(x_n), b) < \epsilon \forall n \geq N$. Also gilt $f(x_n) \rightarrow b$.

Umgekehrt gelte $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ nicht. Dann existiert nach (28) ein $\epsilon_0 > 0$ derart, dass es zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ gibt mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), b) \geq \epsilon_0$. Aus $d(x_n, a) < \frac{1}{n} \forall n$ folgt $x_n \rightarrow 0$. Da $d(f(x_n), b) \geq \epsilon_0 \forall n$, konvergiert aber $(f(x_n))$ nicht gegen b . \square

Üb Man zeige, dass die Abbildung f aus (29) genau dann stetig in a ist, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ einer jeden Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung von a ist.

(31) Stetige Fortsetzung. Seien $(X, d), (Y, d)$ metrische Räume, $D \subset X$, $f : D \rightarrow Y$ und $a \in \overline{D} \setminus D$. Dann existiert genau dann eine stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{a\}$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert. Falls der Limes existiert, ist $f(a) := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ die eindeutige stetige Fortsetzung von f auf $D \cup \{a\}$.

Beweis. Definiere $g : D \cup \{a\} \rightarrow Y$, $g(x) := f(x) \forall x \neq a$, $g(a) := b$. Nach (28) und (29) gilt dann: g stetig in $a \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$. \square

(32) Lemma. Seien $(X, d), (Y, d), (Z, d)$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig in a und $g : Y \rightarrow Z$ stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a .

Beweis. Wende das Folgenkriterium (30) an. Sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \rightarrow a$. Dann ist $(f(x_n))$ eine Folge in Y mit $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Daher gilt $g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)) = g \circ f(a)$. \square

(33) Satz. Seien (X, d) und (Y_i, d_i) , $i = 1, \dots, m$ metrische Räume, $Y := \prod_{i=1}^m (Y_i, d_i)$ der Produktraum mit der Maximummetrik (14) und $f_i : X \rightarrow Y_i$ Abbildungen. Setze

$$f : X \rightarrow Y, f(x) := (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Dann gilt: f stetig in $a \iff f_i$ stetig in $a \forall i$.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \rightarrow a$. Nach (18) gilt: $f(x_n) \rightarrow f(a) \iff f_i(x_n) \rightarrow f_i(a) \forall i$. Wende nun das Folgenkriterium (30) an. \square

Bemerkung. Man schreibt $f = (f_1, \dots, f_m)$ und nennt f_i die i -te Komponentenabbildung von f . Ein wichtiger Spezialfall von (33) ist $(Y_i, d_i) = \mathbb{K}$ mit der Abstandsmetrik und $Y = (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$.

(34) Rechenoperationen. Die folgenden Abbildungen von $(\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ sind stetig:

- $(x, y) \mapsto x + \lambda y, \lambda \in \mathbb{K}$
- $(x, y) \mapsto xy$
- $\{(x, y) : y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

Beweis. Sei $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ und $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$. Dann konvergieren $x_n \rightarrow a$ und $y_n \rightarrow b$ nach (18). Gemäß (5.4) gilt damit $x_n + \lambda y_n \rightarrow a + \lambda b$, u.s.w. \square

(35) Satz. Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in $a \in X$. Dann sind $f + \lambda g$, fg und $\frac{f}{g}$ (im Fall $g(x) \neq 0 \forall x$) stetig in a .

Beweis. Es ist $X \rightarrow \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + \lambda g(x)$. Mit (34) ist also $f + \lambda g$ die Komposition stetiger Abbildungen in a bzw. $(f(a), g(a))$. Nach (32) ist daher $f + \lambda g$ stetig in a . Analog beweist man die übrigen Behauptungen. \square

(36) Beispiele stetiger Funktionen.

- Die konstante Funktion $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto a$, ist stetig.
- Die Projektion auf die i -te Komponente $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto x_i$, ist stetig.
- Die Monomfunktionen $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}$, sind stetig. Dabei heißt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ ein **Multiindex**.
- Sei $I \subset \mathbb{N}_0^m$ eine endliche Menge von Multiindizes und $c_\alpha \in \mathbb{K}$ für $\alpha \in I$. Dann ist die **Polynomfunktion** $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \sum_{\alpha \in I} c_\alpha x^\alpha$ stetig. Setze $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m$. Dann heißt $N := \max\{|\alpha| : \alpha \in I, c_\alpha \neq 0\}$ der **Grad** des Polynoms, sofern es nicht das Nullpolynom ist.
- Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^l$ ist stetig, denn die j -ten Komponentenfunktionen $f_j(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} x_k, j = 1, \dots, l$, sind stetig. Dabei ist $A = (\alpha_{jk})_{jk}$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasen von \mathbb{K}^m und \mathbb{K}^l .

(37) Lemma. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \forall x, y, z \in X$. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann gilt $|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\| \forall x, y \in V$.

Beweis. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \implies d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$. Vertauscht man x mit z , so folgt auch $d(z, y) - d(y, x) \leq d(z, x)$. Insgesamt folgt die Behauptung. — Im normierten Raum erhält man für $y = 0$: $d(x, 0) = \|x\|$ und $d(0, z) = \|z\|$ und daher $|\|x\| - \|z\|| \leq d(x, z) = \|x - z\|$. \square

Üb Zeige: $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig, sogar Lipschitz stetig.

(38) Satz. Seien $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \|\cdot\|)$ normierte Räume und $f : V \rightarrow W$ linear. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) f ist stetig in 0 .
- (iii) $\exists c \geq 0$ mit $\|f(x)\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in V$.

Beweis. (i) \implies (ii) ist klar. — Zu (ii) \implies (iii) beachte, dass $\delta > 0$ existiert derart, dass $\|f(x) - f(0)\| \leq 1$ falls $\|x - 0\| \leq \delta$. Nun ist $f(0) = 0$, weil f linear ist. Also gilt $\|f(x)\| \leq 1 \quad \forall x \in X$ mit $\|x\| \leq \delta$. Sei nun $x \in V$, $x \neq 0$. Dann ist $\left\| \frac{\delta}{\|x\|} x \right\| = \frac{\delta}{\|x\|} \|x\| = \delta$, weshalb $\left\| f\left(\frac{\delta}{\|x\|} x\right) \right\| \leq 1$. Da $\left\| f\left(\frac{\delta}{\|x\|} x\right) \right\| = \left\| \frac{\delta}{\|x\|} f(x) \right\| = \frac{\delta}{\|x\|} \|f(x)\|$, folgt $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|$, was auch für $x = 0$ gilt. — Zum Beweis von (iii) \implies (i) sei $a \in V$ und (x_k) in V mit $x_k \rightarrow a$. Dann gilt: $\|f(x_k) - f(a)\| = \|f(x_k - a)\| \leq c\|x_k - a\| \rightarrow 0$. Gemäß dem Folgenkriterium (30) ist f daher stetig in a . \square

(39) Beispiel. Als Unterraum von $B[a, b]$ ist $C[a, b]$ wird mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_s$ versehen. Eine weitere Norm auf $C[a, b]$ ist geben durch

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt,$$

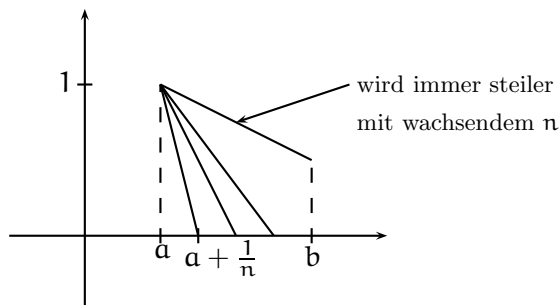
denn offenbar gelten

- $\|f\|_1 \geq 0$.
 - $\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f(t)| dt = |\alpha| \|f\|_1$.
 - $\|f + g\|_1 = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt \leq \int (|f(t)| + |g(t)|) dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$.
 - Es bleibt die Definitheit nachzuprüfen. Dazu sei $\|f\|_1 = 0$. Angenommen $f \neq 0$. Dann existiert $t_0 \in [a, b]$ mit $f(t_0) \neq 0$. Weil f stetig ist, existiert nach (7.4) ein $\delta > 0$ mit $|f(t)| \geq \frac{1}{2}|f(t_0)| \quad \forall t \in [a, b] \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Damit ist $\int_a^b |f(t)| dt \geq \frac{1}{2}|f(t_0)|l > 0$, wobei l die Länge des Intervalls $[a, b] \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta] > 0$ bezeichnet. Dies ist ein Widerspruch.
- (a) $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $T(f) := \int_a^b f(t) dt$, ist linear, weil das Integral linear ist. T ist stetig bezüglich beider Normen nach (38)(iii), denn

$$|T(f)| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt = \|f\|_1,$$

$$|T(f)| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b - a) \|f\|_s.$$

- (b) $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $T(f) := f(a)$ ist offensichtlich linear. T ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_s$, denn $|T(f)| = |f(a)| \leq \|f\|_s$. T ist nicht stetig bez. $\|\cdot\|_1$, denn für $f_n(t) := \max\{0, 1 - n(t - a)\}$ gilt:



$f_n(a) = 1$ und somit $T(f_n) = 1$, aber $\|f_n\|_1$ (Fläche unterhalb des Graphen) $\leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Also ist (38)(iii) nicht erfüllt.

(40) Satz. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) $f^{-1}(V)$ ist offen für jedes offene $V \subset Y$.
- (iii) $f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen für jedes abgeschlossene $A \subset Y$.

Beweis. (i) \implies (ii): $V \subset Y$ offen, $x_0 \in f^{-1}(V) \implies f(x_0) \in V$, V offen $\implies \exists U_\epsilon(f(x_0)) \subset V \implies \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(f(x_0))$ (weil f stetig in x_0 ist) $\implies U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(V)$. Dies gilt für jedes $x_0 \in f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(ii) \implies (i): $x_0 \in X$, $\epsilon > 0 \implies f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$ offen, $x_0 \in f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0))) \implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0)))$. Damit gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\epsilon(f(x_0))$, d.h. dass $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ falls $d(x, x_0) < \delta$. Das ist die Stetigkeit von f in x_0 . Dies gilt für jedes x_0 . Also ist f stetig.

(ii) \implies (iii): $A \subset Y$ abgeschlossen $\implies Y \setminus A$ offen $\implies f^{-1}(Y \setminus A)$ offen, $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A)$ abgeschlossen. — (iii) \implies (ii) ist ebenso einfach. \square

Beispiele. Seien X ein metrischer Raum, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- $\{x \in X : f(x) < c\} = f^{-1}(\underbrace{]-\infty, c[}_{\text{offen}})$ ist offen.
- $\{x \in X : f(x) > c\} = f^{-1}(\underbrace{]c, \infty[_}_{\text{offen}})$ ist offen.
- $\{x \in X : f(x) \leq c\} = f^{-1}(\underbrace{]-\infty, c] }_{\text{abgeschlossen}})$ ist abgeschlossen.
- $\{x \in X : f(x) \geq c\} = f^{-1}(\underbrace{[c, \infty[_}_{\text{abgeschlossen}})$ ist abgeschlossen.
- $\{x \in X : f(x) = c\} = f^{-1}(\underbrace{\{c\}}_{\text{abgeschlossen}})$ ist abgeschlossen. Die Menge heißt **Niveaumenge** von f zum Niveau c .

14 Kompaktheit

(1) **Definition.** Seien X ein metrischer Raum, $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X und $A \subset X$. Dann heißt \mathcal{U} eine **offene Überdeckung** von A , wenn alle $U \in \mathcal{U}$ offen sind und

$$A \subset \bigcup \mathcal{U} \quad \left(= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right).$$

Die Überdeckung \mathcal{U} heißt **endlich**, wenn \mathcal{U} eine endliche Menge ist. Ist $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, dann heißt \mathcal{V} eine **Teilüberdeckung** von A , wenn $A \subset \bigcup \mathcal{V}$.

Oft wird auch die Formulierung mit Familien benutzt: Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen von X heißt offene Überdeckung von A , wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

(2) **Definition.** Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt **kompakt** A , wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Wir erinnern, dass $U_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$ die offene Kugel mit Mittelpunkt $a \in X$ und Radius $r > 0$ bezeichnet.

(3) **Definition.** Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A **totalbeschränkt** oder **präkompakt**, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subset A$ existiert mit

$$A \subset \bigcup_{a \in F} U_\epsilon(a).$$

(4) **Vorbereitungen.** Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$.

- (i) Man sagt eine Folge (x_n) in A **konvergiert in** A , wenn ein $a \in A$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ existiert.
- (ii) A heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy Folge in A in A konvergiert, d.h. wenn (A, d_A) vollständig ist.
- (iii) Eine Folge (x_n) in X hat definitionsgemäß einen **Häufungspunkt** $h \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(h)\}$ unendlich ist. *Es gilt:*

$$h \text{ Häufungspunkt von } (x_n) \iff \exists \text{ Teilfolge } (x_{n_k}) \text{ von } (x_n) \text{ mit } x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h.$$

Beweis. " \Rightarrow ": Seien n_1, \dots, n_k so gewählt, dass $n_1 < \dots < n_k$ und $x_{n_j} \in U_{\frac{1}{j}}(h)$. Da $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)\}$ unendlich ist, existiert $n = n_{k+1}$ mit $n_k < n_{k+1}$ und $x_{n_{k+1}} \in U_{\frac{1}{k+1}}(h)$. Damit ist eine Teilfolge von (x_k) mit $x_{n_{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h$ definiert. — " \Leftarrow ": $\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K: x_{n_k} \in U_\epsilon(h)$. Daher ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(h)\}$ unendlich. \square

(iv) Sei (x_n) eine CF in X , (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n) und $h \in X$ mit $x_{n_k} \rightarrow h$. Dann gilt $x_n \rightarrow h$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. $\exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K: d(x_{n_k}, h) < \frac{\epsilon}{2}$. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Weil $n_k \geq k$ nach (5.11) Bem. 2, gilt daher für alle $k \geq \max\{N, K\}$: $d(x_k, h) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, h) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. \square

(v) Seien (x_n) in X und $r > 0$ derart, dass $d(x_n, x_m) \geq r \forall n \neq m$. Dann hat (x_n) keinen Häufungspunkt.

Beweis. Anderenfalls existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) und ein $h \in X$ mit $x_{n_k} \rightarrow h$. Dann gilt: $\exists K \in \mathbb{N} \forall k \geq K: d(x_{n_k}, h) < \frac{r}{2} \implies d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, h) + d(h, x_{n_l}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \forall k, l \geq K$, was ein Widerspruch ist. \square

(vi) A totalbeschränkt $\implies A$ beschränkt.

Beweis. Sei $F \subset A$ endlich mit $A \subset \bigcup_{a \in F} U_1(a)$. Dann existiert zu jedem $x \in A$ ein $a_x \in F$ mit $x \in U_1(a_x)$. Sei $a_0 \in F$. Dann gilt: $d(x, a_0) \leq d(x, a_x) + d(a_x, a_0) \leq 1 + \max\{d(a, a_0) : a \in F\}$. \square

(vii) $V \subset A$ offen in $(A, d_A) \iff \exists U \subset X$ offen mit $V = U \cap A$.

Beweis. Die offene Kugel in (A, d_A) um $a \in A$ mit Radius $r > 0$ ist $U_r^A(a) = \{x \in A : d_A(x, a) < r\} = \{x \in A : d(x, a) < r\} = U_r(a) \cap A$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

(viii) A kompakt $\iff (A, d_A)$ kompakt.

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus (2) und (vii). \square

(5) Hauptsatz zur Kompaktheit in metrischen Räumen. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist kompakt.

(ii) Jede Folge in A hat eine in A konvergente Teilfolge.

(iii) A ist totalbeschränkt und vollständig.

Beweis. Nach der Vorbemerkung (4)(viii) sei o.E. $A = X$.

(i) \implies (ii): Sei (x_n) eine Folge in X . Betrachte dazu

$$F_m := \overline{\{x_n : n \geq m\}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Zunächst wird $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$ gezeigt. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann ist $X = X \setminus \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (X \setminus F_m) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$, wobei $U_m := (X \setminus F_m)$ offen ist. Weil X kompakt ist, existieren $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ mit $X = U_{m_1} \cup \dots \cup U_{m_k}$. Das bedeutet $F_{m_1} \cap \dots \cap F_{m_k} = \emptyset$, was ein Widerspruch ist, denn für $m_0 := \max\{m_1, \dots, m_k\}$ ist $F_{m_0} = F_{m_1} \cap \dots \cap F_{m_k}$ und $F_{m_0} \neq \emptyset$. Also existiert ein $h \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$.

Sei nun $\epsilon > 0$. Da $h \in F_m$ folgt $\{x_n : n \geq m\} \cap U_\epsilon(h) \neq \emptyset$. Dies gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$. Daher ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\epsilon(h)\}$ unendlich. Also ist h Häufungspunkt von (x_n) . Nach (4)(iii) gilt (ii).

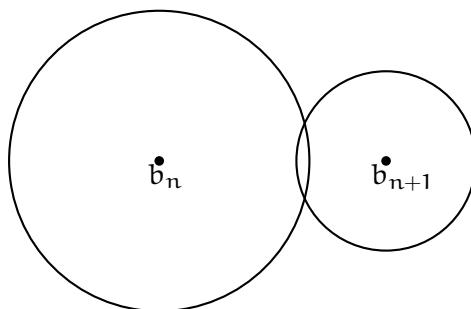
(ii) \Rightarrow (iii): Sei (x_n) eine CF in X . Nach (ii) existiert ein $h \in X$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \rightarrow h$. Nach (4)(iv) gilt $x_n \rightarrow h$. Also ist X vollständig.

Es bleibt zu zeigen, dass X totalbeschränkt ist. Man nehme das Gegenteil an. Dann existiert $r > 0$ derart, dass X keine endliche Überdeckung durch offene r -Kugeln besitzt. Damit wird induktiv eine Folge (x_n) wie folgt definiert. Seien x_1, \dots, x_n bereits so gewählt, dass $d(x_i, x_j) \geq r \forall i \neq j$. Gemäß der Annahme existiert $x_{n+1} \in X$ mit $d(x_i, x_{n+1}) \geq r \forall i = 1, \dots, n$. Nach (4)(v) hat (x_n) keinen Häufungspunkt. Dies ist ein Widerspruch zu (ii) nach (4)(iii).

(iii) \Rightarrow (i): Angenommen X ist nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung \mathcal{U} von X ohne eine endliche Teilüberdeckung von X . Da X totalbeschränkt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln mit Radius 1, die X überdecken. Darunter gibt es (mindestens) eine $B_1 := U_1(b_1)$, die nicht von endlich vielen der $U \in \mathcal{U}$ überdeckt wird.

Ebenso gibt es endlich viele offene Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$, die X überdecken. Man betrachte davon diejenigen Kugeln B mit $B \cap B_1 \neq \emptyset$. Diese überdecken B_1 . Daher gibt es mindestens eine $B_2 := U_{\frac{1}{2}}(b_2)$ die nicht von endlich vielen der $U \in \mathcal{U}$ überdeckt wird. U.s.w.

Induktiv erhält man so die Folge (b_n) der Mittelpunkte. Hiefür gilt $d(b_n, b_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-n-1} < 2^{-n+1}$, weil $B_n \cap B_{n+1} \neq \emptyset$.



Daraus folgt, dass (b_n) eine Cauchy Folge ist, denn für $n > m \geq N$ ist $d(b_m, b_n) \leq d(b_m, b_{m+1}) + d(b_{m+1}, b_{m+2}) + \dots + d(b_{n-1}, b_n) \leq 2^{-m+1} + 2^{-m+2} + \dots + 2^{-(n-1)+1} \leq \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k+1} = 2^{-N+2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Da X vollständig ist, existiert $b \in X$ mit $b_n \rightarrow b$. Dazu existiert $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $b \in U_0$. Sei $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(b) \subset U_0$. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(b_N, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für $x \in U_{2^{-N}}(b_N)$: $d(x, b) \leq d(x, b_N) + d(b_N, b) < 2^{-N} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Daher ist $B_N = U_{2^{-N}}(b_N) \subset U_\epsilon(b) \subset U_0$, im Widerspruch dazu, dass B_N nicht von endlich vielen $U \in \mathcal{U}$ überdeckt wird. \square

(6) Korollar. Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt: A kompakt $\implies A$ beschränkt und abgeschlossen.

Beweis. A ist totalbeschränkt nach (5) und somit beschränkt nach (4)(vi). Weiter ist A vollständig nach (5) und somit abgeschlossen nach (13.25)(i). \square

Die Umkehrung in (6) gilt allgemein nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

(7) **Beispiel.** Offenbar ist $\tilde{U}_1(0) \subset B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ beschränkt und abgeschlossen. Aber $\tilde{U}_1(0)$ ist nicht kompakt, da für

$$f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}, f_n(m) := \delta_{n,m}$$

gilt: (f_n) in $\tilde{U}_1(0)$ und $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ für $n \neq m \xrightarrow{(4)(v)} (f_n)$ hat keinen Häufungspunkt $\xrightarrow{(5)(ii)} \tilde{U}_1(0)$ ist nicht kompakt.

(8) **Korollar.** $A \subset \mathbb{K}^m$ ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Gemäß (13.16) und anschließender Bemerkung ist \mathbb{K}^m mit der Maximummetrik versehen. Sei A beschränkt und abgeschlossen und (x_k) in A . Dann sind $(x_{k,i})_k$ beschränkt in \mathbb{K} für $i = 1, \dots, m$. Nach (5.15) Bolzano–Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_1,1})_l$ von $(x_{k,1})_k$. Ebenso existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{1p},2})_p$ von $(x_{k_1,2})_l$, u.s.w. Auf diese Weise findet man eine Teilfolge (y_n) von (x_k) derart, dass $(y_{n,i})_n$ für $i = 1, \dots, m$ konvergiert. Nach (13.18) konvergiert (y_n) gegen ein $y \in \mathbb{K}^m$. Da (y_n) in A ist und $A = \overline{A}$, folgt $y \in A$. Damit ist A kompakt nach (5)(ii). — Die Umkehrung gilt nach (6). \square

Sei D eine Menge. Es ist $\tilde{U}_1(0) \subset (B(D, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ genau dann kompakt, wenn D endlich ist. Falls nämlich $|D| = m$, dann ist $B(D, \mathbb{K})$ mit \mathbb{K}^m identifizierbar, und die Behauptung folgt aus (8). Falls $|D| = \infty$, gehe man wie in Beispiel (7) vor.

Üb Seien X ein kompakter metrischer Raum und \mathcal{K} eine Menge abgeschlossener Teilmengen, die die **endliche Durchschnittseigenschaft** erfüllt, d.h. wofür $\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset$ für alle endlichen Teilmengen $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$. Man zeige $\bigcap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Als Korollar zeige man, dass für jede absteigende Folge $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$ kompakter Teilmengen eines metrischen Raums mit $\bigcap_n K_n = \emptyset$ folgt, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $K_n = \emptyset$.

Lösung. Geht man von der gegenteiligen Annahme aus, dann ist $\mathcal{U} := \{X \setminus K : K \in \mathcal{K}\}$ eine offene Überdeckung von X , weshalb es eine endliche Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ gibt, wofür bereits $\mathcal{V} := \{X \setminus K : K \in \mathcal{E}\}$ eine Überdeckung von X ist. Dies ergibt den Widerspruch $\bigcap \mathcal{E} = \emptyset$. — Man wende obiges Ergebnis auf den kompakten metrischen Raum $X := K_1$ an. Die Aussage folgt durch Negation.

(9) **Satz.** Seien X_i metrische Räume, $X := \prod_{i=1}^m X_i$ der Produktraum und $A_i \subset X_i$ für $i = 1, \dots, m$. Dann gilt:

$$\prod_{i=1}^m A_i \text{ kompakt in } X \iff A_i \text{ kompakt in } X_i \forall i.$$

Beweis. "⇐": Sei (x_k) in $A := \prod_{i=1}^m A_i$. Für jedes i ist dann $(x_{k,i})_k$ eine Folge in der kompakten Menge A_i . Nach (6) ist A_i abgeschlossen. Wie im Beweis zu (8) folgt die Existenz einer gegen ein $y \in X$ konvergenten Teilfolge (y_n) von (x_k) . Da A nach (13.16) abgeschlossen ist, ist $y \in A$. Somit ist A kompakt nach (5)(ii). — "⇒": Folgt sofort aus dem folgenden Satz, weil die Projektionen $p_i : X \rightarrow X_i$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$ offensichtlich stetig sind. \square

(10) **Satz vom kompakten Bild.** Seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(A)$ kompakt.

Beweis. Sei \mathcal{V} eine offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $f^{-1}(V)$ offen für alle $V \in \mathcal{V}$ und $\mathcal{U} := \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ eine offene Überdeckung von $A \subset f^{-1}(f(A))$. Damit existiert ein endliches $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, so dass $\mathcal{U}_1 := \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}_1\}$ eine Überdeckung von A ist, d.h. $A \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}_1} f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}_1} V\right)$. Hieraus folgt, dass \mathcal{V}_1 eine endliche Teilüberdeckung von $f(A)$ ist. Also ist $f(A)$ kompakt. \square

(11) Satz vom Maximum und Minimum. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ mit

$$f(\mathbf{a}) = \inf f(X), \quad \mathbf{b} = \sup f(X).$$

D.h. f hat ein Minimum und Maximum.

Beweis. Nach (10) ist $f(X)$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen nach (8). Damit sind $\inf f(X) \in f(X)$ und $\sup f(X) \in f(X)$. \square

(12) Lemma. Seien X ein kompakter metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt: A kompakt $\iff A$ abgeschlossen.

Beweis. " \implies " gilt nach (6). Zu " \impliedby " sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von A . Dann ist $\{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X . Also existiert ein endliches $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, so dass $\{X \setminus A\} \cup \mathcal{U}_1$ eine Überdeckung von X ist. Daher ist \mathcal{U}_1 eine endliche Teilüberdeckung von A . \square

(13) Satz von der stetigen Inversen. Seien X, Y metrische Räume, X kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig und injektiv und $g : f(X) \rightarrow X$ die Umkehrabbildung zu f (d.h. $g(f(x)) = x \forall x \in X$). Dann ist g stetig.

Beweis. Sei A abgeschlossen. Nach (13.40)(iii) genügt es zu zeigen, dass $g^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Nun ist $g^{-1}(A) = f(A)$ kompakt nach (12) und (10) und somit abgeschlossen nach (12). \square

(14) Definition. Seien X und Y metrische Räume. $f : X \rightarrow Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X \text{ mit } d(x, y) < \delta : d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Offenbar gilt: f gleichmäßig stetig $\implies f$ stetig. Die Umkehrung gilt nicht (siehe (7.19)ff.).

(15) Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit. Seien X, Y metrische Räume, X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert $\epsilon_0 > 0$ derart, dass es zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ ein Paar $(x_n, y_n) \in X \times X$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ gibt, wofür $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0$. Weil X kompakt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und ein $a \in X$ mit $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$. Es folgt

$$d(a, y_{n_k}) \leq \underbrace{d(a, x_{n_k})}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{d(x_{n_k}, y_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Also gilt auch $y_{n_k} \rightarrow a$. Weil f stetig ist, folgt $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d(f(x_{n_k}), f(a)) + d(f(a), f(y_{n_k})) \rightarrow 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0 \forall n$. \square

(16) Definition. Sei V ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei Normen auf V . Dann heißen diese Normen **äquivalent**, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in V.$$

Man überlegt sich leicht:

- Äquivalente Normen definieren die gleiche Topologie, d.h. die gleichen offenen Mengen, da $\forall a \in X, r > 0$

$$U_{\frac{r}{\beta}}^{(1)}(a) \subset U_r^{(2)}(a) \subset U_{\alpha r}^{(1)}(a).$$

- Äquivalente Normen definieren die gleichen abgeschlossenen, beschränkten und kompakten Mengen.
- Äquivalente Normen definieren die gleichen CF, weshalb $(V, \|\cdot\|_1)$ genau dann ein BR ist, wenn $(V, \|\cdot\|_2)$ ein BR ist.
- Die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Zur Symmetrie beachte, dass $\frac{1}{\beta} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_2$ gilt.

(17) Satz. Alle Normen auf \mathbb{K}^m sind äquivalent. Damit sind alle Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum äquivalent.

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{K}^m . Es genügt zu zeigen, dass Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha \|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_{\infty} \quad \forall x \in \mathbb{K}^m.$$

Alle $x \in \mathbb{K}^m$ lassen sich als $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j$ bez. der Standardbasis $\{e_j\}$ des \mathbb{K}^m darstellen. Mit $\beta' := \max\{\|e_j\| : j = 1, \dots, m\}$ und $\beta := m\beta'$ folgt

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \|e_j\| \leq \beta' \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq \beta' m \max\{|\lambda_j| : j = 1, \dots, m\} = \beta \|x\|_{\infty}.$$

Betrachte nun $f : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \|x\|$. Nach (13.37) ist f stetig, denn $|f(x) - f(a)| = \left| \|x\| - \|a\| \right| \leq \|x - a\| \leq \beta \|x - a\|_{\infty}$. Weiter ist $S := \{x \in \mathbb{K}^m : \|x\|_{\infty} = 1\}$ offenbar beschränkt und abgeschlossen, weshalb S nach (8) kompakt ist. Weil f positiv ist, folgt aus (11), dass $\alpha := \min f(S) > 0$. Damit gilt für alle $x \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$: $\alpha \leq f\left(\frac{1}{\|x\|_{\infty}} x\right) = \frac{1}{\|x\|_{\infty}} \|x\|$, weshalb $\|x\| \geq \alpha \|x\|_{\infty}$. \square

Üb Seien (X, d) ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ und $c \in X$. Dann definiert

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

den **Abstand** der Menge A von der Menge B . Weiter ist $d(c, A) := d(\{c\}, A)$ der Abstand des Punktes c von der Menge A . Zeigen Sie:

- $d(A, B) = 0$ falls $A \cap B \neq \emptyset$. Man gebe ein Beispiel für $d(A, B) = 0$ mit zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B .
- $|d(x, A) - d(y, B)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$.
- $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ ist stetig.
- Ist A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$, dann ist $d(A, B) > 0$.

15 Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wie bisher sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter bezeichnet I ein allgemeines Intervall, d.h. I braucht weder beschränkt noch offen oder abgeschlossen zu sein.

(1) **Definition.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\alpha_n \neq 0$. Dann nennt man

$$\alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0 \quad (*)$$

eine **homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten** $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Dabei bezeichnet $y^{(i)}$ die i -te Ableitung der Funktion y . Die Differentialgleichung heißt

- homogen, weil die rechte Seite gleich 0 ist
- n -ter Ordnung, weil $y^{(n)}$ die höchste vorkommende Ableitung ist
- linear, weil $\alpha_n \eta_n + \alpha_{n-1} \eta_{n-1} + \dots + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_0 \eta_0 = 0$ eine lineare Gleichung für die Unbekannten $\eta_n, \dots, \eta_0 \in \mathbb{K}$ ist.

Eine **Lösung** von (*) ist jede auf einem Intervall I definierte n -mal differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{K}$, für die gilt:

$$\alpha_n y^{(n)}(t) + \dots + \alpha_0 y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Üb Zeige: Jede Lösung von (*) ist beliebig oft differenzierbar. (Außerdem wird sich herausstellen, dass jede Lösung eindeutig auf ganz \mathbb{R} fortsetzbar ist.)

(2) **Beispiel.** Die Auslenkung y eines gedämpften linearen Oszillators genügt der Differentialgleichung

$$m y'' + d y' + k y = 0.$$

Dabei ist

- m die Masse
- y'' die Beschleunigung
- $d y'$ die zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft
- $k y$ die zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft.

Setze $\frac{d}{m} := 2b$ und $\frac{k}{m} := c$. Dann lautet die Differenzialgleichung

$$y'' + 2by' + cy = 0.$$

Mit dem Lösungsansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ folgt durch Einsetzen $(\lambda^2 + 2b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0$. Damit ist $e^{\lambda t}$ genau dann Lösung, wenn $\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$, d.h.

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Fall 1. $b^2 > c \implies \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Die Lösungen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ können wegen der Linearität der DG linear zu weiteren Lösungen kombiniert werden. Man verifiziert, dass

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für jedes $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Lösung ist.

Fall 2. $b^2 < c \implies \lambda_{1,2} = -b \pm i\omega$, $\omega := \sqrt{c - b^2}$, d.h. λ_1, λ_2 sind nicht reell und konjugiert komplex. Entsprechend ist $e^{\lambda_{1,2} t} = e^{-bt \pm i\omega t} = e^{-bt}(\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$. Wie man sich überzeugt, ist die Linearkombination

$$y(t) = e^{-bt}(a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für jedes $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Lösung.

Fall 3. $b^2 = c \implies \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -b$. Der Ansatz liefert hier nur die Lösung e^{-bt} . Man bemerkt, dass in diesem Fall te^{-bt} eine weitere Lösung ist. Also ist die Linearkombination

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-bt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

für jedes $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Lösung.

Es wird sich herausstellen, dass es in jedem der drei Fälle keine weiteren reellen Lösungen gibt.

(3) Äquivalentes System 1. Ordnung. Wir führen zu (1)(*) künstlich folgende neue Funktionen ein:

$$\begin{aligned} y_1 &:= y \\ y_2 &:= y' \\ y_3 &:= y^{(2)} \\ &\vdots \\ y_n &:= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Dann gelten offenbar die gekoppelten Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &:= y_2, \\ y_2' &:= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &:= y_n, \\ y_n' &:= -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_n - \dots - \frac{\alpha_0}{\alpha_n} y_1. \end{aligned}$$

Faßt man y_1, \dots, y_n zu einem Vektor $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ zusammen, dann gilt

$$\mathbf{y}' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_n - \dots - \frac{\alpha_0}{\alpha_n} y_1 \end{pmatrix}. \text{ Das bedeutet}$$

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares System 1. Ordnung, was offenbar äquivalent zu (1)(*) ist.

(4) **Beispiel.** Der gedämpfte Oszillator (2) ist äquivalent zu

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}.$$

(5) **Definition.** Seien $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ und

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dann heißt

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{**}$$

ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. A ist die **Koeffizientenmatrix**. Lösung ist jede auf einem Intervall I definierte differenzierbare Abbildung $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) \quad \forall t \in I.$$

Differenziert wird komponentenweise.

Wie das Beispiel des gedämpften Oszillators zeigt, ist es sinnvoll, komplexwertige Lösungen zu betrachten, auch wenn man letztlich nur an reellen Lösungen interessiert ist. Zur Lösung von (**) wird die Matrixexponentialfunktion eingeführt.

(6) Operatornorm. Bezeichne $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{K}^n bzw. \mathbb{K}^m . Dann definiert

$$\|B\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1} \|Bx\|$$

für $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ eine Norm, die sogenannte Operatornorm auf $\mathbb{K}^{m,n}$.

Beweis. • $\|B\| \geq 0$ ist klar; $\|B\| = 0 \Rightarrow Bx = 0 \forall \|x\| \leq 1 \Rightarrow Bx = \|x\|B \left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = 0 \forall x \neq 0 \Rightarrow B = 0$. Also ist $\|\cdot\|$ positiv definit.

- $\|\lambda Bx\| = |\lambda| \|Bx\| \Rightarrow \|\lambda B\| = |\lambda| \|B\|$. Also ist $\|\cdot\|$ positiv homogen.
- $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| + \|B\| \forall \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Also erfüllt $\|\cdot\|$ die Dreiecksungleichung.

□

Die Operatornorm hat wichtige Eigenschaften.

(7) Satz. $\forall C \in \mathbb{K}^{l,m}, B \in \mathbb{K}^{m,n}, x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

(α) $\|Bx\| \leq \|B\| \|x\|$

(β) $\|CB\| \leq \|C\| \|B\|$

(γ) $\mathbb{K}^{l,m} \times \mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{l,n}, (C, B) \mapsto CB$ ist stetig.

Beweis. (α) Für $x \neq 0$ gilt: $\|B\| \geq \left\| B \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} Bx \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|Bx\| \Rightarrow (\alpha)$.

(β) $\|CBx\| = \|C(Bx)\| \stackrel{(\alpha)}{\leq} \|C\| \|Bx\| \stackrel{(\alpha)}{\leq} \|C\| \|B\| \|x\| \leq \|C\| \|B\| \forall \|x\| \leq 1 \Rightarrow (\beta)$.

(γ) $\|CB - C_0B_0\| = \|CB - CB_0 + CB_0 - C_0B_0\| \leq \|C(B - B_0)\| + \|(C - C_0)B_0\| \stackrel{(\beta)}{\leq} \|C\| \|B - B_0\| + \|C - C_0\| \|B_0\| \leq (\|C - C_0\| + \|C_0\|) \|B - B_0\| + \|C - C_0\| \|B_0\| \rightarrow 0$ für $B \rightarrow B_0, C \rightarrow C_0$.

□

Üb Man zeige: Seien $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\beta \geq 0$ mit $\|Bx\| \leq \beta \|x\|$ für alle $\|x\| \leq 1$. Dann ist $\|B\| \leq \beta$.

(8) Komponentenweise Konvergenz. Sei $\|B\|_\infty = \max_{i,j} |B_{ij}|$ die Maximumnorm auf $\mathbb{K}^{m,n}$. Da $\mathbb{K}^{m,n}$ endlich dimensional ist, sind nach (14.17) alle Normen darauf äquivalent. Also existieren $\alpha, \beta > 0$ mit

$$\alpha \|B\|_\infty \leq \|B\| \leq \beta \|B\|_\infty \quad \forall B \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Sind (B_k) in $\mathbb{K}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m,n}$, dann gilt daher:

$$B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B \text{ (bez. irgendeiner Norm auf } \mathbb{K}^{m,n}) \iff B_{k,ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B_{ij} \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

(9) Matrixexponentialfunktion. Für $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ konvergiert die Reihe

$$\exp(B) := e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = E_n + B + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \dots$$

absolut in $(\mathbb{C}^{n,n}, \|\cdot\|)$ (siehe (10.6)) mit $\|e^B\| \leq e^{\|B\|}$.

Beweis. $\forall j \in \mathbb{N}: \left\| \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} B^k \right\| \leq \sum_{k=0}^j \left\| \frac{1}{k!} B^k \right\| \stackrel{(7)(\beta)}{\leq} \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \|B\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^k = e^{\|B\|}. \quad \square$

(10) Exponential diagonaler und nilpotenter Matrizen.

$$(a) D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n} \implies e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

(b) $N \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt nilpotent, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $N^l = 0$. Dann ist

$$e^N = E + N + \frac{1}{2} N^2 + \dots + \frac{1}{(l-1)!} N^{l-1} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} N^k.$$

Beweis. (a) $D^k = \text{diag}(\dots, \lambda_j^k, \dots) \Rightarrow \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} D^k = \text{diag}(\dots, \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \lambda_j^k, \dots)$, woraus die Behauptung wegen (8) folgt. (b) ist klar. \square

(11) Beispiele.

$$(a) \exp \begin{pmatrix} 2\pi i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0 \Rightarrow e^{tA} = E + t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 5t + 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Fall, dass A nilpotent ist, sind die Koeffizienten von e^{tA} Polynome in t .

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = -E \Rightarrow A^3 = -A, A^4 = E, A^5 = A$ u.s.w. Daher ist

$$e^{tA} = E + tA - \frac{t^2}{2!}E - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!}E + \frac{t^5}{5!}A - \dots = (1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots)E + (t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots)A = (\cos t)E + (\sin t)A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(d) $N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist nilpotent mit $N^n = 0$, denn allgemein gilt: Seien $r, s \geq 0$

und $A = (A_{ij})$ mit $A_{ij} = 0$ für $i \geq j - r$ sowie $B = (B_{kl})$ mit $B_{kl} = 0$ für $k \geq l - s$, d.h. die Diagonale sowie die anschließenden r bzw. s oberen Nebendiagonalen von A bzw. B sind null. Dann verschwinden die Diagonale und die anschließenden $r + s + 1$ oberen Nebendiagonalen von $C := BA$, denn $C_{kj} = \sum_{l=1}^n B_{kl}A_{lj} \neq 0$ höchstens für $l < j - r$ und $k < l - s$, d.h. $C_{kj} = 0$ für $k \geq j - r - s - 1$.

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ ist $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ **unipotent**, wobei in der r -ten Neben-

diagonalen Polynome in t vom Grad $\leq r$ stehen: $e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}$ mit

$$A^r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & * \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(12) Umordnungssatz. Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in V absolut konvergent und $\pi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\pi(j)}$ absolut konvergent und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\pi(j)}.$$

Beweis. Man lese im Beweis von (6.13) den Betrag $|\cdot|$ als Norm $\|\cdot\|$. □

(13) Cauchyprodukt. Seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} A_k, \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ absolut konvergent in $(\mathbb{C}^{n,n}, \|\cdot\|)$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j \text{ mit } C_j := \sum_{k+l=j} A_k B_l, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

absolut konvergent mit $\sum_{j=0}^{\infty} C_j = (\sum_{k=0}^{\infty} A_k) (\sum_{k=0}^{\infty} B_k)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu (6.14). □

(14) **Rechenregeln zur Matrixexponentialfunktion.** Für alle $A, B, C \in \mathbb{C}^{n,n}$ gilt:

- (a) $e^0 = E_n$ und $\exp(\mathbb{R}^{n,n}) \subset \mathbb{R}^{n,n}$.
- (b) **Funktionalgleichung:** $AB = BA$ (d.h. A und B vertauschen) $\Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$.
- (c) e^B ist invertierbar mit der Inversen $(e^B)^{-1} = e^{-B}$.
- (d) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}$, $t \mapsto e^{tA}$ ist beliebig oft differenzierbar mit $\left(\frac{d}{dt}\right)^j e^{tA} = e^{tA} A^j = A^j e^{tA}$, $j \in \mathbb{N}$.
- (e) C invertierbar $\Rightarrow C^{-1} e^B C = e^{C^{-1} B C}$.
- (f) $\det e^B = e^{\text{Spur } B}$.
- (g) $\overline{\exp(B)} = \exp(\overline{B})$.

Beweis. (a) ist klar nach Definition.

(b) Es ist $e^{A+B} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A+B)^j$ und wegen $AB = BA$ gilt die binomische Formel $(A+B)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} A^k B^{j-k}$. Hiermit folgt wie in (6.17) wegen (12), (13) die Funktionalgleichung.

(c) $E_n = e^0 = e^{B-B} \stackrel{(b)}{=} e^B e^{-B}$.

(d) $\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA} - h e^{tA} A) \stackrel{(b)}{=} e^{tA} \frac{1}{h}(e^{hA} - E - hA)$; $\frac{1}{h}(e^{hA} - E - hA) = \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} A^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k$; $\left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} A^k \right\| \leq \|h\| \|A\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} (\|h\| \|A\|)^k < \|h\| \|A\|^2 e^{\|h\| \|A\|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.
Mit der Stetigkeit (7)(γ) folgt daraus $\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA} - h e^{tA} A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, was $(e^{tA})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) = e^{tA} A$ bedeutet. Ganz ähnlich folgt $(e^{tA})' = A e^{tA}$. Die höheren Ableitungen ergeben sich daraus mit Induktion nach j .

(e) $\exp(C^{-1} B C) \stackrel{N \rightarrow \infty}{\longleftarrow} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (C^{-1} B C)^k \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} C^{-1} B^k C = C^{-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} B^k \right) C \stackrel{N \rightarrow \infty}{\longrightarrow} C^{-1} B C$ wegen der Stetigkeit (7)(γ). Dazu wurde benutzt

$$(C^{-1} B C)^k = \underbrace{C^{-1} B C C^{-1} B C \dots C^{-1} B C}_k = C^{-1} B^k C \quad (*)$$

(f) folgt mit Hilfe der Jordan Normalform (17).

(g) gilt, weil generell $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$ und weil $A \mapsto \overline{A}$ nach (8) stetig ist. □

Üb Sei $t \mapsto C(t)$ eine auf einem Intervall definierte Funktion in $\mathbb{C}^{m,n}$. Sie ist definitionsgemäß differenzierbar in t , wenn $C'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (C(t+h) - C(t))$ existiert. Man zeige, dass

- C genau dann differenzierbar in t ist, wenn alle ihre Komponentenfunktionen c_{ij} differenzierbar in t sind, und ggf. $c'(t)_{ij}$ die Komponenten von $C'(t)$ sind.

Seien nun $t \mapsto A(t)$ und $t \mapsto B(t)$ zwei auf einem Intervall definierte in t differenzierbare Funktionen in $\mathbb{C}^{m,k}$ bzw. $\mathbb{C}^{k,n}$. Man zeige, dass

- $t \mapsto C(t)$ mit $C(t) := A(t)B(t)$ differenzierbar in t ist, und dass die Produktregel $C'(t) = A'(t)B(t) - A(t)B'(t)$ gilt.

Wir wenden uns nun wieder dem Differentialgleichungssystem (5)(**) zu.

(15) Anfangswertaufgabe. Seien $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben.

Gesucht ist eine Lösung von

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0.$$

Dies nennt man eine Anfangswertaufgabe (AWA). Sie hat die eindeutige auf ganz \mathbb{R} fortgesetzte Lösung

$$y(t) := e^{(t-t_0)A} y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Mit (14)(d) folgt $y'(t) = Ae^{(t-t_0)A} y_0 = Ay(t)$. Außerdem ist $y(t_0) = e^{0A} y_0 = E_n y_0 = y_0$. — Zur Eindeutigkeit sei \tilde{y} eine weitere Lösung der AWA auf \tilde{I} mit $t_0 \in \tilde{I}$. Für $z := y - \tilde{y}$ auf \tilde{I} gilt $z'(t) = y'(t) - \tilde{y}'(t) = Ay(t) - A\tilde{y}(t) = Az(t) \quad \forall t \in \tilde{I}$ und $z(t_0) = 0$. Setze weiter $x(t) := e^{-(t-t_0)A} z(t)$. Wieder nach (14)(d) und der Produktregel ist $x'(t) = e^{-(t-t_0)A} (-A)z(t) + e^{-(t-t_0)A} z'(t) = e^{-(t-t_0)A} (-Az(t) + z'(t)) = 0$ und $x(t_0) = 0$. Der HDI komponentenweise auf x angewendet liefert $x(t) = 0$ und somit $z(t) = e^{(t-t_0)A} x(t) = 0$, d.h. $y(t) = \tilde{y}(t) \quad \forall t \in \tilde{I}$. \square

Aufgrund von (15) betrachten wir die Lösungen von

$$y' = Ay \tag{**}$$

stets auf ganz \mathbb{R} .

(16) Fundamentalsystem. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sei

$$\mathcal{L} := \{y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n : y \text{ differenzierbar und Lösung von } y' = Ay\}$$

der Lösungsraum. Dann ist \mathcal{L} ein Untervektorraum von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ der Dimension n . Die Spalten von $t \mapsto \exp(tA)$ bilden eine Basis von \mathcal{L} .

Eine Basis y_1, \dots, y_n von \mathcal{L} heißt ein Fundamentalsystem von (*) und $Y = (y_1 \dots y_n)$ heißt eine Fundamentalmatrix.

Die Abbildung $C \mapsto Y$, $Y(t) := e^{tA} C$ ist eine Bijektion von der Menge der invertierbaren Matrizen $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ auf die der Fundamentalmatrizen Y von (*). Die Umkehrabbildung lautet $Y \mapsto Y(0)$.

Beweis. • Nach (14)(d) und (15) sind die Lösungen von (**) beliebig oft differenzierbar.

- Die Nullfunktion 0 , die sogenannte triviale Lösung, liegt in \mathcal{L} . Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und $y := y_1 + \alpha y_2$. Dann ist $y' = y_1' + \alpha y_2' = Ay_1 + \alpha Ay_2 = A(y_1 + \alpha y_2) = Ay$, weshalb $y \in \mathcal{L}$. Somit ist \mathcal{L} ein Untervektorraum von $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.
- Sei $\eta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\eta_i(t) := e^{tA} e_i$, die i -te Spalte von e^{tA} . Nach (15) ist $\eta_i \in \mathcal{L}$. Es ist die Lösung zur AWA $\eta_i(0) = e_i$.
- Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der η_i sei $\alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_n \eta_n = 0$. Daraus folgt insbesondere $\alpha_1 \eta_1(0) + \dots + \alpha_n \eta_n(0) = 0$, d.h. $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$, weshalb $\alpha_i = 0 \quad \forall i$.

- Die η_i bilden eine Erzeugendenmenge. Zum Nachweis sei $y \in \mathcal{L}$ vorgegeben. Dann setze $\alpha_i := y_i(0)$ und $\eta := \sum_i \alpha_i \eta_i \in \mathcal{L}$. Dafür ist $\eta(0) = \sum_i \alpha_i \eta_i(0) = \sum_i y_i(0) e_i = y(0)$. Damit lösen y und η die gleiche AWA, weshalb $y = \eta$ nach (15).
- Sei C invertierbar und $y(t) = e^{tA} C \forall t$. Dann ist (y_1, \dots, y_n) das Bild der Basis (η_1, \dots, η_n) unter C . Damit ist (y_1, \dots, y_n) selbst eine Basis. Also ist Y eine Fundamentalmatrix.
- Sei nun umgekehrt Y eine Fundamentalmatrix. Setze $\tilde{Y}(t) := e^{tA} Y(0)$. Nach (15) löst \tilde{y}_i die AWA zu $\tilde{y}_i(0) = y_i(0)$, weshalb $\tilde{y}_i = y_i \forall i$. Damit ist $\tilde{Y} = Y$, d.h. $Y(t) = e^{tA} Y(0)$. $Y(0)$ ist invertierbar, weil es die Basis (η_1, \dots, η_n) auf die Basis (y_1, \dots, y_n) abbildet.

□

Damit ist die Lösung von $y' = Ay$ auf das Problem der Berechnung von e^{tA} zurückgeführt. Die direkte Berechnung über die Reihe ist oft unmöglich.

(17) Jordan Normalform. Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann existiert eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{n,n}$ derart, dass

$$A = C K C^{-1},$$

wobei K die Blockdiagonalform

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_s \end{pmatrix}$$

besitzt mit den Jordan Kästchen

$$K_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\sigma \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ die Menge der Eigenwerte von A ist. Die λ_σ sind dabei im allgemeinen nicht paarweise verschieden. Die Spalten von C bilden eine Basis aus Hauptvektoren von A . Dabei heißt $v \neq 0$ ein Hauptvektor von A zum Eigenwert μ , falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $(A - \mu E)^k v = 0$.

Beweis. Siehe Lineare Algebra.

□

Man beachte, dass falls A reell ist, C in (17) dennoch nicht reell gewählt werden kann.

(18) Berechnung von e^{tA} . Mit (17) folgt zunächst

$$e^{tA} = e^{CtKC^{-1}} \stackrel{(14)(e)}{=} Ce^{tK}C^{-1} = C \operatorname{diag}(e^{tK_1}, \dots, e^{tK_s})C^{-1},$$

weil sich die Blöcke unabhängig addieren und multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & 0 \\ 0 & BB' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+A' & 0 \\ 0 & B+B' \end{pmatrix}.$$

Für die Jordan Kästchen gilt $K_\sigma = \lambda_\sigma E_{k_\sigma} + N_\sigma$, wobei $N_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ nach (11)(d) nilpotent ist und $t\lambda_\sigma E_{k_\sigma}$ und tN_σ vertauschen. Nach (14)(b) ist daher

$$e^{tK_\sigma} = e^{t\lambda_\sigma E_{k_\sigma}} e^{tN_\sigma} = e^{t\lambda_\sigma} (E_{k_\sigma} + tN_\sigma + \dots + \frac{t^{k_\sigma-1}}{(k_\sigma-1)!} N_\sigma^{k_\sigma-1}) = e^{t\lambda_\sigma} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{k_\sigma-1}}{(k_\sigma-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Berechnung von e^{tA} auf die Berechnung der Jordan Normalform von A zurückgeführt.

(19) Algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte. Bekanntlich ist μ ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - \mu E) = 0$. Für das charakteristische Polynom gilt einerseits

$$\det(A - \zeta E) = \prod_{\mu \text{ EW von } A} (\mu - \zeta)^{\alpha_\mu},$$

wobei α_μ die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts μ ist. Andererseits folgt aus der Jordan Normalform

$$\det(A - \zeta E) = \det(C(K - \zeta E)C^{-1}) = \det(K - \zeta E) = (\lambda_1 - \zeta)^{k_1} \dots (\lambda_s - \zeta)^{k_s}.$$

Daher ist $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ die Menge der Eigenwerte von A und die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts μ ist die Summe der Dimensionen der Jordan Kästchen zu μ , d.h.

$$\alpha_\mu = \sum_{\sigma: \lambda_\sigma = \mu} k_\sigma.$$

Die **geometrische Vielfachheit** von μ ist $\gamma_\mu = \dim \ker(A - \mu E) = \dim\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \mu x\}$.

Sie ist die Anzahl der Jordan Kästchen zum Eigenwert μ , denn $K_\sigma - \lambda_\sigma E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

hat den eindimensionalen Kern $\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms $\det(A - \zeta E)$ und die Berechnung der Eigenräume legen also für jeden Eigenwert die Anzahl der Jordan Kästchen und ihre Gesamtdimension fest. Welche Dimensionen die einzelnen Jordan Kästchen in Einzelnen haben, ist hiermit nicht bestimmt.

(20) **Folgerung.** Für $y' = Ay$ ist nach (16) und (17), (18)

$$Y(t) := e^{tA}C = Ce^{tK} = C \operatorname{diag}(e^{t\kappa_1}, \dots, e^{t\kappa_s}), \quad t \in \mathbb{R}$$

eine Fundamentalmatrix, deren Matrixelemente Linearkombinationen der Funktionen

$$t^l e^{t\mu}$$

sind, wobei μ Eigenwert von A ist und $0 \leq l \leq \max\{k_\sigma - 1 : \lambda_\sigma = \mu\} \leq \alpha_\mu - \gamma_\mu$ gilt.

Extremfälle

- (α) $\alpha_\mu = \gamma_\mu \quad \forall \mu$: Dann ist A diagonalisierbar mit $K = \operatorname{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, die Spalten von C ergeben eine Basis von Eigenvektoren $Ac_i = \kappa_i c_i$ und $Y(t) = (e^{t\kappa_1} c_1, \dots, e^{t\kappa_n} c_n)$ ist eine Fundamentalmatrix. Es "genügt" also die Eigenwerte und eine Basis c_1, \dots, c_n von Eigenvektoren zu berechnen.
- (β) $\gamma_\mu = 1 \quad \forall \mu$: Dann gibt es zu jedem Eigenwert nur ein Jordan Kästchen, die $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sind paarweise verschieden und

$$C = (c_{11}, \dots, c_{1k_1}, c_{21}, \dots, c_{2k_2}, \dots, c_{s1}, \dots, c_{sk_s}),$$

wobei $c_{\sigma 1}, \dots, c_{\sigma k_\sigma}$ jeweils eine Kette von Hauptvektoren (siehe (17)) ist. Diese Kette kann wie folgt rekursiv aufgebaut werden. Sei $\mu = \lambda_\sigma$, $k = k_\sigma$ und $v_i = c_{\sigma i}$.

Bestimme $v_1 \neq 0$ als Lösung von $(A - \mu E)x = 0$. Dann bestimme v_2 als Lösung von $(A - \mu E)x = v_1$, u.s.w. Schließlich bestimme v_k als Lösung von $(A - \mu E)x = v_{k-1}$. Es gilt also $(A - \mu E)v_i = v_{i-1}$ für $i = 1, \dots, k$ und $v_0 := 0$. Dann ist (v_1, \dots, v_k) die gesuchte Kette.

Weil $(A - \mu E)^i v_i = 0$, ist $y_i(t) := e^{tA} v_i = e^{t(\mu E + (A - \mu E))} v_i = e^{t\mu} e^{t(A - \mu E)} v_i = e^{t\mu} \left(E + t(A - \mu E) + \frac{t^2}{2!} (A - \mu E)^2 + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} (A - \mu E)^{i-1} \right) v_i = e^{t\mu} (v_i + t v_{i-1} + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} v_1)$, $i = 1, \dots, k$.

Damit lautet die Fundamentalmatrix:

$$Y = (y_{11}, \dots, y_{1k_1}, \dots, y_{s1}, \dots, y_{sk_s})$$

mit $y_{\sigma i}(t) = e^{t\lambda_\sigma} \left(c_{\sigma i} + t c_{\sigma, i-1} + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} c_{\sigma 1} \right)$ für $i = 1, \dots, k_\sigma$ und $\sigma = 1, \dots, s$.

- (γ) $\alpha_\mu = \gamma_\mu$ oder $\gamma_\mu = 1 \quad \forall \mu$: Der gemischte Fall ist mit (α) und (β) lösbar durch die Berechnung der Eigenwerte und Hauptvektorenketten.
- (δ) $\alpha_\mu = n$: Dann hat A nur einen Eigenwert μ und $A - \mu E$ ist nilpotent, wie man an der Jordan Normalform erkennt. Damit ist $e^{tA} = e^{t\mu} \left(E + t(A - \mu E) + \frac{t^2}{2!} (A - \mu E)^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (A - \mu E)^{n-1} \right)$.
- (ϵ) $n > \alpha_\mu > \gamma_\mu > 1$ für mindestens einen Eigenwert μ : Das ist der aufwendigste Fall und tritt erst ab Dimension $n = 4$ auf mit der Jordan Normalform

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2 \quad 1} & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

(21) Reelle Lösungen. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dann ist $\det(A - \zeta E)$ ein Polynom in ζ mit reellen Koeffizienten. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen davon. Daher sind sie entweder reell oder treten in konjugiert komplexen Paaren auf (siehe (4.23)). In (20) ergeben sich reelle Lösungen als reelle Linearkombinationen von

$$t^l e^{\operatorname{Re} \mu} \cos(\operatorname{Im} \mu) t \quad \text{und} \quad t^l e^{\operatorname{Re} \mu} \sin(\operatorname{Im} \mu) t.$$

Sei y eine Lösung von $y' = Ay$. Dann ist \bar{y} , $(\bar{y})_i(t) := \overline{y_i(t)}$ auch Lösung, denn $\overline{y'} = (\bar{y})'$ und $\exp(tA)\bar{y} = \exp(t\bar{A})\bar{y} = \exp(tA)\bar{y}$ nach (14)(g). Damit sind $\frac{1}{2}(y + \bar{y})$ und $\frac{1}{2i}(y - \bar{y})$ reelle Lösungen. Mit ihnen bildet man ein **reelles** Fundamentalsystem.

(22) Beispiel. Die homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet $x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1x' + \alpha_0x = 0$. Dafür ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

die Matrix des zugehörigen Systems (vgl. (3)). Es gilt $Av = \zeta v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} v_i \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \zeta v_1 = v_2, \dots, \zeta v_{n-1} = v_n, \zeta v_n = -\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} v_i$, was $v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$ und

$v_1(\zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_1\zeta + \alpha_0) = 0$ bedeutet. Damit ist

- μ ein Eigenwert genau dann, wenn μ Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** $\chi(\zeta) := \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_1\zeta + \alpha_0$ der Differentialgleichung ist.
- $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \vdots \\ \mu^{n-1} \end{pmatrix}$ der zum Eigenwert μ gehörige eindimensionale Eigenraum.

Also ist $\gamma_\mu = 1 \forall \mu$, d.i. der Extremfall (β) in (20). Daher ist jede Lösung $x(t)(= x_1(t))$ der Differentialgleichung eine Linearkombination der n Funktionen $t^l e^{t\mu}$ mit μ Eigenwert und $0 \leq l \leq \alpha_\mu - 1$. Schließlich ist nach (3) $x_{i+1} = x^{(i)}$ für $i = 0, \dots, n-1$. Wir erhalten somit die folgende Aussage.

Satz. Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben. Die AWA

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1x' + \alpha_0x = 0, \quad x^{(i)}(t_0) = x_{0,i}, \quad i = 1, \dots, n$$

hat eine eindeutige Lösung auf ganz \mathbb{R} . Die n Funktionen $t^l e^{t\mu}$ (s.o.) bilden eine Basis des Lösungsraumes über \mathbb{C} . Die Koeffizienten $\alpha_{\mu l}$ der Lösung

$$x(t) = \sum_{\mu, l} \alpha_{\mu l} t^l e^{t\mu}, \quad t \in \mathbb{R}$$

der obigen AWA lösen eindeutig das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\mu, l} \alpha_{\mu l} \left(\frac{d}{dt} \right)^i [t^l e^{t\mu}]_{t=t_0} = x_{0,i}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Sind $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ reell, dann treten die nicht reellen Eigenwerte μ in konjugiert komplexen Paaren auf. Eine reelle Basis des Lösungsraumes erhält man, indem man $\{t^l e^{t\mu}, t^l e^{t\bar{\mu}}\}$ jeweils durch $\{t^l e^{t \operatorname{Re} \mu} \cos(\operatorname{Im} \mu)t, t^l e^{t \operatorname{Re} \mu} \sin(\operatorname{Im} \mu)t\}$ ersetzt.

(23) Inhomogene Systeme. Seien $b : I_b \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig auf dem Intervall I_b und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann heißt

$$y' = Ay + b(t) \quad (*)$$

ein inhomogenes lineares Differenzialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

Seien $t_0 \in I_b$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ vorgegeben. Dann löst

$$y(t) := e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) ds + e^{(t-t_0)A} y_0 \quad (**)$$

die AWA zu $y(t_0) = y_0$ für alle $t \in I_b$. Die Integration erfolgt komponentenweise. Jede Lösung ist die Einschränkung von y auf ein t_0 enthaltende Teilintervall von I_b .

Beweis. In der Tat ist $y'(t) = Ae^{tA} \int_{t_0}^t e^{-sA} b(s) ds + e^{tA} e^{-tA} b(t) + Ae^{(t-t_0)A} y_0 = Ay(t) + b(t)$ und $y(t_0) = e^{t_0 A} \cdot 0 + e^0 y_0 = y_0$. — Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei \tilde{y} eine weitere Lösung der AWA auf einem Intervall $\tilde{I} \subset I_b$ mit $t_0 \in \tilde{I}$. Dann ist $z := y - \tilde{y}$ auf \tilde{I} definiert mit $z'(t) = y'(t) - \tilde{y}'(t) = Ay(t) + b(t) - (A\tilde{y}(t) + b(t)) = A(y(t) - \tilde{y}(t)) = Az(t) \forall t \in \tilde{I}$. Also löst z die AWA des homogenen Problems mit $z(t_0) = y(t_0) - \tilde{y}(t_0) = 0$. Nach (15) ist z die triviale Lösung 0 . Daraus folgt $y(t) = \tilde{y}(t) \forall t \in \tilde{I}$. \square

Wegen (23) betrachten wir Lösungen von (*) stets auf ganz I_b . Die Lösungsformel (**) ist in der Praxis oft nicht auswertbar. Aber eine einzelne Lösung, genannt **partikuläre Lösung** ist oftmals bekannt oder wird durch einen Ansatz gefunden.

(24) Lemma. Es gilt

$$\mathcal{L}_b = y_p + \mathcal{L}.$$

Dabei ist \mathcal{L} der Lösungsraum des homogenen Systems $y' = Ay$, \mathcal{L}_b die Menge der Lösungen des inhomogenen Systems $y' = ay + b(t)$ und y_p eine partikuläre Lösung.

Beweis. Sei $\mathbf{y} \in \mathcal{L}_b$. Dann gilt für $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}_p$, dass $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{y}'(t) - \mathbf{y}'_p(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) - (\mathbf{A}\mathbf{y}_p(t) + \mathbf{b}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$, weshalb $\mathbf{z} \in \mathcal{L}$. Die umgekehrte Inklusion folgt genauso einfach. \square

Ist also eine partikuläre Lösung gegeben, so löst man die AWA durch Addition einer geeigneten Lösung des homogenen Systems. Das gleiche gilt für eine einzelne inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + \alpha_1x' + \alpha_0x = \beta(t).$$

Für das zugehörige System (23) ist \mathbf{A} wie in (22) und

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

16 Kurven im \mathbb{R}^n

Wie bisher bezeichne $I \subset \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(1) **Kurve.** Eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow X$ heißt Kurve in X . Das Bild $f(I) \subset X$ nennt man die **Spur** der Kurve und $f(t)$ den Kurvenpunkt zum Parameterwert $t \in I$.

(2) **Tangentenvektor.** Eine Kurve $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) differenzierbar, wenn die Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_n (stetig) differenzierbar sind. Ihre Ableitung

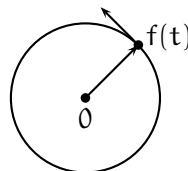
$$f'(t) := (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

in t heißt der Tangentenvektor an die Kurve f in t . Falls $f'(t) \neq 0$ heißt der bezüglich der euklidischen Norm normierte Vektor $\frac{1}{\|f'(t)\|_2} f'(t)$ der Tangenteneinheitsvektor von f in t .

(3) **Bemerkung.** Offenbar ist f differenzierbar in t genau dann, wenn $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{1}{h} (f(t+h) - f(t))$ existiert. Dieser Grenzwert, wenn er existiert, ist er gleich $f'(t)$ aus (2).

Beispiele. • Für $a, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, ist $f(t) := a + tv$, $t \in \mathbb{R}$, eine **Gerade** durch a in Richtung v . Der Tangentenvektor $f'(t) = v$ und der Tangenteneinheitsvektor $\frac{1}{\|v\|_2} v$ sind an allen Kurvenpunkten gleich.

- Für $r > 0$ ist $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (r \cos t, r \sin t)$, die in positiver Richtung durchlaufene **Kreislinie** um 0 mit Radius r . Der Tangentenvektor lautet $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$. Da $\|f(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} = r$, ist $(-\sin t, \cos t)$ der Tangenteneinheitsvektor. Er steht senkrecht auf dem Ortsvektor und weist in Richtung positiven Umlaufs.



- Für $r > 0$ und $c > 0$ ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) := (r \cos t, r \sin t, ct)$, eine **Schraubenlinie** mit $f'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c)$ und $\|f'(t)\|_2 = \sqrt{r^2 + c^2}$.
- Verschiedene Kurven mit gleicher Spur sind z.B.

- $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos t, \sin t)$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos 3t, \sin 3t)$
- $f : [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos 2t, \sin 2t)$

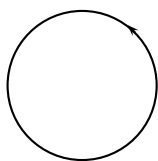
(4) **Graphenkurve.** Sei $f : I \rightarrow X$ eine Kurve. Dann ist

$$g : I \rightarrow \mathbb{R} \times X, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

ebenfalls eine Kurve, deren Spur g gleich dem Graph von f ist. Auf diese Weise ist der Graph einer auf einem Intervall definierten stetigen Funktion die Spur einer Kurve in $\mathbb{R} \times X$.

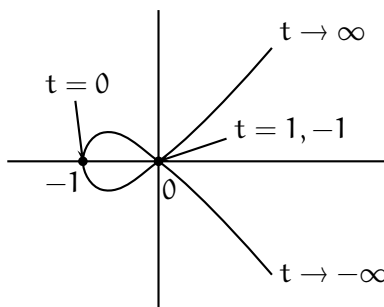
(5) **Doppelpunkt.** Sei $f : I \rightarrow X$ eine Kurve. Dann heißt $x \in X$ ein Doppelpunkt von f , falls $s, t \in I$ existieren mit $s \neq t$ und $x = f(s) = f(t)$.

Beispiele. • Jeder Punkt von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist Doppelpunkt.



Der Kreis wird unendlich oft durchlaufen.
Daher ist jeder Punkt ein Doppelpunkt.

• $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t^2 - 1, t^3 - t)$ hat genau einen Doppelpunkt, nämlich $0 = f(1) = f(-1)$.

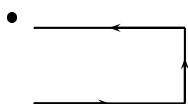


(6) **Orientierung einer Kurve.** Sei $f : I \rightarrow X$ eine Kurve. Man sagt " $f(s)$ liegt vor $f(t)$ ", wenn $s < t$ ist (auch wenn $f(s) = f(t)$ sein sollte). Ist $I = [a, b]$, dann heißen $f(a)$ Anfangspunkt und $f(b)$ Endpunkt der Kurve.

Jede Kurvenspur kann in umgekehrter Richtung durchlaufen werden. Zum Beispiel durchläuft $]a, b] \rightarrow X, t \mapsto f(a + b - t)$ die Spur von $f : [a, b[\rightarrow X$ in umgekehrter Richtung.

(7) **Stückweise reguläre Kurve.** Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt f **singulär** in $t \in I$ und $f(t)$ eine singuläre Stelle von f , falls $f'(t) = 0$. Ist f stetig differenzierbar und $f'(t) \neq 0 \forall t$, dann heißt f regulär. Ist $I = [a, b]$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$ eine Zerlegung von I derart, dass $f|_{[t_j, t_{j+1}]}$ regulär ist für $j = 0, \dots, l - 1$, dann heißt f **stückweise regulär**.

Beispiele. • $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ ist stetig differenzierbar mit $f'(t) = (2t, 3t^2 - 1) \neq (0, 0) = 0 \forall t$. Daher ist f regulär.



ist die Spur in \mathbb{R}^2 einer stückweise regulären Kurve.

- Die Kurve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (\cos t, \sin t)$ ist regulär. Aber $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) := (\cos t^2, \sin t^2)$ ist nicht regulär mit gleicher Spur, denn $f(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R})$ ist die Einheitskreislinie und $g'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$ mit $g'(0) = 0$.

(8) Parametertransformation. Ist $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ bijektiv und stetig, dann heißt φ eine Parametertransformation von $[a', b']$ nach $[a, b]$. Sei $f : [a, b] \rightarrow X$ eine Kurve. Dann heißt

$$g : [a', b'] \rightarrow X, \quad g := f \circ \varphi$$

die durch φ transformierte Kurve. Offensichtlich ist die Spur von f gleich der Spur von g . Bei einer Parametertransformation bleibt also das geometrische Bild der Kurve unverändert. Weiter heißt φ eine C^1 -Transformation, falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind. Wegen $0 \neq 1 = \psi'(\varphi(t))\varphi'(t)$ für $\psi := \varphi^{-1}$ und wegen des ZWS ist in diesem Fall

$$\varphi'(s) > 0 \quad \forall s \in [a', b'] \quad \text{oder} \quad \varphi'(s) < 0 \quad \forall s \in [a', b'].$$

Ist $\varphi' > 0$, dann heißt φ **orientierungstreu**.

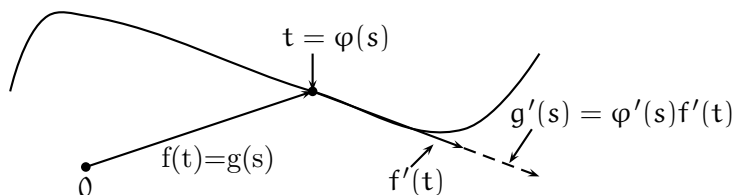
Beispiel. $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(s) := a + b - s$ kehrt die Orientierung um.

(9) Lemma. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Transformation und $g := f \circ \varphi$. Dann gilt die Kettenregel

$$g'(s) = \varphi'(s) f'(\varphi(s)) \quad \forall s \in [a', b'].$$

Beweis. $g = f \circ \varphi = (f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \implies (f \circ \varphi)'(s) \stackrel{\text{Def.}}{=} ((f_1 \circ \varphi)'(s), \dots, (f_n \circ \varphi)'(s)) = (f'_1(\varphi(s))\varphi'(s), \dots, f'_n(\varphi(s))\varphi'(s)) = \varphi'(s)(f'_1(\varphi(s)), \dots, f'_n(\varphi(s))) \stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi'(s)f'(\varphi(s)). \quad \square$

Faßt man t als Zeitparameter auf, so wird die Spur von f zeitlich durchlaufen gemäß $t \mapsto f(t)$. Dabei ist $f'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor im Kurvenpunkt $f(t)$. Er gibt die Richtung und den Betrag der **Momentangeschwindigkeit** an der Stelle $f(t)$ an.

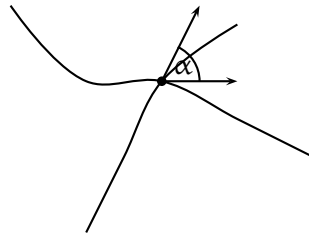


Bei einer C^1 -Transformation bleiben die Geschwindigkeitsvektoren parallel $g'(s) \parallel f'(t)$, bei einer orientierungstreu Transformation bleibt auch die Richtung gleich. Die Betrag der Geschwindigkeit ändert sich.

(10) Schnittpunkt und Schnittwinkel. Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven. Dann heißt $x \in \mathbb{R}^n$ ein Schnittpunkt von f und g , wenn ein $t \in I$ und ein $r \in J$ existieren mit

$$x = f(t) = g(r).$$

Der Winkel α zwischen den Tangentenvektoren $f'(t)$ und $g'(r)$ heißt Schnittwinkel von f und g in t bzw. in r . Vorsicht ist bei Doppelpunkten geboten. Es ist $\cos \alpha = \frac{\langle f'(t), g'(r) \rangle}{\|f'(t)\|_2 \|g'(r)\|_2}$.

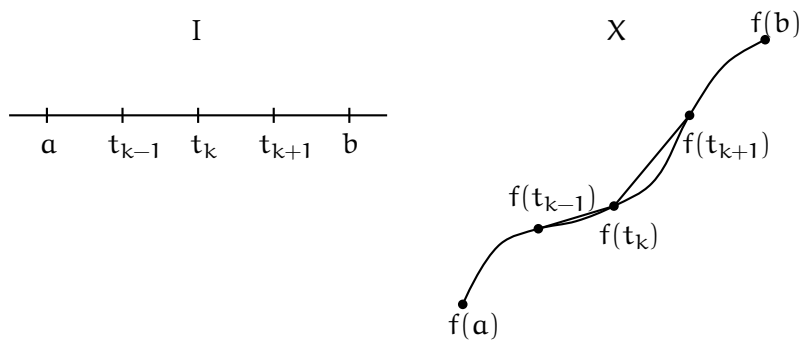


Üb Man beweise: Unter orientierungstreuen C^1 -Transformationen von f und g bleibt der Schnittwinkel von f und g an den entsprechenden Parameterwerten unverändert. Schnittpunkt und Schnittwinkel sind also geometrische Invariante.

(11) Länge einer Kurve. Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $f : [a, b] \rightarrow X$ eine Kurve und $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_l\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es ist also $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$. Dann heißt $|Z| := \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq l\}$ die **Feinheit der Zerlegung**. Man bezeichnet mit

$$L(f, Z) := \sum_{k=1}^l \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

die Länge des Polygonzugs, der die Kurvenpunkte $f(a), f(t_1), \dots, f(b)$ nacheinander verbindet



und nennt das Supremum über $\mathcal{Z} := \{Z : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$ aller dieser Längen

$$L(f) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(f, Z) \in [0, \infty]$$

die Länge der Kurve f . Sie heißt **rektifizierbar**, wenn $L(f) < \infty$ ist.

(12) Lemma. In (11) gilt für jedes $\delta > 0$:

$$L(f) = \sup\{L(f, Z) : Z \in \mathcal{Z}, |Z| < \delta\}.$$

Beweis. Sind $Z, Z' \in \mathcal{Z}$ und Z' eine Verfeinerung von Z , dann ist $L(f, Z) \leq L(f, Z')$ wegen der Dreiecksungleichung. Daher folgt $L(f) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} L(f, Z) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}, |Z| \leq \delta} L(f, Z)$. \square

(13) Beispiel. Seien X ein normierter Raum, $x, y \in X$ und $g : [0, 1] \rightarrow X$ mit $g(t) := x + t(y - x)$ das **Geradenstück**, das x mit y verbindet. Für jede Zerlegung Z von $[0, 1]$ ergibt sich $L(g, Z) = \sum_{k=1}^l \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^l \|x + t_k(y - x) - x - t_{k-1}(y - x)\| = \sum_{k=1}^l (t_k - t_{k-1}) \|y - x\| = \|y - x\|$. Folglich ist

$$L(g) = \|y - x\|.$$

(14) Bemerkungen. (a) Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $f : [a, b] \rightarrow X$ eine Kurve und $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_l\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist offensichtlich

$$\|f(a) - f(b)\| \leq L(f, Z) \leq L(f).$$

Nach (13) zeigt dies insbesondere, dass die Gerade die **kürzeste Verbindung** zweier Punkte ist. Dabei kommt es auch nicht auf die Parametrisierung des Geradenstücks an. Siehe dazu (18) und die anschließende Übung.

(b) Ist f bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ rektifizierbar, dann auch bezüglich jeder zu $\|\cdot\|$ äquivalenten Norm. Die Länge der Kurve kann für äquivalente Normen jedoch verschieden sein. Im Fall $\dim X < \infty$ sind nach (14.17) alle Normen auf X äquivalent. Für $X = \mathbb{R}^n$ wird im Einklang mit der Anschauung meist die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ benutzt.

(15) Definition. Für eine Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei

$$\int_a^b f(t) dt := \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Es wird also komponentenweise integriert.

Weil

$$L(f, Z) = \sum_{k=1}^l \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^l \left\| \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| (t_k - t_{k-1})$$

ist auf Grund von (12) das folgende Ergebnis anschaulich zu erwarten.

(16) Satz. Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann ist f rektifizierbar und

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweis. Zunächst ist festzustellen, dass $t \mapsto \|f'(t)\| = (\|\cdot\| \circ f')(t)$ stetig und damit integrierbar über $[a, b]$ ist. — Für $a \leq r < s \leq b$ betrachte

$$I_{rs} := \left| \int_r^s \|f'(t)\| dt - \|f(s) - f(r)\| \right|.$$

$$I_{rs} = \left| \int_r^s \left(\|f'(t)\| - \frac{\|f(s) - f(r)\|}{s-r} \right) dt \right| \leq \int_r^s \left| \|f'(t)\| - \frac{\|f(s) - f(r)\|}{s-r} \right| dt \stackrel{(13.37)}{\leq} \int_r^s \left\| f'(t) - \frac{f(s) - f(r)}{s-r} \right\| dt = \frac{1}{s-r} \int_r^s \|f(s) - f(r) - (s-r)f'(t)\| dt \stackrel{\text{HDI}}{=} \frac{1}{s-r} \int_r^s \left\| \int_r^s (f'(\tau) - f'(t)) d\tau \right\| dt \stackrel{\text{äquivalente Maximumnorm}}{\leq}$$

$$\frac{1}{s-r} \int_r^s c \max \left\{ \left| \int_r^s (f'_j(\tau) - f'_j(t)) d\tau \right| : j \right\} dt \leq \frac{1}{s-r} \int_r^s c \max \left\{ \int_r^s |f'_j(\tau) - f'_j(t)| d\tau : j \right\} dt.$$

Es folgt eine kurze Zwischenüberlegung. Für $\delta > 0$ sei

$$A_\delta := \max_{j=1, \dots, m} \sup \{ |f'_j(\tau) - f'_j(t)| : \tau, t \in [a, b], |\tau - t| \leq \delta \}.$$

Weil f'_j stetig ist und $[a, b]$ kompakt ist, ist $f'_j([a, b])$ nach (14.10) kompakt und somit beschränkt. Dies gilt für jedes j . Damit ist $A_\delta < \infty$. Weiter ist $\lim_{\delta \rightarrow 0} A_\delta = 0$, weil f'_j auf dem Kompaktum $[a, b]$ nach (14.15) sogar gleichmäßig stetig ist. Jetzt wird die obige Abschätzung zu Ende geführt:

$$I_{rs} \leq \frac{1}{s-r} \int_r^s c(s-r) A_{s-r} dt = c(s-r) A_{s-r}.$$

Damit folgt $I_{t_{k-1}t_k} \leq c(t_k - t_{k-1}) A_{|Z|} \quad \forall k = 1, \dots, l$ und somit $\left| \int_a^b \|f'(t)\| dt - L(f, Z) \right| = \left| \sum_{k=1}^l I_{t_{k-1}t_k} \right| \leq \sum_{k=1}^l c(t_k - t_{k-1}) A_{|Z|} = c(b-a) A_{|Z|} \rightarrow 0$ für $|Z| \rightarrow 0$. Dies ergibt mit (12) die Behauptung. \square

(17) Beispiele.

- (a) Länge eines Kreisbogens in euklidischer Norm: $f : [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) := (r \cos t, r \sin t) \implies f'(t) = r(-\sin t, \cos t) \implies \|f'(t)\|_2 = r \implies L(f) = \int_0^\varphi \|f'(t)\| dt = r\varphi$.
- (b) Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: Gemäß (4) setze $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) := (t, f(t)) \rightarrow L(g) = \int_a^b \|g'(t)\|_2 dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ ist die Länge des Graphen von f .

(18) Satz. Die Länge einer Kurve ist eine geometrische Invariante, d.h. ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Transformation, dann gilt:

$$L(f) = L(f \circ \varphi).$$

Beweis. $L(f \circ \varphi) = \int_{a'}^{b'} \|(f \circ \varphi)'(s)\| ds \stackrel{(9)}{=} \int_{a'}^{b'} \|f'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds \stackrel{(9.26)}{=} \int_a^b \|f'(t)\| dt = L(f). \quad \square$

Üb Zeige (18) allgemein für eine Kurve in einem normierten Raum $f : [a, b] \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ und eine stetige bijektive Parametertransformation $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$.

Hinweis: Z ist eine Zerlegung von $[a, b]$ genau dann, wenn $\varphi^{-1}(Z) := (\varphi^{-1}(t_0), \dots, \varphi^{-1}(t_l))$ eine Zerlegung von $[a', b']$ ist. Es gilt: $|Z| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |\varphi^{-1}(Z)| \rightarrow 0$.

(19) Bogenlänge. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve. Man nennt $l : [a, b] \rightarrow [0, L(f)]$ mit $l(t) := L(f|_{[a, t]})$ für $t > a$ und $l(a) := 0$, die Bogenlänge.

- (a) Die Bogenlänge l ist monoton wachsend und stetig.

Beweis. Die Monotonie ist offensichtlich. Wir zeigen die Stetigkeit von links. Die Rechtsstetigkeit folgt analog. Sei $d \in]a, b]$ und man nehme an dass $\alpha := l(d) - \lim_{d \rightarrow t \rightarrow d} l(t) > 0$. Wähle $c < d$ derart, dass $\alpha \leq l(d) - l(c) \leq \alpha + \frac{\alpha}{8}$. Wegen der Stetigkeit von f existiert $0 < \delta < d - c$ mit $\|f(d) - f(t)\| \leq \frac{\alpha}{8} \forall t \in [d - \delta, d]$. Nun sei Z' eine Zerlegung $c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$ von $[c, d]$ mit Feinheit $|Z'| \leq \delta$ derart, dass $L(f|_{[c,d]}, Z') \geq \alpha - \frac{\alpha}{8}$. Eine solche existiert, weil $L(f|_{[c,d]}) = l(d) - l(c) \geq \alpha$. Weil $L(f|_{[t_{n-1},d]}) = l(d) - l(t_{n-1}) \geq \alpha$, existiert eine Zerlegung $Z'' = \{r_0, r_1, \dots, r_m\}$ von $[t_{n-1}, d]$ mit $L(f|_{[t_{n-1},d]}, Z'') \geq \alpha - \frac{\alpha}{8}$. Für die gemeinsame Zerlegung

$$Z := \{t_0, \dots, t_{n-1} = r_0, \dots, r_m\}$$

von $[c, d]$ gilt nun $\alpha + \frac{\alpha}{8} \geq l(d) - l(c) = L(f|_{[c,d]}) \geq L(f|_{[c,d]}, Z) = L(f|_{[c,d]}, Z') - \|f(t_{n-1}) - f(d)\| + L(f|_{[t_{n-1},d]}, Z'') \geq (\alpha - \frac{\alpha}{8}) - \frac{\alpha}{8} + (\alpha - \frac{\alpha}{8})$, was den Widerspruch $0 \geq \frac{\alpha}{2}$ ergibt. \square

(b) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann ist nach (16) die Bogenlänge gleich

$$l(t) = \int_a^t \|f'(s)\| ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Offenbar ist l stetig differenzierbar mit $l'(t) = \|f'(t)\| > 0$. Daher existiert und ist $l^{-1} : [0, L(f)] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Transformation.

Eine natürliche Parametrisierung von f erfolgt mittels der Bogenlänge

$$g := f \circ l^{-1}.$$

Hierfür ist $g'(s) = f'(l^{-1}(s))(l^{-1})'(s) = f'(l^{-1}(s)) \frac{1}{l'(l^{-1}(s))} = f'(l^{-1}(s)) \frac{1}{\|f'(l^{-1}(s))\|}$. Also gilt

$$g'(s) = \frac{f'(l^{-1}(s))}{\|f'(l^{-1}(s))\|}.$$

Das bedeutet insbesondere, dass die Kurve mit konstanter Bahngeschwindigkeit $\|g'(s)\| = 1 \forall s$ durchlaufen wird.

17 Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Die partielle Ableitung ist eine naheliegende Anwendung des vertrauten Konzepts der Ableitung einer Funktion einer reellen Variablen auf Funktionen mehrerer reeller Variablen. Die Idee der Approximation einer Funktion durch eine affine Funktion führt zum Begriff der Fréchet oder totalen Ableitung. Wie sich herausstellt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den beiden Ableitungsbegriffen.

Partielle Ableitung

(1) **Skalares Feld.** Sei $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt eine reellwertige Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ein skalares Feld in n Variablen. Die **Niveaumenge** von f zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist

$$N_{f,c} := \{x \in D_f : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\}).$$

Beispiele. (1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 x_3 - \frac{2x_2}{1+x_1^2}$. Hierfür ist $N_{f,0} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 x_3(1+x_1^2)\}$.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}$. Hierfür ist $N_{f,0} = \emptyset$ und $N_{f,2} = \{(x, y, z) : z \neq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2z\} = \{z \neq 0 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ ist die Sphäre mit Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ und Radius 1 ohne Südpol $(0, 0, 0)$.

(2) **Partielle Ableitung.** Seien f ein skalares Feld, $x \in D_f$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\partial_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

sofern der Grenzwert existiert, die **Ableitung von f in Richtung v** an der Stelle x . Ist speziell $v = e_i$ der i -te Standardvektor, dann heißt

$$\partial_i f(x) := \partial_{e_i} f(x)$$

die i -te partielle Ableitung von f an der Stelle x . Andere Bezeichnungen dafür sind $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ oder $D_i f(x)$. Das Feld f heißt partiell differenzierbar, wenn $\partial_i f(x)$ existiert für alle $i = 1, \dots, n$ und $x \in D_f$. Weiter heißt f stetig partiell differenzierbar, wenn f partiell differenzierbar ist und wenn

$$\partial_i f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

für alle $i = 1, \dots, n$ stetig ist.

(3) **Bemerkung.** Die i -te partielle Funktion von f durch $x \in D_f$ ist definitionsgemäß

$$\xi \mapsto g(\xi) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

mit Definitionsbereich $\{\xi \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_f\}$. Es ist offenbar

$$\partial_i f(x) = g'(x_i).$$

Daher "differenziert man partiell nach einer Variablen, indem man die übrigen Variablen festhält". Die Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen sind somit anwendbar.

(4) **Beispiele.**

- Sei $D_f =]0, \infty[\times \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 y^3 + y \ln x$. Hierfür ist $\partial_1 f(x, y) (= \partial_x f(x, y) = D_1 f(x, y)) = 2xy^3 + \frac{y}{x}$ und $\partial_2 f(x, y) = 3x^2 y^2 + \ln x$.

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2$ ist stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_i \|x\|_2 = \partial_i \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

- Ein Feld $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **radialsymmetrisch**, wenn eine Funktion $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ existiert derart, dass $f(x) = g(\|x\|_2)$. Ist g (stetig) differenzierbar, dann ist f (stetig) partiell differenzierbar mit

$$\partial_i f(x) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} g'(\|x\|_2) \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

- Für $n \geq 2$ sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x_1 \cdots x_n}{\|x\|_2^{2n}}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$. Dann gelten:

- (a) Es existieren und sind $\partial_i f(0) = 0 \forall i = 1, \dots, n$.
- (b) f ist nicht stetig in 0.

Beweis. (a) $\frac{f(0+t e_i) - f(0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$. — (b) Sei $x_k := (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^n \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\|x_k\|_2 = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{n}}{k}$ und $f(x_k) = (\frac{1}{k})^n \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^{2n} = \frac{k^n}{n^n}$. Hiermit folgt, dass f in 0 nicht stetig ist, weil $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$, $f(0) = 0$, aber $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty \neq 0$. \square

- Sei $D_f := \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := x|y|$. Dann ist $\partial_2 f(0, y) = 0$, weil $f(0, y) = 0 \forall y$, aber $\partial_2 f(x, 0)$ existiert für $x \neq 0$ nicht, weil $y \rightarrow x|y|$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

(5) **Höhere partielle Ableitungen.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein skalares Feld f heißt $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar, falls f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung (es wird insgesamt k -mal abgeleitet, jede Koordinate kann dabei öfters auftreten)

$$\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \cdots \partial_{i_1} f \text{ für } 1 \leq i_j \leq n, 1 \leq j \leq k$$

partiell differenzierbar sind. Weiter heißt f k -mal stetig partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig sind. Man führt folgende Funktionenräume ein. Für $D \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\begin{aligned} C^0(D) &:= C(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}, \\ C^k(D) &:= \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}, \\ C^\infty(D) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(D). \end{aligned}$$

Beispiel. $C^2(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig, } \partial_i f \text{ und } \partial_i \partial_j f \text{ existieren und sind stetig } \forall i, j = 1, \dots, n\}.$

(6) Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^k(D)$ läßt sich die Reihenfolge von bis zu k partiellen Ableitungen beliebig vertauschen, d.h.

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f(x) = \partial_{i_{\pi(1)}} \dots \partial_{i_{\pi(l)}} f(x)$$

für alle $x \in D$, alle Permutationen π von $\{1, 2, \dots, l\}$ und alle $l \in \{1, \dots, k\}$.

Beweis. Offenbar genügt es, den Fall $k = 2$ zu betrachten. Daher genügt es $n = 2$ anzunehmen. Also bleibt $\partial_1 \partial_2 f(a) = \partial_2 \partial_1 f(a)$ für $a \in D \subset \mathbb{R}^2$ zu zeigen.

Sei $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta\} \subset D$. Sei $x \in U_\delta(a)$. Setze

$$g(t) := f(t, x_2) - f(t, a_2).$$

Nach dem MWS existiert ξ zwischen a_1 und x_1 mit $(x_1 - a_1)g'(\xi) = g(x_1) - g(a_1)$, weshalb $f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) + (x_1 - a_1)(\partial_1 f(\xi, x_2) - \partial_1 f(\xi, a_2))$. Wendet man auf $\partial_1 f(\xi, x_2) - \partial_1 f(\xi, a_2)$ wieder den MWS an, so folgt

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta)$$

mit einem η zwischen a_2 und x_2 . — Beginnt man mit $\tilde{g}(t) := f(x_1, t) - f(a_1, t)$ statt mit $g(t)$, so erhält man analog

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) = f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}),$$

wobei $\tilde{\xi}$ zwischen a_1 und x_1 und $\tilde{\eta}$ zwischen a_2 und x_2 liegt.

Der Vergleich der beiden Gleichungen ergibt $\partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Für $(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)$ folgt $(\xi, \eta) \rightarrow (a_1, a_2)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (a_1, a_2)$. Weil die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, folgt hieraus $\partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2) = \partial_1 \partial_2 f(a_1, a_2)$. \square

Bemerkung. Die partiellen Ableitungen von $f \in C^k(D)$ lassen sich also sortieren. Z.B. ist

$$\partial_3 \partial_3 \partial_1 \partial_2 \partial_1 \partial_3 f = \partial_3 \partial_3 \partial_3 \partial_2 \partial_1 \partial_1 f = \partial_3^3 \partial_2 \partial_1^2 f$$

im Fall $k \geq 6$ mit der Abkürzung ∂_i^l für die l -fache Anwendung von ∂_i .

(7) Gradient. Sei f ein partiell differenzierbares skalares Feld. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad } f(x) := \nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$$

der Gradient von f in $\mathbf{x} \in D_f$.

(8) **Beispiel.** Sei f radialsymmetrisch, d.h. $f(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|_2)$ gemäß (4). Hierfür ist

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \frac{g'(\|\mathbf{x}\|_2)}{\|\mathbf{x}\|_2} \mathbf{x}$$

parallel zum Ortsvektor \mathbf{x} .

(9) **Rechenregeln für den Gradienten.** Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Skalarfelder und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann rechnet man leicht nach

- $\text{grad}(f + \lambda g) = \text{grad } f + \lambda \text{grad } g$ *Linearität*
- $\text{grad}(fg) = g \text{grad } f + f \text{grad } g$ *Produktregel*

(10) **Vektorfeld.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf D . Gemäß (13.33) und nachfolgender Bemerkung ist $F = (F_1, \dots, F_n)$, wobei die i -te Komponentenabbildung F_i ein skalares Feld ist. Man beachte, dass bei einem Vektorfeld die Anzahl n der Variablen gleich der Anzahl der Komponenten ist. So ergeben n Skalarfelder zusammen ein Vektorfeld. — Man nennt F (**stetig**) **partiell differenzierbar**, wenn alle F_i (stetig) partiell differenzierbar sind. Entsprechendes gilt die für höhere Ableitungen.

(11) **Rotation.** Sei F ein partiell differenzierbares Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$. Dann heißt der Vektor

$$\text{rot } F(\mathbf{x}) := (\partial_2 F_3(\mathbf{x}) - \partial_3 F_2(\mathbf{x}), \partial_3 F_1(\mathbf{x}) - \partial_1 F_3(\mathbf{x}), \partial_1 F_2(\mathbf{x}) - \partial_2 F_1(\mathbf{x}))$$

die Rotation von F in \mathbf{x} . Damit ist $\text{rot } F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ wieder ein Vektorfeld auf D .

(12) **Gradientenfeld.** Ein Vektorfeld F auf $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld, falls es ein skalares Feld f auf D gibt mit $F = \text{grad } f$.

Offensichtlich macht der Gradient aus einem skalaren Feld ein Vektorfeld. Das skalare Feld $U := -f$ heißt **Potenzial** zu F . Das Minuszeichen ist eine Konvention aus der Physik. So weist $F = -\text{grad } U$ in die Richtung des stärksten Potenzialabfalls. Deshalb heißt F auch konservatives (Kraft-)Feld oder Potenzialfeld.

Beispiel. Für das **Zentralfeld** $F(\mathbf{x}) := \frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|_2^3} \mathbf{x}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt nach (8)

$$F = -\text{grad } U \text{ mit } U(\mathbf{x}) := \frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

Dabei heißt U das Gravitations- oder Newton Potenzial, wenn $\alpha = \gamma M$ mit der Gravitationskonstanten γ und der Zentralmasse M . U ist das Coulomb Potenzial, wenn $\alpha = f^* Q$ mit der Proportionalitätskonstanten f^* und der Zentralladung Q . f^* hängt vom Maßsystem ab.

Ist F ein konservatives Kraftfeld, dann gilt nach dem Beschleunigungsprinzip von Newton für die Teilchenbahn $t \mapsto x(t)$ im Kraftfeld

$$m\ddot{x} = F(x) = -\text{grad } U(x).$$

Hieraus folgt $(m\ddot{x} + \text{grad } U(x)) \cdot \dot{x} = 0$ und somit $\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \|\dot{x}(t)\|_2^2 + U(x(t)) \right) = 0$ (die entsprechende Differentiationsregel wird noch gezeigt). Längs der Teilchenbahn ist also die Summe

$$\frac{m}{2} \|v(x)\|_2^2 + U(x)$$

aus kinetischer Energie und potentieller Energie konstant.

(13) Divergenz. Sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Der Skalar

$$\text{div } F(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(x)$$

heißt die Divergenz von F in x . Damit ist $\text{div } F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld.

(14) Rechenregeln für die Divergenz. Seien F und G Vektorfelder auf D , $\lambda \in \mathbb{R}$ und f ein Skalarfeld auf D . Dann gelten

- $\text{div}(F + \lambda G) = \text{div } F + \lambda \text{div } G$ *Linearität*
- $\text{div}(fF) = \langle \text{grad } f, F \rangle + f \text{div } F$ *Produktregel*

Beweis. Die Linearität ist offensichtlich. Aus $\text{div}(fF)(x) = \sum_i \partial_i (f F_i)(x) = \sum_i (\partial_i f(x) F_i(x) + f(x) \partial_i F_i(x))$ ergibt sich die Produktregel. \square

Beispiel. Für das Zentralfeld $G(x) := \frac{1}{\|x\|_2} x$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $G(x) = f(x)F(x)$ mit $f(x) = \frac{1}{\|x\|_2}$ und $F(x) = x$. Nach (8) gilt $\text{grad } f(x) = -\|x\|_2^{-3} x$. Offensichtlich ist $\text{div } F(x) = n$. Daher gilt nach (14): $\text{div } G(x) = \langle \text{grad } f(x), F(x) \rangle + f(x) \text{div } F(x) = \langle -\|x\|_2^{-3} x, x \rangle + \frac{1}{\|x\|_2} n = \frac{n-1}{\|x\|_2}$.

(15) Laplaceoperator. Für $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(D)$ und $x \in D$ setzt man $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x)$.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$$

heißt Laplaceoperator. Es ist $\Delta = \text{div grad}$, denn $\text{div grad } f = \text{div}(\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \partial_1 \partial_1 f + \dots + \partial_n \partial_n f = \Delta f$.

(16) Drei fundamentale partielle Differentialgleichungen.

(a) **Potenzialgleichung** oder **Laplacegleichung**

$$\Delta f(x) = 0 \quad \textit{elliptisch}$$

für $f \in C^2(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(b) **Wellengleichung**

$$\partial_t^2 f(x, t) - c^2 \Delta_x f(x, t) = 0 \quad \text{hyperbolisch}$$

für $f \in C^2(D \times]0, \infty[)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei ist x die Orts- und t die Zeitvariable. Die Konstante $c > 0$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

(c) **Wärmeleitungsgleichung** oder **Diffusionsgleichung**

$$\partial_t f(x, t) - k \Delta_x f(x, t) = 0 \quad \text{parabolisch}$$

für $f : D \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei ist f einmal stetig partiell differenzierbar nach der Zeit und zweimal nach dem Ort. Die Konstante $k > 0$ heißt Temperaturleitzahl.

(17) Beispiel. Sei f ein radialsymmetrisches Skalarfeld, d.h. $f(x) = g(\|x\|_2)$ gemäß (4). Weiter sei $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) \stackrel{(8)}{=} \operatorname{div} \left(\frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} x \right) \stackrel{(14)}{=} \left\langle \operatorname{grad} g'(\|x\|_2), \frac{1}{\|x\|_2} x \right\rangle + g'(\|x\|_2) \frac{n-1}{\|x\|_2} \stackrel{(8),(14)}{=} \\ &\left\langle \frac{g''(\|x\|_2)}{\|x\|_2} x, \frac{1}{\|x\|_2} x \right\rangle + g'(\|x\|_2) \frac{n-1}{\|x\|_2} = g''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} g'(\|x\|_2). \end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man radialsymmetrische Lösungen der Laplacegleichung, nämlich

$$\Delta \ln(\|x\|_2) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \Delta(\|x\|_2^{2-n}) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad n \geq 3.$$

Fréchet Ableitung

Wir betrachten jetzt vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und

$$f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Funktion von n Veränderlichen und mit m Komponenten $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f soll in $x_0 \in D$ durch eine affine Funktion approximiert werden. Man vergleiche dazu die analoge Einführung der Ableitung einer skalarwertigen Funktion einer Variablen in Kap. 8.

(18) Definition. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in D$. Dann heißt f in x_0 **differenzierbar** oder auch **total differenzierbar** oder Fréchet differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt derart, dass der folgende Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\| = 0$$

existiert. Dabei ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m . Offenbar ist $h \mapsto f(x_0) + T(h)$ eine approximierende affine Abbildung.

(19) Definition und Satz. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in D$. Sei f differenzierbar in x_0 . Dann ist f stetig in x_0 und partiell differenzierbar in x_0 . Setze

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \cdots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

Die reelle $m \times n$ -Matrix $J_f(x_0)$ heißt **Jacobi Matrix** oder **Funktionalmatrix** von f an der Stelle x_0 . Sie stellt die lineare Abbildung T in (18) bezüglich der Standardbasen in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m dar, d.h. $T(\mathbf{a}) = J_f(x_0)\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist T eindeutig bestimmt. T heißt die **Ableitung** (oder **totale** oder Frechet Ableitung) von f in x_0 und wird mit $Df(x_0)$ bezeichnet. Also gilt

$$Df(x_0)(\mathbf{a}) = J_f(x_0)\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Mit $R_1(\mathbf{h}) := f(x_0 + \mathbf{h}) - f(x_0) - T(\mathbf{h})$ folgt $\|f(x_0 + \mathbf{h}) - f(x_0)\| = \|R_1(\mathbf{h}) + T(\mathbf{h})\| \leq \|R_1(\mathbf{h})\| + \|T(\mathbf{h})\| \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0$, weil sogar $\frac{\|R_1(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0$ und $T(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0$. Letzteres gilt, weil T linear von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m ist und somit $T(0) = 0$ und T stetig nach (13.36) ist. Also ist f stetig in x_0 .

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ eine Matrix, die T bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n darstellt, d.h. $T(\mathbf{h}) = A\mathbf{h}$. Damit ist $R_{1i}(\mathbf{t}e_j) = f_i(x_0 + \mathbf{t}e_j) - f_i(x_0) - \mathbf{t}a_{ij}$. Es folgt

$$\frac{R_{1i}(\mathbf{t}e_j)}{\mathbf{t}} = \frac{f_i(x_0 + \mathbf{t}e_j) - f_i(x_0)}{\mathbf{t}} - a_{ij} \xrightarrow{\mathbf{t} \rightarrow 0} 0,$$

denn $\left| \frac{R_{1i}(\mathbf{t}e_j)}{\mathbf{t}} \right| \leq \frac{\|R_1(\mathbf{t}e_j)\|_2}{\|\mathbf{t}e_j\|_2} \leq c \frac{\|R_1(\mathbf{t}e_j)\|}{\|\mathbf{t}e_j\|} \xrightarrow{\mathbf{t} \rightarrow 0} 0$ wegen der Äquivalenz der Normen und weil f differenzierbar in t_0 ist. Das bedeutet $a_{ij} = \partial_j f_i(x_0)$ mit Zeilenindex i und Spaltenindex j . \square

Also ist $\mathbf{h} \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, die approximierende affine Abbildung für f an der Stelle x_0 .

(20) Beispiele.

- Seien $m = n = 1$. Dann ist offenbar f genau dann total differenzierbar in $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ gemäß Definition (18), wenn f im bisherigen Sinn in x_0 differenzierbar ist, und die approximierende affine Funktion lautet $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} \mapsto f'(x_0)\mathbf{h}$.
- Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **affin**, d.h. $f(x) = \mathbf{b} + Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $f(x + \mathbf{h}) - f(x) = \mathbf{b} + A(x + \mathbf{h}) - (\mathbf{b} + Ax) = A\mathbf{h}$. Daraus folgt insbesondere, dass $\frac{\|f(x + \mathbf{h}) - f(x) - A\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0$. Daher ist $Df(x)(\mathbf{h}) = A\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Also ist f an jeder Stelle x differenzierbar mit der konstanten Ableitung

$$J_f(x) = A \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine **quadratische Form**, d.h. $f(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dafür ist $f(x + \mathbf{h}) - f(x) = \langle x + \mathbf{h}, A(x + \mathbf{h}) \rangle - \langle x, Ax \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle \mathbf{h}, Ax \rangle + \langle x, A\mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, A\mathbf{h} \rangle - \langle x, Ax \rangle = \langle (A + A^T)x, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{h}, A\mathbf{h} \rangle$. Bezeichnet

$$B := \frac{1}{2}(A + A^T)$$

den symmetrischen Anteil von A , dann ist also $f(x + \mathbf{h}) - f(x) - 2\langle Bx, \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{h}, A\mathbf{h} \rangle$. Da $|\langle \mathbf{h}, A\mathbf{h} \rangle| \leq \|\mathbf{h}\|_2 \|A\mathbf{h}\|_2$, folgt $\frac{|\langle \mathbf{h}, A\mathbf{h} \rangle|}{\|\mathbf{h}\|_2} \leq \|A\mathbf{h}\|_2 \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0$. Damit ist gezeigt, dass f an jeder Stelle x differenzierbar ist mit

$$Df(x)(\mathbf{h}) = 2\langle Bx, \mathbf{h} \rangle \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad J_f(x) = 2(Bx)^T.$$

(21) Definition und Satz. Sei $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m . Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ **differenzierbar**, d.h. in allen Punkten von D differenzierbar. Dann ist Df die Abbildung

$$Df : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto Df(x),$$

die jeder Stelle x in D die lineare Abbildung $Df(x)$ von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m zuordnet.

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension nm . Bei der Wahl der Standardbasen in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m wird $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch den Vektorraum $\mathbb{R}^{m,n}$ der reellen $m \times n$ -Matrizen dargestellt. Alle Normen auf $\mathbb{R}^{m,n}$ sind äquivalent. *Mit Hilfe der Maximumnorm $\|A\|_\infty := \max_{i,j} |A_{ij}|$ erkennt man nach (13.18) sofort, dass eine Folge (A_k) in $\mathbb{R}^{m,n}$ genau dann gegen ein $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ konvergiert, wenn für alle Komponenten*

$$A_{k,ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Die Funktion f heißt **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar und Df stetig ist. *Dann ist f stetig partiell differenzierbar, wenn f stetig differenzierbar ist. Außerdem ist f stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und stetig partiell differenzierbar ist.*

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus (13.30), (19) und (*). □

Die Aussagen von (21) lassen sich noch verschärfen.

(22) Satz. *Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig partiell differenzierbar} \iff f \text{ ist stetig differenzierbar.}$$

Beweis. Wegen (21) bleibt zu zeigen, dass f differenzierbar ist, wenn f partiell differenzierbar ist. Sei $x_0 \in D$. Setze $R_1(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - J_f(x_0)h$. Zu zeigen ist $\frac{\|R_1(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Wähle die Maximumsnorm in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m (alle Normen sind ja äquivalent). Daher genügt es $\|R_{1,i}(h)\| \|h\|_\infty^{-1} \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, für jedes $i = 1, \dots, m$ zu zeigen. Deshalb darf o.E. $m = 1$ angenommen werden. Das ist der Fall eines Skalarfeldes. Der Index i fällt weg.

Sei $\delta > 0$ derart, dass $x_0 + h \in D$ für alle h mit $\|h\|_\infty < \delta$. Setze

$$z^0 := x_0, \quad z^j := x_0 + \sum_{k=1}^j h_k e_k \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Beachte, dass $z^n = x_0 + h$. Wende den MWS auf $g_j(t) := f(z^{j-1} + te_j)$ an. Dann existiert τ_j zwischen 0 und h_j mit $g_j(h_j) = g_j(0) + g'_j(\tau_j)h_j$, d.h.

$$f(z^j) = f(z^{j-1}) + \partial_j f(\zeta^j) h_j \quad \text{mit } \zeta^j := z^{j-1} + \tau_j e_j.$$

Hiermit ergibt sich, dass $f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{j=1}^n (f(z^j) - f(z^{j-1})) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\zeta^j) h_j$. Somit ist $R_1(h) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\zeta^j) h_j - \sum_{j=1}^n \partial_j f(x_0) h_j$, weil $\sum_{j=1}^n \partial_j f(x_0) h_j = J_f(x_0)h$. Daher folgt

$$|R_1(h)| \leq \|h\|_\infty \sum_{j=1}^n |\partial_j f(\zeta^j) - \partial_j f(x_0)|. \quad (*)$$

Nun ist $\zeta^j - x_0 = z^{j-1} + \tau_j e_j - x_0 = \sum_{k=1}^{j-1} h_k e_k + \tau_j e_j$, wobei die Summe 0 ist für $j = 1$. Daher gilt $\|\zeta^j - x_0\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Da die partiellen Ableitungen nach Voraussetzung stetig sind, folgt hieraus $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n |\partial_j f(\zeta^j) - \partial_j f(x_0)| = 0$. Daher liefert (*) die Behauptung. □

(23) Beispiel. Die **Polarkoordinaten** lauten

(a) für die Ebene $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Die Abbildung f ist surjektiv, nicht injektiv. Weil

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ stetig ist, ist } f \text{ stetig differenzierbar.}$$

(b) für den Raum $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(r, \varphi, \vartheta) := (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$. Die Abbildung f ist surjektiv, nicht injektiv. Weil

$$J_f(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{pmatrix} \text{ stetig ist, ist } f \text{ stetig differenzierbar.}$$

(24) Kettenregel. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit $f(U) \subset V$ und $a \in U$. Weiter sei f differenzierbar in a und g differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a und

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a), \\ J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a).$$

Die Funktionalmatrizen werden also in der angegebenen Reihenfolge miteinander multipliziert.

Beweis. Setze $r(h) := f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)$, $s(k) := g(f(a)+k) - g(f(a)) - Dg(f(a))(k)$ für $h \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}^m$. Nach Voraussetzung gelten

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{und} \quad \frac{s(k)}{\|k\|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0. \quad (*)$$

Mit der Abkürzung $k(h) := r(h) + Df(a)(h)$ folgt $(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) - Dg(f(a)) \circ Df(a)(h) = g(f(a+h)) - g(f(a)) - Dg(f(a))(Df(a)(h)) = g(f(a)+k(h)) - g(f(a)) - Dg(f(a))(k(h) - r(h)) = s(k(h)) + Dg(f(a))(r(h))$.

Folglich ist $\frac{1}{\|h\|} \|s(k(h)) + Dg(f(a))(r(h))\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ zu zeigen. Es wird etwas mehr gezeigt:

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{\|h\|} \|Dg(f(a))(r(h))\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{\|h\|} \|s(k(h))\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Zu $\textcircled{1}$ ist zu bemerken, dass $\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ nach $(*)$ und $Dg(f(a))(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$ nach (13.36). Daraus folgt $\textcircled{1}$ mit $k := \frac{r(h)}{\|h\|}$. — Zum Beweis von $\textcircled{2}$ stellt man zunächst fest, dass $\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} + \left\| Df(a) \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\|$, weil $Df(a)$ linear ist und weil die Dreiecksungleichung gilt. Für $h \rightarrow 0$ verschwindet der erste Summand nach $(*)$. Der zweite Summand bleibt nach (13.36) und (13.38)(iii) dabei beschränkt. Also bleibt $\frac{\|k(h)\|}{\|h\|}$ beschränkt für $h \rightarrow 0$. Daraus folgt insbesondere, dass $k(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Nun ist $s(k(h)) = 0$ für $k(h) = 0$. Für $k(h) \neq 0$ schreibt man $\frac{\|s(k(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|s(k(h))\|}{\|k(h)\|} \cdot \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}$. Hieraus folgt $\textcircled{2}$, weil der erste Faktor aufgrund von $(*)$ für $h \rightarrow 0$ verschwindet.

Abschließend bleibt zu bemerken, dass sich die darstellende Matrizen bei Komposition der linearer Abbildungen multiplizieren. \square

(25) Spezialfälle.

- Da $J_f(x) = (\partial_j f_i(x))_{ij}$ gemäß (19), lautet die Kettenregel $J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x))J_f(x)$ explizit

$$\partial_j (g \circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^m \partial_k g_i(f(x)) \partial_j f_k(x) \quad \text{für } 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n$$

- Für den Spezialfall einer Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ (auch im Fall eines nicht offenen Intervalls I) und einem Skalarfeld $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $n = 1$ und $l = 1$, lautet die Kettenregel

$$g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad (g \circ f)'(t) = \sum_{k=1}^m \partial_k g(f(t)) f'_k(t) = \langle \text{grad } g(f(t)), f'(t) \rangle.$$

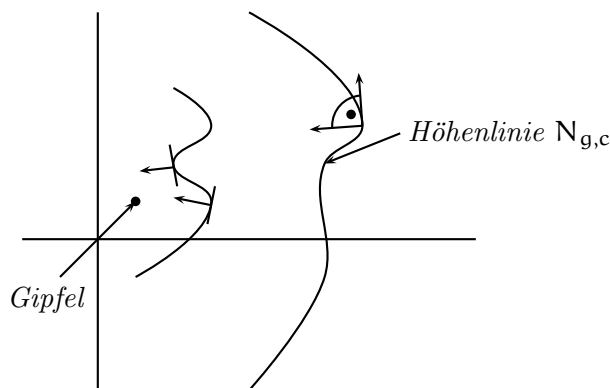
Auf diese Regel bezieht sich die Bemerkung nach (12).

(26) **Lemma und Definition.** Seien $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein differenzierbares Skalarfeld, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, $c \in \mathbb{R}$ und

$$f(I) \subset N_{g,c}.$$

Danach verläuft f ganz in der Niveaumenge von g zum Niveau c . Dann steht der Gradient von g in $f(t)$ senkrecht auf dem Tangentenvektor $f'(t)$ von f in t :

$$\langle \text{grad } g(f(t)), f'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in I.$$



Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentenvektor** an $N_{g,c}$ in $x \in V$, falls $\text{grad } g(x) \neq 0$ und

$$\langle \text{grad } g(x), v \rangle = 0.$$

Weiter heißen

$$T_{g,x} := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentenvektor an } N_{g,c} \text{ in } x \in V\} = \{\text{grad } g(x)\}^\perp$$

der **Tangentialraum** von $N_{g,c}$ in x und $x + T_{g,x}$ die **Tangentialhyperebene** an $N_{g,c}$ in x . Offensichtlich ist $\dim T_{g,x} = n - 1$.

Beweis. Da $g(f(t)) = c \forall t \in I$ ist $(g \circ f)'(t) = 0 \forall t$, woraus die Behauptung nach (25) folgt. \square

Beispiel. Sei $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $N_{g,1}$ die Einheitssphäre um 0 in \mathbb{R}^3 und $\text{grad } g(x, y, z) = 2(x, y, z)$ ist zweimal der Ortsvektor. Die Kurven $f_1(t) := (0, \sin(t), \cos(t))$, $f_2(t) := (\sin(t), 0, \cos(t))$ verlaufen in der Einheitssphäre durch den Nordpol $(0, 0, 1) = f_1(0) = f_2(0)$. Ihre Tangentenvektoren $f'_1(t) = (0, \cos(t), -\sin(t))$, $f'_2(t) = (\cos(t), 0, -\sin(t))$ am Nordpol sind $f'_1(0) = (0, 1, 0)$, $f'_2(0) = (1, 0, 0)$ und stehen senkrecht auf $\text{grad } g(0, 0, 1) = 2(0, 0, 1)$.

18 Mittelwertsatz und Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

(1) Satz. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann existiert und ist die Ableitung von f in Richtung v an der Stelle x gleich

$$\partial_v f(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle.$$

Der Gradient $\text{grad } f(x)$ zeigt in Richtung des maximalen Anstiegs von f .

Beweis. Sei $h(t) := x + tv$ und $\delta > 0$ so klein, dass $h(t) \in D$ für $|t| < \delta$. Mit der Kettenregel (17.25) folgt

$$\langle \text{grad } f(x), v \rangle = (f \circ g)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \partial_v f(x).$$

Sei nun $\|v\|_2 = 1$ und α der Winkel zwischen $\text{grad } f(x)$ und v . Weil $\partial_v f(x) = \|\text{grad } f(x)\|_2 \cos \alpha$, ist $\partial_v f(x)$ maximal, falls v die Richtung von $\text{grad } f(x)$ ist. \square

Bezeichnung. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $[x; y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0, 1]\}$ die **Verbindungsstrecke** von x und y .

(2) Mittelwertsatz für Skalarfelder. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x, y \in D$ mit $[x; y] \subset D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert $\xi \in [x; y]$ mit $\xi \neq x$, $\xi \neq y$ und

$$f(y) - f(x) = \langle \text{grad } f(\xi), y - x \rangle.$$

Beweis. Sei $g(t) := f(ty + (1-t)x)$. Man wende den MWS (8.16) auf g an. Danach existiert $\tau \in]0, 1[$ mit $g(1) - g(0) = g'(\tau)$. Aufgrund der Kettenregel (17.25) bedeutet dies $f(y) - f(x) = \langle \text{grad } f(\tau y + (1-\tau)x), y - x \rangle$. \square

(3) Korollar. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $[x; y] \subset D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\|f(y) - f(x)\|_\infty \leq c \|y - x\|_1 \leq n c \|y - x\|_\infty$$

mit $c := \max_{\xi \in [x; y]} \|Jf(\xi)\|_\infty$.

Beweis. Das Maximum über ξ existiert, weil $\xi \mapsto \|Jf(\xi)\|_\infty$ stetig auf dem Kompaktum $[x; y]$ ist. — Nach (2) existiert für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $\xi_i \in [x; y]$ mit $f_i(y) - f_i(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(\xi_i)(y_j - x_j)$, weshalb $|f_i(y) - f_i(x)| \leq (\max_{k, \xi} |\partial_k f_i(\xi)|) \sum_j |y_j - x_j| = \max_{k, \xi} |\partial_k f_i(\xi)| \|y - x\|_1$. Hieraus folgt die Behauptung. Man beachte, dass generell $\|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty$. \square

(4) **Multiindizes.** Ein Tupel $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt Multiindex. Dafür sei

- $|\nu| := \sum_{i=1}^n \nu_i$
- $\nu! := \prod_{i=1}^n \nu_i!$

Seien $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0^n$. Man setzt

- $\nu + \mu \in \mathbb{N}_0^n$ mit $(\nu + \mu)_i := \nu_i + \mu_i \quad \forall i$
- $\mu \leq \nu : \Leftrightarrow \mu_i \leq \nu_i \quad \forall i$. Offenbar ist $\mu \leq \nu$ genau dann, wenn $\nu = \mu + \kappa$ mit einem $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$
- $\binom{\nu}{\mu} := \prod_{i=1}^n \binom{\nu_i}{\mu_i}$ für $\mu \leq \nu$

Außerdem benutzt man die Schreibweisen

- $x^\nu := \prod_{i=1}^n x_i^{\nu_i}$ für $x \in \mathbb{R}^n$
- $\partial^\nu f := \partial_1^{\nu_1} \dots \partial_n^{\nu_n} f$ für $f \in C^{|\nu|}(D)$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

(5) **Lemma.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(D)$, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $[x; x+h] \subset D$ und $g(t) := f(x+th)$, $t \in [0, 1]$. Dann ist $g \in C^k[0, 1]$ mit

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_k} \dots h_{i_1} = \sum_{|\nu|=k} \frac{k!}{\nu!} \partial^\nu f(x+th) h^\nu.$$

Beweis. Wiederholte Anwendung der Kettenregel (17.25) auf $g^{(0)}(t) = f(x+th)$ ergibt $g^{(1)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_1}$, $g^{(2)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_2} h_{i_1}$ und so fort. Damit beweist man mit vollständiger Induktion

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_k} \dots h_{i_1}.$$

Für $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ ist $\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \partial^\nu f$ wegen (17.6), wobei

$$\nu_1 = |\{\kappa : i_\kappa = 1, \kappa \in \{1, \dots, k\}\}|, \nu_2 = |\{\kappa : i_\kappa = 2, \kappa \in \{1, \dots, k\}\}|, \dots$$

Zu einem bestimmten $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es offenbar $\frac{k!}{\nu_1! \dots \nu_n!}$ Tupel $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ mit dieser Eigenschaft. \square

(6) **Taylorformel für Skalarfelder.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{k+1}(D)$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $[x; x+h] \subset D$. Dann existiert ein $\xi \in [x; x+h]$, $\xi \neq x$, $\xi \neq x+h$ mit

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|\nu| \leq k} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(x) h^\nu}_{=: T_{f,x}^k \text{ k-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\sum_{|\nu|=k+1} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(\xi) h^\nu}_{\text{Darstellung von } R_{k+1}(h) \text{ nach Lagrange}}$$

wobei $R_{k+1}(h) := f(x+h) - T_{f,x}^k(h)$ das **Restglied** ist.

Beweis. Sei $g(t) := f(x + th)$. Nach der Taylorformel für eine Variable mit dem Restglied nach Lagrange aus (10.21) existiert $\tau \in]0, 1[$ mit $f(x + h) = g(1) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\tau) \stackrel{(5)}{=} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \sum_{|\nu|=j} \frac{j!}{\nu!} \partial^\nu f(x) h^\nu + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\nu|=k+1} \frac{(k+1)!}{\nu!} \partial^\nu f(x + \tau h) h^\nu. \quad \square$

(7) Ordnung des Restglieds. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^k(D)$ und $x \in D$. Dann gilt für das Restglied $R_{k+1}(h) = f(x + h) - T_{f,x}^k(h)$, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{R_{k+1}(h)}{\|h\|^k} = 0.$$

Man beachte, dass f "nur" k -mal stetig differenzierbar vorausgesetzt ist.

Beweis. Für $k = 0$ gilt $\frac{R_1(h)}{\|h\|^0} = f(x + h) - f(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, weil f stetig ist. — Für $k \geq 1$ gilt nach (6)

$$f(x + h) = T_{f,x}^{k-1}(h) + \sum_{|\nu|=k} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(\xi) h^\nu = T_{f,x}^k(h) + \sum_{|\nu|=k} \frac{1}{\nu!} (\partial^\nu f(\xi) - \partial^\nu f(x)) h^\nu.$$

Daher ist $R_{k+1}(h) = f(x + h) - T_{f,x}^k(h) = \sum_{|\nu|=k} \frac{1}{\nu!} (\partial^\nu f(\xi) - \partial^\nu f(x)) h^\nu$. Nun ist $|h^\nu| \leq (\|h\|_\infty)^k$ und es gilt $|\partial^\nu f(\xi) - \partial^\nu f(x)| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$, weil $\|\xi - x\| = \tau \|h\|$ und $\partial^\nu f$ stetig ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

(8) Der wichtige Fall $k = 2$. Für $f \in C^2(D)$ ist nach (5) und (6) $f(x + h) = f(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j + R_3(h)$, d.h.

$$f(x + h) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, H_f(x) h \rangle + R_3(h),$$

wobei

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \partial_1 \partial_2 f(x) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \partial_2 \partial_1 f(x) & \partial_2^2 f(x) & \cdots & \partial_2 \partial_n f(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \cdots & \cdots & \partial_n^2 f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

die **Hesse Matrix** von f in x ist. Nach dem Satz von Schwarz ist $H_f(x)^T = H_f(x)$, d.h. $H_f(x)$ ist symmetrisch.

(9) Extremum. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in D$. Dann heißt a ein **lokales Minimum** von f , wenn eine Umgebung U von a in \mathbb{R}^n existiert mit

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in U \cap D.$$

Ein **lokales Maximum** ist entsprechend definiert. Ein lokales Extremum ist entweder ein lokales Minimum oder lokales Maximum. — Ein lokales Extremum heißt **isoliert**, wenn

$$f(x) \neq f(a) \quad \forall x \in U \cap D, \quad x \neq a.$$

(10) Stationärer Punkt. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ein Punkt $\mathbf{a} \in D$ heißt stationärer Punkt von f , wenn $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$. Es gilt:

$$\mathbf{a} \text{ lokales Extremum} \Rightarrow \mathbf{a} \text{ stationärer Punkt.}$$

Ist \mathbf{a} stationär, aber kein lokales Extremum, dann heißt \mathbf{a} ein **Sattelpunkt** von f .

Beweis. Für $\delta > 0$ klein genug ist $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j \in D$ für $t \in]-\delta, \delta[$ und $g(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j)$ hat nach Voraussetzung ein lokales Extremum in $t = 0$. Nach (8.12) ist daher $\partial_j f(\mathbf{a}) = g'(0) = 0$. Dies gilt für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. \square

(11) Definition. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt

- **positiv definit**, falls $\mathbf{h}^T A \mathbf{h} > 0 \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{h}^T A \mathbf{h} \geq 0 \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativ (semi)definit**, falls $-A$ positiv (semi)definit ist.
- **indefinit**, falls A weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, d.h. wenn $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\mathbf{h}_1^T A \mathbf{h}_1 > 0$ und $\mathbf{h}_2^T A \mathbf{h}_2 < 0$.

In der linearen Algebra beweist man für **symmetrische Matrizen** $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

A positiv definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind positiv.

A positiv semidefinit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind nichtnegativ.

A indefinit \Leftrightarrow es existiert ein positiver und ein negativer Eigenwert von A .

(12) Satz. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D)$ und $\mathbf{a} \in D$. Dann gelten:

- (a) \mathbf{a} lokales Minimum $\Rightarrow \mathbf{a}$ stationär, $H_f(\mathbf{a})$ positiv semidefinit.
- (b) \mathbf{a} stationär, $H_f(\mathbf{a})$ positiv definit $\Rightarrow \mathbf{a}$ isoliertes lokales Minimum.

Für lokale Maxima gelten die entsprechenden Aussagen.

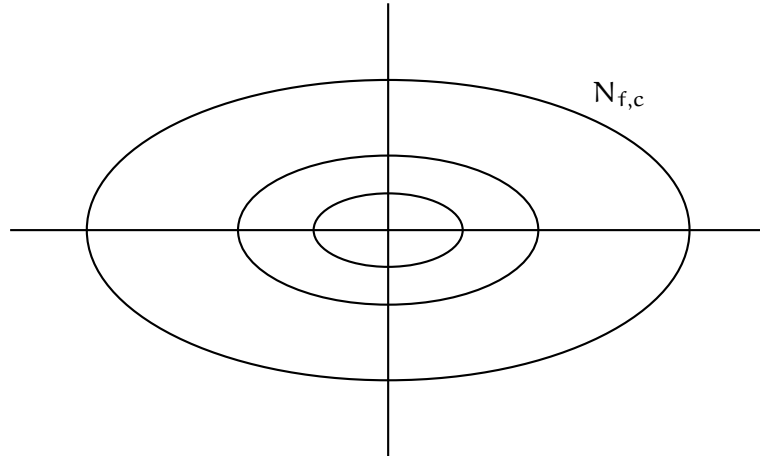
Beweis. (a) Nach (10) ist \mathbf{a} stationär. Sei $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $g(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ mit $|t| < \delta$ für $\delta > 0$ hinreichend klein. Offenbar ist 0 ein lokales Minimum von g . Nach (8.20) ist daher $0 = g'(0)$ und $0 \leq g''(0) = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f(\mathbf{a}) h_i h_j = \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{a}) \mathbf{h}$.

(b) Da \mathbf{a} stationär ist, ist $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$. Nach (8) ist daher $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{a}) \mathbf{h} + R_3(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{h}^T H_f(\mathbf{a}) \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{R_3(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \right)$ für $\mathbf{h} \neq 0$. Nun nimmt $\frac{1}{2} \frac{\mathbf{h}^T H_f(\mathbf{a}) \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ als stetige Funktion von \mathbf{h} einen minimalen Wert α auf der kompakten Einheitssphäre an. Es ist $\alpha > 0$, da $H_f(\mathbf{a})$ positiv definit ist. Damit ist $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \|\mathbf{h}\|^2 \left(\alpha + \frac{R_3(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \right)$. Nach (7) existiert $\delta > 0$ derart, dass $\frac{|R_3(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} < \alpha$ für $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$. Es folgt $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$.

Für lokale Maxima erhält man die entsprechenden Aussagen, wenn man f durch $-f$ ersetzt. \square

(13) Beispiele.

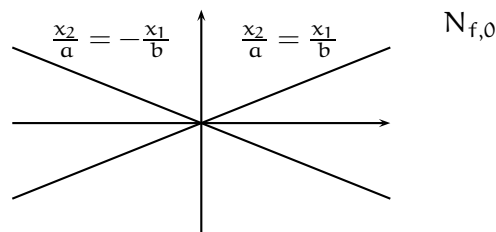
- Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$ für $a, b > 0$. Dann ist $N_{f,c} = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = c \right\}$ für $c > 0$ eine Ellipse und graph f ein **elliptisches Paraboloid** im \mathbb{R}^2 . Weiter ist $N_{f,0} = \{0\}$ und $N_{f,c} = \emptyset$ für $c < 0$.



Da $\text{grad } f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2} \right)$, ist $\text{grad } f(x_1, x_2) = 0$ genau dann, wenn $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Also ist der Ursprung der einzige stationäre Punkt. Weiter ist $H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$ konstant und positiv definit. Daher ist 0 ein isoliertes lokales Minimum, sogar das einzige Extremum.

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}$ für $a, b > 0$. Dann ist $N_{f,c} = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = c \right\}$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Hyperbel $\{xy = c\}$ mit $x = \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}$ und $y = \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}$ und graph f ein **hyperbolisches Paraboloid**. $N_{f,0}$ ist ein sich schneidendes Geradenpaar.



Es ist $\text{grad } f(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, -\frac{2x_2}{b^2} \right) = 0$ genau dann, wenn $(x_1, x_2) = (0, 0)$, d.h. der Ursprung ist der einzige stationäre Punkt. Weiter ist $H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$ konstant und indefinit. Also ist 0 kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt.

- Im semidefiniten Fall ist an der Hessematrix nicht erkennbar, ob ein Extremum vorliegt oder nicht. Man betrachte dazu die Polynomfunktionen f, g, h

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^4, \quad g(x_1, x_2) := x_1^2, \quad h(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^3.$$

Dafür sind

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x_1, x_2) &= (2x_1, 4x_2^3), \quad H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}, \\ \text{grad } g(x_1, x_2) &= (2x_1, 0), \quad H_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{grad } h(x_1, x_2) &= (2x_1, 3x_2^2), \quad H_h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist für alle drei skalaren Felder f , g und h der Ursprung 0 ein stationärer Punkt mit gleicher Hessematrix $\text{diag}(2, 0)$. Aber f hat ein isoliertes lokales Minimum in 0 , g hat ein nicht isoliertes lokales Minimum in 0 und h hat einen Sattelpunkt in 0 .

(14) Bemerkungen.

- (a) Die Taylorentwicklung für vektorwertige Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ erfolgt komponentenweise. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f_i \in C^{k+1}(D)$. Dann ist $f_i(x+h) = T_{f_i, x}^k(h) + R_{i, k+1}(h)$, $i = 1, \dots, m$. Setzt man $\partial^\nu f(x) := (\partial^\nu f_1(x), \dots, \partial^\nu f_m(x))$, so faßt man zusammen

$$f(x+h) = \sum_{|\nu| \leq k} \frac{1}{\nu!} \partial^\nu f(x) h^\nu + R_{k+1}(h).$$

Es gilt weiter $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R_{k+1}(h)\|}{\|h\|^{k+1}} = 0$ nach (7). Man beachte jedoch, dass für die Darstellung des Restglieds gemäß **Lagrange** (6) für jede Komponente $R_{i, k+1}(h)$ ein eigener Zwischenwert ξ_i nötig ist.

- (b) Die Restglieddarstellung nach **Cauchy** (das ist die Darstellung in Integralform) erhält man, indem man im Beweis von (6) für die Taylorentwicklung von g die Restglieddarstellung in Integralform $\frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k g^{(k+1)}(t) dt$ (10.20) verwendet. Mit (5) folgt

$$R_{k+1}(h) = \sum_{|\nu|=k+1} \frac{h^\nu}{\nu!} \left(\int_0^1 (1-t)^k \partial^\nu f(x+th) dt \right).$$

Diese gilt auch für vektorwertige f , wenn man die Integration komponentenweise versteht.

19 Implizite Funktionen

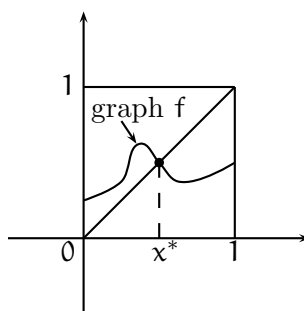
(1) **Definition.** Sei X eine Menge und $f : X \rightarrow X$. Dann heißt $x^* \in X$ ein **Fixpunkt** von f , wenn

$$f(x^*) = x^*.$$

Zu $x_0 \in X$ heißt $x_{k+1} := f(x_k)$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ die **Fixpunktiteration** mit Anfangspunkt x_0 .

(2) **Beispiele.**

(a) Sei $X = [0, 1]$ und f stetig. Dann hat f einen Fixpunkt.



Beweis. Betrachte $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x - f(x)$. Es gilt: $g(0) = -f(0) \leq 0$ und $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$. Nach dem ZWS (7.17) existiert $x^* \in [0, 1]$ mit $g(x^*) = 0$, d.h. $f(x^*) = x^*$. \square

(b) Sei $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ und

$$f(x)(t) := \alpha + \int_a^t g(s, x(s)) ds.$$

Sei x^* ein Fixpunkt von f , d.h.

$$x^*(t) = \alpha + \int_a^t g(s, x^*(s)) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Der Integrand $s \mapsto g(s, x^*(s))$ ist als Komposition stetiger Abbildungen stetig. Nach (9.22) ist x^* differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto g(t, x^*(t))$. Außerdem ist $x^*(a) = \alpha$. Daher ist x^* eine Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung

$$x' = g(t, x)$$

mit Anfangswert $x(a) = \alpha$.

(3) Lipschitz Stetigkeit. Seien X, Y metrische Räume. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt Lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante $L \geq 0$, falls

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Falls $X = Y$ und $L < 1$ ist, heißt f eine **Kontraktion**.

Folgerung. Ist f Lipschitz stetig, dann ist f gleichmäßig stetig. Denn zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{L}$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d(x_1, x_2) \leq \delta$: $d(f(x_1), f(x_2)) \leq L\delta = \epsilon$.

(4) Banachscher Fixpunktsatz. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Dann gelten

(i) f hat genau einen Fixpunkt x^*

(ii) Die Fixpunktiteration $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert für jeden Anfangswert gegen x^* . Dabei gilt die "Fehlerabschätzung"

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)$$

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Da $d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq Ld(x_{k-1}, x_k)$ folgt mit vollständiger Induktion

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq L^k d(x_0, x_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Hieraus ergibt sich für $k, l \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$d(x_k, x_{k+l}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{k+j}, x_{k+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} L^{k+j} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) L^k \sum_{j=0}^{l-1} L^j \leq d(x_0, x_1) \frac{L^k}{1-L} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist (x_k) eine Cauchy Folge und es existiert $x \in X$ mit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Hieraus folgen $f(x_k) = x_{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ und $f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$, weil f stetig ist. Damit ist $x = f(x)$ ein Fixpunkt von f .

Nun sei x^* ein weiterer Fixpunkt von f . Dann ist $d(x, x^*) = d(f(x), f(x^*)) \leq Ld(x, x^*)$. Weil $L < 1$, folgt daraus $d(x, x^*) = 0$ und somit $x = x^*$. — Schließlich gilt für $k \geq 1$ unter Verwendung der obigen Abschätzungen

$$d(x_k, x_{k+l}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} d(x_{k+j}, x_{k+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{l-1} L^{j+1} d(x_{k-1}, x_k) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k) \quad \forall l,$$

weshalb $d(x_k, x^*) = \lim_{l \rightarrow \infty} d(x_k, x_{k+l}) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{k-1}, x_k)$. □

Der Vektorraum $\mathbb{R}^{n,n}$ der reellen $n \times n$ -Matrizen kann in natürlicher Weise durch Aneinanderhängen aller n Zeilen zu einem Zeilenvektor der Länge n^2 mit dem reellen Vektorraum \mathbb{R}^{n^2} identifiziert werden. Nach (14.17) sind alle Normen auf $\mathbb{R}^{n,n}$ äquivalent. Für das Folgende wird $\mathbb{R}^{n,n}$ mit der Maximumnorm $A \mapsto \|A\|_\infty$ (vgl. (17.21)) versehen.

(5) Satz. (1) $\det : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$ ist beliebig oft stetig differenzierbar, d.h. $\det \in C^\infty(\mathbb{R}^{n,n})$.

- (2) $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A \text{ invertierbar}\}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n,n}$.
- (3) $GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}, A \mapsto A^{-1}$ ist beliebig oft stetig differenzierbar.

Beweis. (1) Gemäß der aus der linearen Algebra bekannten Leibniz Formel für Determinanten $\det A = \sum_{\pi} \text{signum}(\pi) A_{\pi(1)1} A_{\pi(2)2} \dots A_{\pi(n)n}$, wobei π die Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft, ist $\det A$ ein Polynom in den Matrixelementen. Daher ist $\mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$, beliebig oft stetig differenzierbar.

- (2) Weiterhin ist aus der Linearen Algebra bekannt, dass $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det A \neq 0$. Also ist $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Weil $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen ist und \det stetig ist, ist $GL(n, \mathbb{R})$ offen.
- (3) Für $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ gemäß der **Cramer Regel**, wobei \tilde{A} die zu A **komplementäre** Matrix ist. Das Matrixelement \tilde{A}_{ij} von \tilde{A} in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte ist die Determinante derjenigen Matrix, die durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte aus der Matrix A entsteht, multipliziert mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$. Hieraus folgt mit (1) sofort die Behauptung. □

(6) Satz von der lokalen Inversen. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $a \in D$ und $Df(a)$ bijektiv. Dann existiert ein offenes $U \subset D$ mit $a \in U$ derart, dass $V := f(U)$ offen ist,

$$U \rightarrow V, x \mapsto f(x)$$

bijektiv ist und die Umkehrabbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ (d.h. $g(f(x)) = x \forall x \in U$) stetig differenzierbar ist. Für alle $x \in U$ folgt: $Df(x)$ ist bijektiv, $Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}$ und $J_g(f(x)) = (J_f(x))^{-1}$.

Beweis. (a) Zunächst erfolgt die Reduktion auf den Fall $a = 0, f(0) = 0$ und $Df(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Setze dazu $\tilde{D} := D - a, \tilde{f}(x) := Df(a)^{-1}(f(x+a) - f(a)) \forall x \in \tilde{D}$. Dann ist $0 \in \tilde{D}$ und, aufgrund der Kettenregel (17.24) und weil $Df(a)^{-1}$ linear ist (siehe (17.20) zweites Beispiel), $\tilde{f}(0) = 0, D\tilde{f}(0) = Df(a)^{-1} \circ Df(a) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, wie gewünscht. — Nun ist $f(x) = f(a) + Df(a)\tilde{f}(x-a)$, weshalb es genügt, die Behauptung für \tilde{f} zu beweisen.

(b) Sei also o.E. $f(0) = 0$ und $Df(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ setze

$$h_y(x) := x - f(x) + y \quad \forall x \in D.$$

Dafür gilt: $y = f(x) \iff x = h_y(x)$. Der Beweis läuft nun auf die Anwendung des Fixpunktsatzes auf h_y hinaus. Zur Prüfung der Voraussetzungen betrachte die Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n, h(x) := x - f(x)$, die stetig differenzierbar ist mit $J_h(x) = E_n - J_f(x)$ und $J_h(0) = 0$. Weil J_h stetig in 0 ist, existiert $r > 0$ mit $\tilde{U}_r(0) \subset D$ und $\|J_h(\xi)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2n} \forall \xi \in \tilde{U}_r(0)$. Wegen (18.3) gilt die Abschätzung $\|h_y(x) - h_y(x')\|_{\infty} = \|h(x) - h(x')\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|_{\infty} \forall x, x' \in \tilde{U}_r(0)$. Insbesondere ist $\|h(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\|x\|_{\infty}$, da $h(0) = 0$. Mit $h_y(x) = h(x) + y$ folgt

$$(1) \|h_y(x)\|_{\infty} \leq \|h(x)\|_{\infty} + \|y\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\|x\|_{\infty} + \|y\|_{\infty}.$$

Sei nun $y \in \tilde{U}_{\frac{r}{2}}(0)$. Dafür ist $\|h_y(x)\|_{\infty} \leq r$, weshalb $h_y : \tilde{U}_r(0) \rightarrow \tilde{U}_r(0)$. Da $\|h_y(x) - h_y(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$, wie oben nachgewiesen, ist h_y eine Kontraktion von $\tilde{U}_r(0)$, was nach (13.25)(ii) vollständig ist. Die Anwendung des Fixpunktsatzes (4) ergibt:

(2) $\forall \mathbf{y} \in \tilde{\mathbf{U}}_{\frac{r}{2}}(0) \exists_1 \mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{U}}_r(0)$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, d.h. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

Für dieses \mathbf{x} folgt aus (1): $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \|\mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_{\infty} + \|\mathbf{y}\|_{\infty}$, weshalb

(3) $\|\mathbf{x}\|_{\infty} \leq 2\|\mathbf{y}\|_{\infty}$ für $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \tilde{\mathbf{U}}_{\frac{r}{2}}(0)$.

Das bedeutet insbesondere, dass $\|\mathbf{x}\|_{\infty} < r$ falls $\|\mathbf{y}\|_{\infty} < \frac{r}{2}$. Setze daher $\mathbf{V} := \mathbf{U}_{\frac{r}{2}}(0)$ und $\mathbf{U} := f^{-1}(\mathbf{V}) \cap \mathbf{U}_r(0)$. Dann sind \mathbf{V} und damit \mathbf{U} offen und aus (2) und (3) folgen $0 \in \mathbf{U}$, $f(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$ und $f|_{\mathbf{U}}$ injektiv.

(c) Es wird jetzt die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung \mathbf{g} in 0 mit $D\mathbf{g}(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ gezeigt. Dazu ist zu zeigen, dass $\frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{y})\| \rightarrow 0$ für $\mathbf{y} \rightarrow 0$, $\mathbf{y} \neq 0$. In der Tat gilt $\frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{g}(0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{y})\| = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \|\mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\| \stackrel{(3)}{\leq} \frac{2}{\|\mathbf{x}\|} \|f(\mathbf{x}) - f(0) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x})\| \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow 0} 0$, weil dabei $\mathbf{x} \rightarrow 0$ nach (3). Beachte $f(0) = 0$ und $Df(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

(d) Die Überlegungen bisher zeigen, dass die Umkehrabbildung \mathbf{g} existiert und in $f(\mathbf{a})$ differenzierbar ist mit

$$D\mathbf{g}(f(\mathbf{a})) = (Df(\mathbf{a}))^{-1}, \quad J_{\mathbf{g}}(f(\mathbf{a})) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})^{-1}.$$

Nun ist die Abbildung $\mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))$ stetig mit $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}$. Dann ist $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung von \mathbf{a} . Es ist daher keine Einschränkung anzunehmen, dass $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$. Dann ist $Df(\mathbf{x})$ bijektiv für alle \mathbf{x} und aus (a)–(c) folgt, dass \mathbf{g} differenzierbar auf \mathbf{V} ist mit $D\mathbf{g}(f(\mathbf{x})) = (Df(\mathbf{x}))^{-1}$. Mit Aussage (3) in (5) ist $\mathbf{x} \mapsto J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1}$ stetig, weshalb \mathbf{g} nach (17.21) stetig differenzierbar ist. \square

(7) Beispiel. Für die Polarkoordinaten (siehe (17.23))

(a) in der Ebene $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ist $J_{\mathbf{f}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ und somit $\det J_{\mathbf{f}}(r, \varphi) = r \neq 0$ für $r \neq 0$. Daher hat f um jeden Punkt (r, φ) mit $r \neq 0$ eine stetig differenzierbare Inverse, obwohl f nicht injektiv ist! Man verifiziert direkt, dass für die offenen Mengen $\mathbf{U} :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{V} := \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[\times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ die Abbildung

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}, \quad (r, \varphi) \mapsto f(r, \varphi)$$

bijektiv ist.

(b) im Raum gilt eine entsprechende Aussage. $\boxed{\ddot{\text{Üb}}}$

(8) Definition. Seien $n, m, l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ differenzierbar in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbf{D}$. Betrachte die partielle Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0),$$

die auf der offenen Umgebung $\{x \in \mathbb{R}^n : (x, y_0) \in D\}$ von x_0 definiert ist. Ihre totale Ableitung an der Stelle x_0 existiert und wird mit

$$D_1 f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$$

bezeichnet. Die Bezeichnung D_x für D_1 ist auch üblich. Die zugehörige Jacobi Matrix lautet

$$\partial_1 f(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_l(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{x_n} f_l(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Die Bezeichnung ∂_x für ∂_1 ist ebenfalls üblich. Entsprechend wird

$$D_2 f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$$

–mit der alternativen Bezeichnung D_y – dargestellt durch

$$\partial_2 f(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{y_m} f_1(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} f_l(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{y_m} f_l(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt auch ∂_y statt ∂_2 . Es ist $\partial_1 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{l,n}$ und $\partial_2 f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{l,m}$ und es gilt

$$J_f(x_0, y_0) = (\partial_1 f(x_0, y_0) \quad \partial_2 f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^{l, m+n}$$

in Blockmatrixschreibweise.

(9) Satz über implizite Funktionen. Seien $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_2 f(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann existiert $W \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $x_0 \in W$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass $g(x_0) = y_0$, $(x, g(x)) \in D$, $\partial_2 f(x, g(x))$ invertierbar ist und

$$\boxed{f(x, g(x)) = 0}$$

für alle $x \in W$. Es folgt $J_g(x) = -(\partial_2 f(x, g(x)))^{-1} \partial_1 f(x, g(x)) \quad \forall x \in W$.

Beweis. Die Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $F(x, y) := (x, f(x, y))$ ist stetig differenzierbar, und

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \partial_1 f(x_0, y_0) & \partial_2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

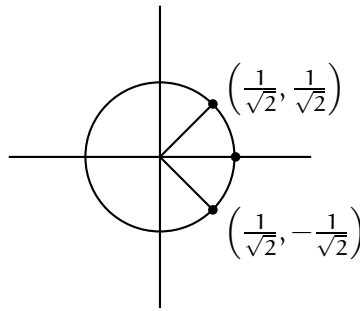
ist invertierbar mit der Inversen

$$J_F(x_0, y_0)^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -\partial_2 f(x_0, y_0)^{-1} \partial_1 f(x_0, y_0) & \partial_2 f(x_0, y_0)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nach (6) existieren $U \subset D$ offen mit $(x_0, y_0) \in U$, $V := F(U)$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare lokale Inverse $G : V \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $G(F(x, y)) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in U$. Für letztere gilt $DG(F(x, y)) = DF(x, y)^{-1}$.

Seien g_i die Komponentenabbildungen von G , d.h. $G(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Weil $(x_0, y_0) = G(F(x_0, y_0)) = G(x_0, 0) = (x_0, g_2(x_0, 0))$ gilt

$$y_0 = g_2(x_0, 0). \quad (*)$$



Für die Nullstelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ist offenbar keine Auflösung in einer Umgebung (!) von 1 möglich (siehe Zeichnung). Dementsprechend ist $\partial_2 f(x, y) = 2y$ und somit $\partial_2 f(1, 0) = 0$.

Üb Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := y + \sin(xy)$. Bestimme die Niveaumenge $N_{f,0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, das Nullstellengebilde von f .

(13) Parametrisierung einer Niveaumenge $N_{f,c} = \{x \in D_f : f(x) = c\}$ in der Umgebung eines regulären Punktes von f . Ein Punkt $x_0 \in D_f$ heißt **regulär** für f , wenn x_0 ein innerer Punkt von D_f ist, f in einer Umgebung von x_0 stetig differenzierbar ist und $\text{grad}f(x_0) \neq 0$ gilt.

Weil $\text{grad}f(x_0) \neq 0$, existiert $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\partial_{i_0} f(x_0) \neq 0$. Sei o.E. $i_0 = n$. Schreibe $x = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, y)$ mit $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$, $y \in \mathbb{R}$. Da $\partial_n f(x_0) \neq 0$, ist (11) anwendbar. Danach ist die Gleichung

$$f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, y) - c = 0$$

eindeutig auflösbar nach y um $x_0 = (\xi_0, y_0)$, d.h. $f(\xi, g(\xi)) = c$, wobei g stetig differenzierbar ist. Damit gibt es eine Umgebung U von x_0 derart, dass

$$U \cap N_{f,c} = \text{Graph } g.$$

(14) Nebenbedingung und Lagrange Multiplikator. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Ein lokales Minimum von ϕ unter der Nebenbedingung $f = 0$ ist ein $x_0 \in D$ derart, dass es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$\phi(x_0) \leq \phi(x) \quad \forall x \in U \cap D \cap N_{f,0}.$$

Seien D offen, $f, \phi \in C^1(D)$, x_0 ein lokales Minimum von ϕ unter der Nebenbedingung $f = 0$ und $\text{grad}f(x_0) \neq 0$. Dann

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \text{grad} \phi(x_0) = \lambda \text{grad} f(x_0).$$

λ heißt ein Lagrange Multiplikator.

Beweis. Weil $\text{grad}f(x_0) \neq 0$, ist o.E. $\partial_n f(x_0) \neq 0$ (sonst benenne man die Variablen um). Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreibe man $x = (\xi, y)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$. Nach (9) existiert eine stetig differenzierbare Funktion $g: W \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von ξ_0 derart, dass $g(\xi_0) = y_0$ und $f(\xi, g(\xi)) = 0 \quad \forall \xi \in W$. Für die Ableitung von g an der Stelle ξ_0 gilt

$$\text{grad} g(\xi_0) = \frac{-1}{\partial_n f(x_0)} \text{grad}_\xi f(x_0). \quad (*)$$

Nach Voraussetzung hat $\tilde{\phi} : W \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\phi}(\xi) := \phi(\xi, g(\xi))$, ein lokales Minimum in ξ_0 . Daher ist $\text{grad } \tilde{\phi}(\xi_0) = 0$, d.h. $\text{grad}_\xi \phi(x_0) + \partial_n \phi(x_0) \text{grad } g(\xi_0) = 0$. Setzt man hierin (*) ein, so folgt $\text{grad}_\xi \phi(x_0) = \lambda \text{grad}_\xi f(x_0)$ mit $\lambda := \frac{\partial_n \phi(x_0)}{\partial_n f(x_0)}$. Das liefert die Behauptung. \square

Offenbar gilt (14) unverändert für ein lokales Maximum von ϕ unter der Nebenbedingung $f = 0$.

(15) Beispiel. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die quadratische Form $\phi(x) = x^T A x$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Die Nebenbedingung sei $f(x) := \|x\|_2^2 - 1 = x^T x - 1 = 0$. Es sind also die lokalen Extrema einer quadratischen Funktion auf der Einheitssphäre gesucht. Nach (17.20) ist $\text{grad } \phi(x) = (2Ax)^T$ und $\text{grad } f(x) = (2x)^T$. Auf der Einheitssphäre ist $\text{grad } f(x) \neq 0$. Nach (14) lauten also die Bestimmungsgleichungen für die $n + 1$ Unbekannten $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ und λ

- (1) $2Ax_0 = \lambda 2x_0$ n Gleichungen
- (2) $x_0^T x_0 = 1$ eine Gleichung für die Nebenbedingung.

Die Gleichungen (1) bedeuten, dass λ ein Eigenwert von A und x_0 ein zugehöriger Eigenvektor ist. Mit (2) folgt $x_0^T A x_0 = \lambda x_0^T x_0 = \lambda$. Daher ist $\max_{\|x\|_2=1} \phi(x) = \lambda_{\max}$ der größte Eigenwert von A und x_0 ein Eigenvektor dazu. Ebenso ist der kleinste Eigenwert von A das Minimum, das ϕ auf der Einheitssphäre annimmt.

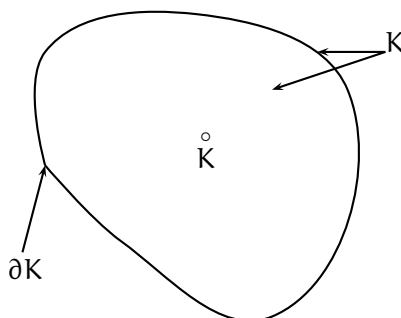
Üb Finde mit Hilfe von Lagrange Multiplikatoren die Extrema von $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ unter der Nebenbedingung $e^{xy} = x + y$.

(16) Extrema stetiger Funktionen auf Kompakta. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen) und $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nach (14.11)

$$\exists x \in K \text{ mit } \phi(x) = \inf \phi(K) =: \alpha.$$

Wie ermittelt man das Minimum α und die Minimalstellen $x_{\min} \in K$ mit $\phi(x_{\min}) = \alpha$?

- (a) Sei ϕ auf $\overset{\circ}{K}$, dem Inneren von K , partiell differenzierbar. Dann ermittle man die stationären

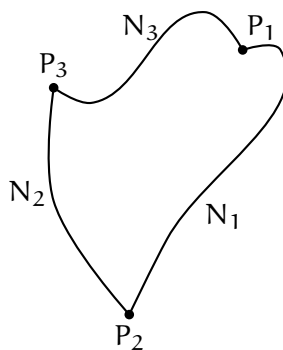


Punkte von ϕ im Inneren von K , d.h. jene $x \in \overset{\circ}{K}$ mit $\text{grad } \phi(x) = 0$. Diese sind die Kandidaten für x_{\min} nach (18.10), die in $\overset{\circ}{K}$ liegen.

- (b) Da ∂K kompakt ist, nimmt $\phi|_{\partial K}$ ein Minimum an. Man beschreibe ∂K , wenn möglich wenigstens stückweise, als Niveaumenge $N_{f,0}$ für geeignetes f . Dann
- entweder parametrisiere $N_{f,0} \cap U = \text{Graph } g$ explizit (siehe (13)) und untersuche $\tilde{\phi}(\xi) := \phi(\xi, g(\xi))$ (anstelle von ϕ) gemäß (a) und (b),
 - oder wende die Lagrange Multiplikatormethode an, falls ϕ in stetig differenzierbarer Weise fortsetzbar ist auf einer Umgebung von $N_{f,0}$.

Das ergibt Kandidaten für x_{\min} , die in ∂K liegen.

- (c) Beachte, dass bei einer stückweisen Beschreibung von ∂K möglicherweise gewisse Randpunktgruppen nicht erfasst werden. Diese müssen mit den angegebenen Methoden weiter untersucht werden.



- (d) Schließlich vergleiche man die Werte von ϕ an allen Kandidatenstellen, um den kleinsten Wert α zu finden.

Üb Wie lauten die Maxima und Minima der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ auf der halben abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$?

20 Parameterabhängige Integrale

(1) Lemma. Seien X, Y metrische Räume und $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bez. der Maximummetrik. Dann ist für jedes $x \in X$ die Funktion $\varphi(x) : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x)(y) := f(x, y)$, stetig. Ist Y kompakt, dann ist

$$\varphi : X \rightarrow (C(Y), \|\cdot\|_s)$$

stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ fest. Für $y, y_0 \in Y$ gilt $|\varphi(x_0)(y) - \varphi(x_0)(y_0)| = |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0$, weil f stetig in (x_0, y_0) ist. Daher ist $\varphi(x_0)$ stetig in y_0 . — Sei nun Y kompakt und sei (x_n) in X mit $x_n \rightarrow x_0$. Zu zeigen ist

$$\|\varphi(x_n) - \varphi(x_0)\|_s = \sup_{y \in Y} |f(x_n, y) - f(x_0, y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Teilmenge $X_0 := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ von X ist kompakt, was sofort aus (14.2) folgt. Dann ist $X_0 \times Y$ kompakt nach (14.9) und somit $f|_{X_0 \times Y}$ gleichmäßig stetig nach (14.15). Das bedeutet: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $|f(x_n, y) - f(x_0, y)| \leq \epsilon$, falls $d((x_n, y), (x_0, y)) = d(x_n, x_0) < \delta$. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \delta \forall n \geq N$ folgt daher $|f(x_n, y) - f(x_0, y)| \leq \epsilon \forall y \in Y$ und $n \geq N$. Das ist die Behauptung. \square

(2) Satz. Seien X ein metrischer Raum und $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := \int_a^b f(x, y) dy$$

und ist stetig. (Dabei tritt x im Integral als Parameter auf, über den nicht integriert wird.)

Beweis. Gemäß (1) ist $f(x, y) = \varphi(x)(y)$ mit $\varphi(x) \in C[a, b]$. Damit ist $\int_a^b \varphi(x)(y) dy$ definiert und $|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (\varphi(x) - \varphi(x_0))(y) dy \right| \leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\|_s (b - a) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ nach (1). \square

(3) Satz. Seien $D := [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$.

(a) Die folgenden Integrationen sind vertauschbar (Spezialfall des Satzes von Fubini):

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Sei f nach x stetig partiell differenzierbar.

(b) Dann ist F stetig differenzierbar und Integration und Differentiation sind vertauschbar:

$$F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x, y) dy.$$

Beweis. (b) Nach dem MWS existiert ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$ (abhängig von h und y) derart, dass $q := \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - \int_c^d \partial_1 f(x_0, y) dy \right| = \left| \int_c^d \left(\frac{f(x_0+h, y) - f(x_0, y)}{h} - \partial_1 f(x_0, y) \right) dy \right| = \left| \int_c^d (\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(x_0, y)) dy \right|$. Nach (14.15) ist $\partial_1 f$ gleichmäßig stetig auf D . Daraus folgt: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $|\partial_1 f(\xi, y) - \partial_1 f(x_0, y)| \leq \epsilon$ sofern nur $|\xi - x_0| < \delta$. Für $|h| < \delta$ ist daher $|\xi - x_0| < |h| < \delta$ und somit $q \leq \epsilon(d - c)$. Für $h \rightarrow 0$ ergibt dies $F'(x_0) = \int_c^d \partial_1 f(x_0, y) dy$.

(a) Sei $H(x) := \int_c^d \left(\int_a^x f(t, y) dt \right) dy$. Nach (9.22) ist $x \rightarrow \int_a^x f(t, y) dt$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f(x, y)$. Daher ist $H'(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ nach (b). Nach dem HDI (9.24) gilt $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b H'(x) dx = H(b) - H(a) = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, y) dt \right) dy$ nach Definition von H . \square

(4) Beispiel. Die Besselfunktionen

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}$$

sind wichtige spezielle Funktionen aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften. Wir stellen für diese eine Differentialgleichung auf. Sei $y(x) := J_n(x)$. Dann folgt nach (3)(b)

$$y'(x) = - \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \sin t dt, \quad y''(x) = - \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) \sin^2 t dt.$$

Mit Hilfe partieller Integration für $u(t) := \sin(x \sin t - nt)$ und $v'(t) := \sin t$ folgt weiter $y'(x) = - \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) (x \cos t - n) \cos t dt$. Diese Formeln fügt man zusammen. Man erhält $x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) (-x^2 \sin^2 t - x^2 \cos^2 t + nx \cos t + x^2 - n^2) dt = n \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) (x \cos t - n) dt = n \int_0^\pi \frac{d}{dt} \sin(x \sin t - nt) dt = n(\sin(-n\pi) - \sin 0) = 0$.

Zusammengefasst folgt die Bessel Differentialgleichung

$$\boxed{x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0}$$

J_n ist eine Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert $J_n(0) = 0$.

(5) **Leibniz Regel für parameterabhängige Grenzen.** Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\partial_1 f$ existiere und sei stetig. Seien weiter $g, h :]a, b[\rightarrow]c, d[$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_1 f(x, y) dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Beweis. $F :=]a, b[\times]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, u, v) := \int_u^v f(x, y) dy$ ist stetig differenzierbar, weshalb $\frac{d}{dx} F(x, g(x), h(x)) = \partial_1 F(x, g(x), h(x)) + \partial_2 F(x, g(x), h(x))g'(x) + \partial_3 F(x, g(x), h(x))h'(x)$ nach der Kettenregel. Daraus folgt die Behauptung. \square

(6) **Beispiel.** Seien $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

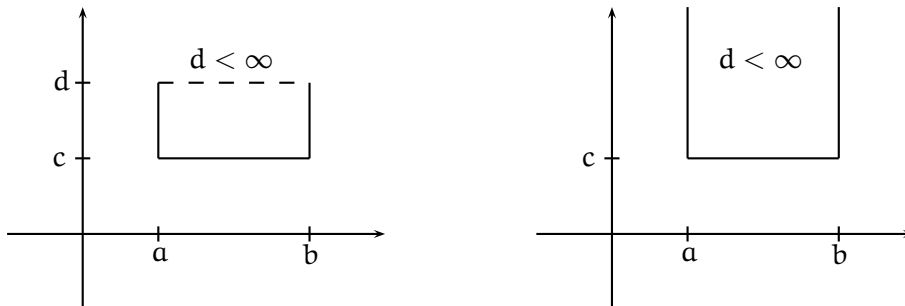
$$x(t) := \frac{1}{\omega} \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du. \quad (*)$$

Für die Ableitung nach der Zeit t folgt $\dot{x}(t) = \frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega(t-t) + \int_0^t f(u) \cos \omega(t-u) du = \int_0^t f(u) \cos \omega(t-u) du$ und damit $\ddot{x}(t) = f(t) \cos \omega(t-t) - \omega \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du = f(t) - \omega \int_0^t f(u) \sin \omega(t-u) du$. Daher ist (*) eine Lösung der **Schwingungsgleichung**

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)}$$

zu den Anfangswerten $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

(7) **Uneigentliches parameterabhängiges Integral.** Seien $D := [a, b] \times [c, d[\subset \mathbb{R}^2$ mit $d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und partiell nach $x \in [a, b]$ differenzierbar.



Weiter seien $g, h: [c, d[\rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$, $h \geq 0$ derart, dass

- (1) die uneigentlichen Integrale $\int_c^d g(y) dy < \infty$ und $\int_c^d h(y) dy < \infty$ existieren und
- (2) $|f(x, y)| \leq g(y)$ und $|\partial_1 f(x, y)| \leq h(y) \forall (x, y) \in D$.

Dann existieren und sind für jedes $x \in [a, b]$

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad F'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x, y) dy.$$

Beweis. Der Beweis ist etwas technisch und wird daher weggelassen. Außerdem werden wir später eine allgemeinere Aussage kennenlernen. \square

(8) **Beispiel. Die Gammafunktion** lautet

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Das Integral ist uneigentlich an der oberen Grenze und, falls $0 < x < 1$, auch an der unteren. Das Kriterium (7) ist anwendbar und liefert

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

$\boxed{\text{Üb}}$ Man beweise (*).

21 Kurvenintegrale

(1) **Kurvenintegral eines skalaren Feldes.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $w([a, b]) \subset D$. Dann heißt

$$\int_w f \|dw\| := \int_a^b f(w(t)) \|w'(t)\| dt$$

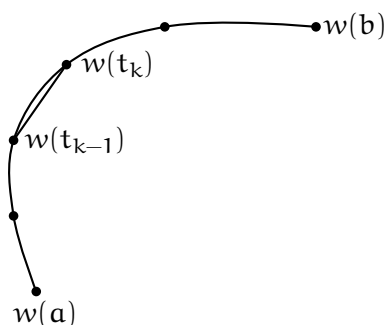
das Kurvenintegral von f längs w . Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n .

(2) **Lemma.** Seien $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation und $u(s) := w(\varphi(s))$ eine neue Parametrisierung. Dann ist

$$\int_u f \|du\| = \int_w f \|dw\|.$$

Beweis. Nach (16.9) ist $\int_u f \|du\| = \int_c^d f(u(s)) \|u'(s)\| ds = \int_c^d (f \circ w)(\varphi(s)) \|w'(\varphi(s)) \varphi'(s)\| ds = \int_c^d (f \circ w)(\varphi(s)) \|w'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds$. Nun ist $|\varphi'| = \eta \varphi'$ mit $\eta \in \{+1, -1\}$, wobei $\eta = +1$ und $\varphi(c) < \varphi(d)$ falls φ orientierungstreu ist, und $\eta = -1$ und $\varphi(c) > \varphi(d)$ andernfalls, siehe (16.8). Gemäß der Substitutionsregel (9.26) folgt daher $\int_u f \|du\| = \eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(w(t)) \|w'(t)\| dt = \int_a^b f(w(t)) \|w'(t)\| dt = \int_w f \|dw\|$. \square

Das Kurvenintegral ist also unabhängig von der C^1 -Parametrisierung (auch falls diese nicht orientierungstreu ist). Zur Interpretation des Kurvenintegrals formen wir es näherungsweise zu folgender Summe um:



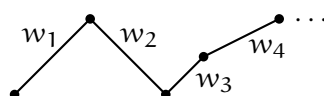
$$\int_w f \|dw\| \sim \sum_k f(w(t_k)) \left\| \frac{w(t_k) - w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| (t_k - t_{k-1}) = \sum_k f(w(t_k)) \|w(t_k) - w(t_{k-1})\|.$$

Jedes Kurvenstückchen zwischen $w(t_{k-1})$ und $w(t_k)$ wird gemäß der Massendichte (oder Ladungsdichte etc.) f mit einer kleinen Masse (oder Ladung etc.) $f(w(t_k)) \|w(t_k) - w(t_{k-1})\|$ belegt. Diese Teilbeträge werden anschließend aufsummiert. Das Ergebnis ist die Gesamtmasse M (oder Ladung etc.), die die Kurve trägt. Der Grenzübergang zu infinitesimalen Kurvenstücken ergibt $M = \int_w f \|dw\|$. Es ist klar, dass diese nicht von der Parametrisierung abhängen kann.

Beispiele. • Der Fall der konstanten Belegung (Gleichverteilung) $f = 1$ ergibt als Spezialfall $\sum_k \|w(t_k) - w(t_{k-1})\| = L(w, Z)$ und somit beim Grenzübergang die Länge der Kurve $L(w) = \int_w \|dw\| = \int_a^b \|w'(t)\| dt$.

- Gegeben sei die Massendichte $\rho(x, y, z) = x^2y^2 + z^2$ auf der Kurve $w : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $w(t) := (2 \cos t, 2 \sin t, \frac{1}{2}t)$, welche eine Schraubenfeder beschreibt. Die Masse M der Feder ist $\int_w \rho \|dw\|$. Die Rechnung bez. der euklidischen Norm ergibt: $\rho(w(t)) = 16 \cos^2 t \sin^2 t + \frac{1}{4}t^2 = 4 \sin^2(2t) + \frac{1}{4}t^2 = 2 \cdot (1 - \cos 4t) + \frac{1}{4}t^2$, $w'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, \frac{1}{2})$, $\|w'(t)\|_2 = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} \implies M = \sqrt{17} (\frac{1}{3}\pi^3 + 2\pi)$.

(3) **Definition.** Ist w stückweise stetig differenzierbar und sind w_i die einzelnen Teile,



dann definiert man

$$\int_w f \|dw\| := \sum_i \int_{w_i} f \|dw_i\|.$$

Offenbar ist das Integral unabhängig von der Zerlegung in stetig differenzierbare Teilkurven. Dies ist die **Additivität** des Kurvenintegrals. — Ebenso offensichtlich gilt die **Linearität** des Kurvenintegrals

$$\int_w (f + \alpha g) \|dw\| = \int_w f \|dw\| + \alpha \int_w g \|dw\|.$$

(4) **Kurvenintegral eines Vektorfeldes.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $w([a, b]) \subset D$. Dann heißt

$$\int_w F \cdot dw := \int_w \langle F, dw \rangle := \int_w F_1 dw_1 + \dots + F_n dw_n := \int_a^b F(w(t)) \cdot w'(t) dt = \int_a^b \langle F(w(t)), w'(t) \rangle dt$$

das Kurvenintegral von F längs w . Dabei bezeichnet \cdot bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n . — Ist w regulär und $t(x)$ der Tangenteneinheitsvektor an w an der Stelle $x \in \text{Spur } w$ (siehe (16.2)), dann ist $F_{\parallel}(x) := \langle F(x), t(x) \rangle$ die Tangentialkomponente von F in x . In diesem Fall ist $\int_w F \cdot dw$ gleich dem Kurvenintegral $\int_w F_{\parallel} \|dw\|$ des Skalarfeldes F_{\parallel} längs w .

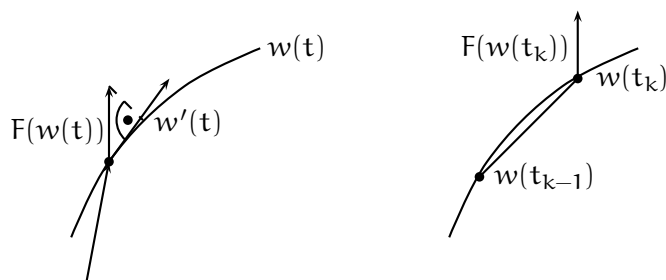
(5) **Lemma.** Sei φ eine C^1 -Parametertransformation und $u = w \circ \varphi$, siehe (2). Dann gilt:

$$\int_u F \cdot du = \pm \int_w F \cdot dw,$$

wobei $+$ gilt, falls $\varphi(c) = a$, d.h. φ orientierungstreu ist, und $-$ falls $\varphi(c) = b$, d.h. φ nicht orientierungstreu ist.

Beweis. Nach Definition, (16.9) und der Substitutionsregel (9.26) ist $\int_u F \cdot du = \int_c^d F(u(s)) \cdot u'(s) ds = \int_c^d (F \circ w)(\varphi(s)) \cdot w'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(w(t)) \cdot w'(t) dt$, woraus die Behauptung folgt. \square

Das ist die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von einer orientierungstreuen C^1 -Parametertransformation. Zur Interpretation des Kurvenintegrals formen wir es näherungsweise zu folgender Summe um:



$$F_{\parallel}(w(t)) = F(w(t)) \cdot \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|} \text{ ist die Komponente von } F(w(t)) \text{ in Richtung } w'(t)$$

$$\int_w F \cdot dw \sim \sum_k \left\langle F(w(t_k)), \frac{w(t_k) - w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\rangle (t_k - t_{k-1}) = \sum_k \langle F(w(t_k)), w(t_k) - w(t_{k-1}) \rangle.$$

Längs jedes Kurvenstückchens zwischen $w(t_{k-1})$ und $w(t_k)$ greift beispielsweise eine Kraft $F(w(t_k))$ an und leistet dabei die Arbeit $\langle F(w(t_k)), w(t_k) - w(t_{k-1}) \rangle$. Diese Teilarbeiten werden aufsummiert. Das Ergebnis ist die von dem Kraftfeld F längs des Weges w geleistete Arbeit A . Der Grenzübergang zu infinitesimalen Kurvenstücken ergibt $A = \int_w F \cdot dw$.

(6) **Bemerkung.** Das Kurvenintegral für Vektorfelder ist offenbar **additiv** und **linear**, vgl. (3).

(7) **Kurvenintegral eines Gradientenfeldes.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D)$ und $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbar mit $w([a, b]) \subset D$. Dann gilt

$$\int_w \text{grad } f \cdot dw = f(\underbrace{w(b)}_{\text{Endpunkt}}) - f(\underbrace{w(a)}_{\text{Anfangspunkt}}).$$

Beweis. Wegen der Additivität genügt es, $w \in C^1[a, b]$ zu betrachten. Denn in der Tat ist

$$\begin{array}{c} w_i(b_i) = w_{i+1}(a_{i+1}) \\ \nearrow \quad \searrow \\ w_i(a_i) \quad w_{i+1}(b_{i+1}) = w_{i+2}(a_{i+2}) \end{array}$$

$\dots f(w_{i+1}(b_{i+1})) - f(w_{i+1}(a_{i+1})) + f(w_i(b_i)) - f(w_i(a_i)) = \dots f(w_{i+1}(b_{i+1})) - f(w_i(a_i)) \dots$ eine Teleskopsumme, bei der sich alle Zwischenterme wegheben. Damit folgt mit der Kettenregel und dem HDI $\int_w \text{grad } f \cdot dw = \int_a^b \langle \text{grad } f(w(t)), w'(t) \rangle dt = \int_a^b (f \circ w)'(t) dt = f \circ w(b) - f \circ w(a)$. \square

(8) **Korollar.** Sei F ein stetiges Gradientenfeld und w eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur in D_F . Dann gilt

$$\int_w F \cdot dw = 0.$$

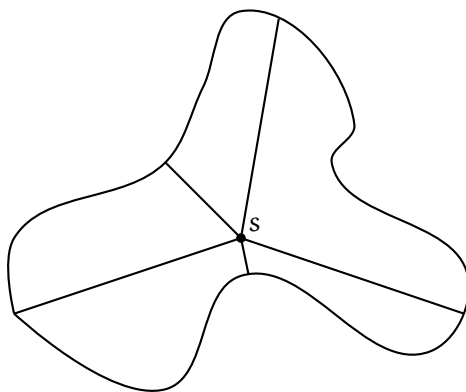
Man schreibt kurz : $\oint F \cdot dw = 0$.

(9) Integrabilitätsbedingung. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Gradientenfeld. Dann gilt $\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \quad \forall x \in D, i, j = 1, \dots, n$, d.h. $J_F(x) = J_F(x)^T, x \in D$.

Man sagt, dass ein differenzierbares Vektorfeld F die **Integrabilitätsbedingung** erfüllt, wenn $J_F(x) = J_F(x)^T, x \in D_F$ gilt.

Beweis. Nach (17.6) gilt: $F = \text{grad } f \implies \partial_i F_j(x) = \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x) = \partial_j F_i(x)$. □

(10) Definition. Seien V ein Vektorraum, $D \subset V$ und $s \in D$. Dann heißt D **sternförmig** bezüglich s , falls alle Verbindungsstrecken $[s; x], x \in D$ in D liegen.



(11) Satz. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Dann ist F ein Gradientenfeld.

Beweis. Für jedes $x \in D$ sei $w_x(t) := s + t(x - s), t \in [0, 1]$, die Verbindungsstrecke von s mit x und $f(x) := \int_0^1 \langle F(w_x(t)), x - s \rangle dt$ das Kurvenintegral von F längs der Verbindungsstrecke. Nach (20.3)(b) darf unter dem Integral differenziert werden. Das ergibt $\partial_i f(x) = \int_0^1 \partial_i \langle F(w_x(t)), x - s \rangle dt$. Es wird jetzt

$$\partial_i \langle F(w_x(t)), x - s \rangle = \frac{d}{dt} (t F_i(w_x(t))) \quad (*)$$

gezeigt, woraus sofort die Behauptung folgt, denn $\partial_i f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_i(w_x(t))) dt = 1 \cdot F_i(w_x(t)) - 0 = F_i(x)$, also $F = \text{grad } f$. Beginnend mit der linken Seite von (*) erhält man

$$\begin{aligned} \partial_i \langle F(w_x(t)), x - s \rangle &= \partial_i \sum_{j=1}^n F_j(w_x(t))(x_j - s_j) = \sum_j \left[\sum_k \partial_k F_j(w_x(t)) t \delta_{ik} (x_j - s_j) + F_j(w_x(t)) \delta_{ij} \right] \\ &= \sum_j t \partial_i F_j(w_x(t))(x_j - s_j) + F_i(w_x(t)) = \sum_j t \partial_j F_i(w_x(t))(x_j - s_j) + F_i(w_x(t)) \\ &= \frac{d}{dt} (t F_i(w_x(t))), \end{aligned}$$

was die rechte Seite von (*) ist. □

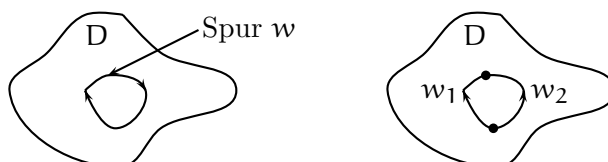
(12) **Bemerkung.** Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist offenbar $\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ genau dann, wenn $\operatorname{rot} F = 0$. Daher folgt aus (9) und (11) für ein stetig differenzierbares Vektorfeld F auf einer offenen und sternförmigen Menge $D \subset \mathbb{R}^3$:

$$F \text{ ist Gradientenfeld} \iff \operatorname{rot} F = 0 \text{ (Integrabilitätsbedingung).}$$

(13) **Definition.** Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und F ein stetiges Vektorfeld auf D . Dann heißt F **konservativ**, falls

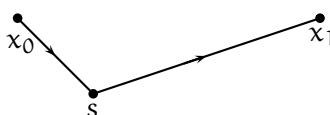
$$\oint F \cdot dw = 0.$$

Letzteres bedeutet, dass $\int_w F \cdot dw = 0$ für alle geschlossenen, stückweise C^1 -Kurven w mit Spur in D oder äquivalent, dass die Kurvenintegrale **wegunabhängig** sind, d.h. $\int_{w_1} F \cdot dw_1 = \int_{w_2} F \cdot dw_2$, sofern w_1 und w_2 in D verlaufen und gleiche Anfangs- und Endpunkte haben.



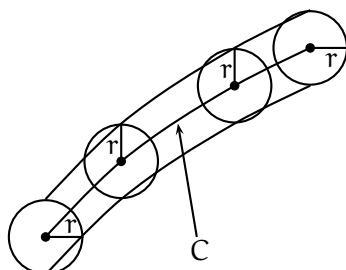
(14) **Definition.** Ein metrischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem Punktepaar x_0, x_1 in X eine Kurve $w : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $w(0) = x_0$ und $w(1) = x_1$.

Offenbar ist eine sternförmige Teilmenge D eines normierten Raums X ein wegzusammenhängender metrischer Raum.



(15) **Lemma.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und seien $x_0, x_1 \in D$. Dann kann w in (14) stückweise stetig differenzierbar (genauer als Polygonzug) gewählt werden.

Beweis. Sei $u : [0, 1] \rightarrow D$ stetig mit $u(0) = x_0$ und $u(1) = x_1$. Setze $C := u([0, 1])$. Es existiert $r > 0$ derart, dass $\tilde{U}_r(x) \subset D \quad \forall x \in C$. Um dies zu zeigen, gehe man vom Gegenteil aus. Für je-



des n existiert dann zu $r = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in C$ und ein $y_n \notin D$ mit $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Da C kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in C$. Dann gilt auch $y_{n_k} \rightarrow x$. Nun ist $y_{n_k} \in \mathbb{R}^n \setminus D$ und $x \in D$. Dies ist ein Widerspruch, da $\mathbb{R}^n \setminus D$ abgeschlossen ist.

Da u gleichmäßig stetig ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\left\| u\left(\frac{j}{N}\right) - u\left(\frac{j-1}{N}\right) \right\| < r$ für $j \in \{1, \dots, N\}$. Der Polygonzug, der $u(0)$, $u\left(\frac{1}{N}\right)$, $u\left(\frac{2}{N}\right)$, \dots , $u(1)$ nacheinander verbindet, liegt in D . \square

(16) Satz. Sei F ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen und wegzusammenhängendem Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$F \text{ ist konservativ} \iff F \text{ ist ein Gradientenfeld.}$$

Beweis. Zur Richtung \Leftarrow siehe (8). Der Wegzusammenhang ist dazu nicht nötig. — Zum Beweis der Richtung \Rightarrow wähle $s \in D$ fest. Man verbinde jedes $x \in D$ mit s durch eine stückweise C^1 -Kurve w (siehe (15)) und setze

$$f(x) := \int_w F \cdot dw.$$

Weil nach Voraussetzung das Integral kurvenunabhängig ist, ist f wohldefiniert. Zu jedem Basisvektor e_i existiert ein $h > 0$ mit $w_h(t) := x + te_i \in D$, $0 \leq t \leq h$. Damit ergibt sich $f(x + he_i) \stackrel{\text{additiv}}{=} \int_w F \cdot dw + \int_{w_h} F \cdot dw_h = f(x) + \int_{w_h} F \cdot dw_h = f(x) + \int_0^h F_i(x + te_i) dt$. Die gleiche Formel erhält man auch für $h < 0$. Differenziert man nun nach h an der Stelle $h = 0$, dann folgt $\partial_i f(x) = F_i(x)$. \square

(17) Bemerkung. Sei F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Betrachte die folgenden möglichen Eigenschaften von F .

- (i) F ist ein Gradientenfeld.
- (ii) F ist konservativ ($\oint F \cdot dw = 0$, Wegunabhängigkeit).
- (iii) $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ (Integrabilitätsbedingung).

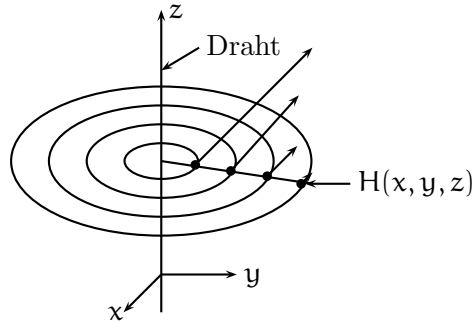
Die vorangegangenen Untersuchungen zeigen die folgenden Zusammenhänge.

- (α) (i) \implies (ii), (iii).
- (β) D ist wegzusammenhängend: (ii) \implies (i).
- (γ) D ist sternförmig: (iii) \implies (i).

In (γ) lässt sich sternförmig allgemeiner durch einfach wegzusammenhängend ersetzen: Eine offene und wegzusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach wegzusammenhängend**, wenn anschaulich gesprochen jede geschlossene und doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne dabei D zu verlassen. Wir verzichten auf eine strenge mathematische Definition dieses Begriffs.

(18) Beispiele.

- (a) Der **Magnetische Wirbel** $H(x, y, z) := \frac{C}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$, $C > 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Ein unendlich langer gerader stromdurchflossener Draht in z -Richtung wird vom magnetischen Feld H umgeben.



Da für das Folgende die z -Komponente unerheblich ist, betrachtet man das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x).$$

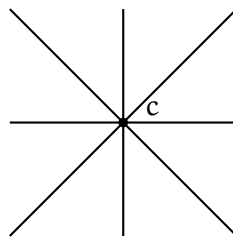
- F erfüllt die Integrabilitätsbedingung $J_F(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 2xy & y^2 - x^2 \\ y^2 - x^2 & -2xy \end{pmatrix} = J_F(x, y)^T$.
- F ist nicht konservativ, denn für die einmal positiv durchlaufene Einheitskreislinie $w: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $w(t) := (\cos t, \sin t)$ ergibt sich

$$\int_w F \cdot dw = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Entsprechend ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach wegzusammenhängend, insbesondere nicht sternförmig. Ist $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ offen und sternförmig, dann ist $F|_D$ nach (11) ein Gradientenfeld.

Üb Berechne ein Potenzial von $F|_D$ für $D := \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \times \{0\}$.

- (b) Das allgemeine **Zentralfeld** $F(x) := \varphi(\|x - c\|_2)(x - c)$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{c\}$ mit $\varphi \in C^2(]0, \infty[)$. Der Vektor c bezeichnet die Lage des Zentrums.

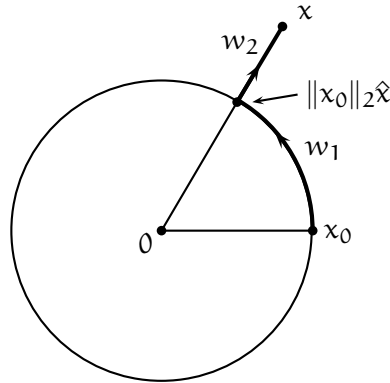


- F erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Sei dazu o.E. $c = 0$. Dann ist

$$J_F(x) = \varphi(\|x\|_2)E_3 + \frac{\varphi'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} x x^T = J_F(x)^T.$$

– Offenbar ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{c\}$ einfach wegzusammenhängend (allerdings nicht sternförmig).

Daher besitzt F –wie in Anschluß an (17) erwähnt– ein Potenzial U . Im Folgenden sei o.E. $c = 0$. Wir berechnen ein Potenzial U mit Hilfe des Kurvenintegrals. Sei $x_0 \neq 0$ fest. Für jedes $x \neq 0$ bezeichne \hat{x} den auf 1 normierten Vektor $\|x\|_2^{-1}x$. Dann sei w_1 eine C^1 -Kurve auf der Oberfläche der Kugel um 0 mit Radius $\|x_0\|_2$, die x_0 mit $\|x_0\|_2\hat{x}$ verbindet (z.B. ein Stück des Großkreises). Weiter sei w_2 die Strecke von $\|x_0\|_2\hat{x}$ nach x . Der aus w_1 und w_2 bestehende Gesamtweg w verbindet x_0 mit x .



Für $\xi(t) := \|w_2(t)\|_2$ gilt $\xi(t)\xi'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \xi(t)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w_2(t) \cdot w_2(t)) = w_2(t) \cdot w_2'(t)$. Weil $F(w_1(t))$ parallel zu $w_1(t)$ ist und $w_1'(t)$ senkrecht dazu steht, ist $F(w_1(t)) \cdot w_1'(t) = 0$. Daher ist $\int_{w_1} F \cdot dw_1 = 0$ und $\int_w F \cdot dw = \int_{w_2} F \cdot dw_2$. Somit erhält man mit der Substitutionsregel

$$\int_w F \cdot dw = \int_0^1 F(w_2(t)) \cdot w_2'(t) dt = \int_0^1 \varphi(\xi(t)) \xi(t)\xi'(t) dt = \int_{\|x_0\|_2}^{\|x\|_2} \xi \varphi(\xi) d\xi.$$

Dies gilt natürlich auch für den nicht gezeichneten Fall $\|x\|_2 < \|x_0\|_2$. Das Ergebnis lautet

$$\boxed{U(x) = - \int_{\|x_0\|_2}^{\|x\|_2} \xi \varphi(\xi) d\xi}$$

Speziell für das Coulomb Potenzial oder das Newton Potenzial $\varphi(\xi) = \frac{\alpha}{\xi^3}$ (siehe das Beispiel nach (17.12)) erhält man

$$U(x) = - \int_{\|x_0\|_2}^{\|x\|_2} \xi \frac{\alpha}{\xi^3} d\xi = \frac{\alpha}{\|x\|_2} - \underbrace{\frac{\alpha}{\|x_0\|_2}}_{\text{Konstante}}.$$

22 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Im Folgenden sei I ein allgemeines Intervall. Das bedeutet, dass das Intervall I nicht einpunktig ist und weder offen oder abgeschlossen noch beschränkt zu sein braucht.

(1) Gewöhnliche Differentialgleichung. Seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{K}$. Dann heißt

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (*)$$

eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung. Eine Lösung von $(*)$ ist eine auf einem Intervall I definierte n -mal differenzierbare Funktion

$$x : I \rightarrow \mathbb{K} \quad (**)$$

derart, dass für $t \in I$ gilt $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in D$ und $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$.

Ist $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ vorgegeben, dann löst x aus $(**)$ die zugehörige **Anfangswertaufgabe** (AWA), falls

$$t_0 \in I, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \quad (***)$$

In Hinblick auf die folgenden theoretischen Untersuchungen ist es bequem, $(*)$ in ein äquivalentes System erster Ordnung umzuschreiben. Mit $y_1 := x$, $y_2 := x'$, \dots , $y_n := x^{(n-1)}$, $y_0 := (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ folgt

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

oder kurz

$$y' = F(t, y), \quad \text{wobei} \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Die AWA lautet $y' = F(t, y)$ mit $y(t_0) = y_0$. Das führt zu der folgenden allgemeinen Definition. (Wir schreiben wieder f statt F .)

(2) Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \quad (*)$$

ein explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Eine Lösung von (*) ist eine auf einem Intervall I definierte differenzierbare Funktion

$$\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{K}^n \quad (**)$$

derart, dass für alle $t \in I$ gilt $(t, \mathbf{y}(t)) \in D$ und $\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t))$. Ist $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ vorgegeben, dann löst \mathbf{y} aus (**) die zugehörige AWA, falls zusätzlich

$$t_0 \in I, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (***)$$

(3) Beispiele zur AWA.

(a) Hängt f nicht von \mathbf{y} ab, d.h. $\mathbf{y}' = f(t)$, und ist f stetig auf einem Intervall, dann löst

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

die AWA eindeutig.

(b) Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(\eta) := -1$ für $\eta > 0$ und $f(0) := 1$. Dann hat die AWA $\mathbf{y}' = f(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = 0$ keine Lösung.

Beweis. Angenommen \mathbf{y} löst die AWA auf einem Intervall I mit $0 \in I$. Gemäss dem MWS ist $\mathbf{y}'(\tau) = \frac{\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}(0)}{\tau - 0} = \frac{\mathbf{y}(\tau)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \mathbf{y}'(0) = f(\mathbf{y}(0)) = f(0) = 1$ und somit $\mathbf{y}'(\tau) > 0$ für alle $\tau > 0$ hinreichend klein. Weil deshalb $\mathbf{y}'(\tau) = f(\mathbf{y}(\tau)) > 0$, folgt $\mathbf{y}(\tau) > 0$ für alle τ hinreichend klein. Damit ist aber $\mathbf{y}'(\tau) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. \square

(c) Die AWA $\mathbf{y}' = \sqrt{|\mathbf{y}|}$, $\mathbf{y}(0) = 0$ hat mehrere Lösungen, z.B. die Nullfunktion $\mathbf{y} = 0$ oder die Funktion $\mathbf{y}(t) := \frac{1}{4}t^2$ für $t > 0$ und $\mathbf{y}(t) := 0$ für $t \leq 0$.

Einfache Voraussetzungen an f werden die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der AWA garantieren.

(4) Lemma. Seien $k \in \mathbb{N}_0$, D offen, $f \in C^k(D, \mathbb{K}^n)$ und \mathbf{y} eine Lösung von (2)(*). Dann ist $\mathbf{y} \in C^{k+1}(I, \mathbb{K}^n)$.

Beweis. Sei $k = 0$, d.h. f stetig. Dann ist \mathbf{y}' stetig wegen $\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t))$. Also ist \mathbf{y} stetig differenzierbar. Ist f stetig differenzierbar, dann ist $t \mapsto f(t, \mathbf{y}(t))$ stetig differenzierbar nach der Kettenregel. Also ist \mathbf{y}' stetig differenzierbar, d.h. \mathbf{y} ist zweimal stetig differenzierbar, usw. \square

Drei einfache Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung

Ehe wir uns der allgemeinen Theorie zuwenden, betrachten wir drei spezielle Situationen, die sich weitgehend explizit behandeln lassen.

(5) Trennbare Differentialgleichungen. Seien $D_h, D_g \subset \mathbb{R}$ offen und $h : D_h \rightarrow \mathbb{K}$, $g : D_g \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Die Differentialgleichung lautet

$$y' = h(t)g(y).$$

Zu lösen ist die zugehörige AWA $y(t_0) = y_0$ zu vorgegebenen $t_0 \in D_h$ und $y_0 \in D_g$. Zur Lösung sind zwei prinzipiell verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Fall 1 $g(y_0) = 0$. Dann ist die konstante Funktion $y = y_0$ eine Lösung der AWA für alle $t \in D_h$.

Fall 2 $g(y_0) \neq 0$. Dann liegt y_0 in der offenen Menge $\{y \in D_g : g(y) \neq 0\}$ und die Variablen können in einer Umgebung von y_0 **getrennt** werden, womit $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$ gemeint ist. Man beachte auch, dass es üblich ist, je nach Zusammenhang mit y eine Funktion von t oder eine unabhängige reelle Variable zu bezeichnen.

Durch Integration erhält man die Stammfunktion $K(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\eta)} d\eta$ von $\frac{1}{g}$ mit $K(y_0) = 0$ und die Stammfunktion $H(t) := \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$ von h mit $H(t_0) = 0$. Dafür gelten $\frac{d}{dt}K(y(t)) = K'(y(t))y'(t) = \frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$, $\frac{d}{dt}H(t) = h(t)$ und $K(y(t_0)) = K(y_0) = 0$, $H(t_0) = 0$. Daher ist

$$K(y(t)) = H(t) \quad (*)$$

eine implizite Lösung der AWA im Fall 2. Da $K'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$, läßt sich (*) (zumindest im Prinzip) nach $y(t)$ auflösen. Bezeichnet J die lokale Inverse von K , d.h. $J(K(y)) = y$ in einer Umgebung in D_g von y_0 , dann ist

$$y(t) = J(H(t))$$

für t in einer Intervallumgebung in D_h von t_0 . Die Funktion y ist eine Lösung der AWA.

(6) Beispiele. (a) Die Logistische Differentialgleichung

$$y' = (a - by)y, \quad a, b > 0.$$

Hier sind $D_h, D_g = \mathbb{R}$ mit $h = 1$ konstant und $g(y) = (a - by)y$. Die Nullstellen von g sind 0 und $\frac{a}{b}$. Zur Lösung der zugehörigen AWA mit $y(t_0) = y_0$ gehen wir wie in (5) vor.

Fall 1 $g(y_0) = 0$. Dann ist $y_0 \in \{0, \frac{a}{b}\}$ und die konstante Funktion $y = y_0$ löst die AWA.

Fall 2 $g(y_0) \neq 0$, d.h. $y_0 \notin \{0, \frac{a}{b}\}$. Die Trennung der Variablen ergibt $\frac{y'}{y(a-by)} = 1$. Mit Hilfe der PBZ $\frac{1}{y(a-by)} = \frac{1}{a}(\frac{1}{y} + \frac{b}{a-by})$ folgt $K(y) = \int \frac{dy}{y(a-by)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{y}{a-by} \right| + \text{Konstante}$. Weiter ist $H(t) = \int 1 dt = t + \text{Konstante}$. Damit ist $K(y(t)) = H(t)$, d.h. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{y(t)}{a-by(t)} \right| = t + \text{Konstante}$. Für t aus einer Umgebung von t_0 ist aus Stetigkeitsgründen $y(t) \notin \{0, \frac{a}{b}\}$, weil $y(t_0) \notin \{0, \frac{a}{b}\}$. Somit hat $\frac{y(t)}{a-by(t)}$ für diese t einheitliches Vorzeichen. Es folgt $\frac{y(t)}{a-by(t)} = k'e^{at}$ mit einer Konstanten $k' \neq 0$ und schließlich

$$y(t) = \frac{a}{b + ke^{-at}} \quad \text{mit } k := \left(\frac{a}{y_0} - b \right) e^{at_0} \text{ für alle } t \in I_0. \quad (*)$$

Dabei ist I_0 das **maximale Definitionsintervall**, welches von den Anfangswerten abhängt. Falls $k > 0$ ist, d.h. $0 < y_0 < \frac{a}{b}$, ist $I_0 = \mathbb{R}$. Falls $k = 0$ ist, d.h. $y_0 = \frac{a}{b}$, liegt die konstante Lösung $y = \frac{a}{b}$ vor, welche bereits im Fall 1 auftritt. Falls $k < 0$, d.h. $y_0 < 0$ oder $y_0 > \frac{a}{b}$ ist, hat der Nenner eine Nullstelle bei $t = t_c := \frac{1}{a} \ln(\frac{-k}{b})$. Deshalb ist das maximale Lösungsintervall entweder gleich $] -\infty, t_c[$ oder gleich $]t_c, \infty[$. Welcher der beiden Fälle vorliegt, hängt davon ab, ob $t_0 \in] -\infty, t_c[$ oder $t_0 \in]t_c, \infty[$. Falls $y_0 < 0$ ist $t_c = t_0 + \frac{1}{a} \ln(1 + \frac{a}{|y_0|b}) > t_0$ und somit $I_0 =] -\infty, t_c[$. Falls $y_0 > \frac{a}{b}$ ist $t_c = t_0 + \frac{1}{a} \ln(1 - \frac{a}{y_0 b}) < t_0$ und somit $I_0 =]t_c, \infty[$. Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned} (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times] -\infty, 0[&\Rightarrow I_0 =] -\infty, t_c[, \\ (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{a}{b}] &\Rightarrow I_0 = \mathbb{R}, \\ (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times]\frac{a}{b}, \infty[&\Rightarrow I_0 =]t_c, \infty[, \end{aligned}$$

wobei im Fall $y_0 \notin \{0, \frac{a}{b}\}$ die Lösung y durch (*) gegeben ist.

(b) Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1 - y^2}{t}$$

ist trennbar mit $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$ und $h(t) = \frac{1}{t}$, $g(y) = 1 - y^2$. Die Nullstellen von g sind 1 und -1.

Fall 1 $g(y_0) = 0$. Dann ist $y_0 \in \{-1, 1\}$ und die konstante Funktion $y = y_0$ löst die AWA.

Fall 2 $g(y_0) \neq 0$, d.h. $y_0 \notin \{-1, 1\}$. Die Trennung der Variablen ergibt $\frac{y'(t)}{1-y(t)^2} = \frac{1}{t}$. Damit sind $K(y) = \int \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + \text{Konstante}$ und $H(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + \text{Konstante}$. Gleichsetzen liefert $\ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \ln t^2 + \text{Konstante}$. Wie im vorangegangenen Beispiel folgt $\frac{1+y}{1-y} = kt^2$ mit einer Konstanten $k \neq 0$ und schließlich

$$y(t) = \frac{kt^2 - 1}{kt^2 + 1} \quad \text{mit } k = \frac{1 + y_0}{1 - y_0} t_0^{-2} \quad \text{für alle } t \in I_0. \quad (*)$$

Dabei ist I_0 das maximale Definitionsintervall, welches von den Anfangswerten abhängt:

$$\begin{aligned} y_0 \in] -1, 1[, t_0 > 0 &\Rightarrow I_0 =]0, \infty[, \\ y_0 \in] -1, 1[, t_0 < 0 &\Rightarrow I_0 =] -\infty, 0[, \\ y_0 \notin] -1, 1[, t_0 > 0 &\Rightarrow I_0 = \left] t_0 \sqrt{\frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}}, \infty \right[, \\ y_0 \notin] -1, 1[, t_0 < 0 &\Rightarrow I_0 = \left] -\infty, t_0 \sqrt{\frac{y_0 - 1}{y_0 + 1}} \right[. \end{aligned}$$

Zur Begründung überlegt man sich, dass I_0 durch die folgenden Bedingungen bestimmt wird:

(α) $t_0 \in I_0 \subset D_h =] -\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Demnach ist $I_0 \subset]0, \infty[$, falls $t_0 > 0$ und $I_0 \subset] -\infty, 0[$, falls $t_0 < 0$.

(β) $kt^2 + 1 \neq 0 \forall t \in I_0$.

Für $|y_0| < 1$ ist $k > 0$ und es folgt keine Einschränkung aus (β). Für $|y_0| > 1$ ist $k < 0$, weshalb $t \in I_0$ die Bedingung $t^2 \neq -\frac{1}{k} = t_0^2 \frac{y_0 - 1}{y_0 + 1} > 0$ erfüllen muss.

(7) Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Seien $D_a, D_b \subset \mathbb{R}$ offen, a, b stetig und $t_0 \in D_a \cap D_b$. Mit $y_0 \in \mathbb{K}$ lautet die AWA

$$y' + a(t)y = b(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Dabei heißt a die **Koeffizientenfunktion** und b die Störfunktion oder der **inhomogene Anteil**. Man löst zunächst die **homogene** Gleichung $y' + a(t)y = 0$ durch Trennung der Variablen und erhält

$$y_h(t) = y_0 e^{-A(t)},$$

wobei $A(t) := \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ die Stammfunktion von a mit $A(t_0) = 0$ ist. Mit der Methode der Variation der Konstanten findet man dann schließlich die Lösung der AWA

$$y(t) = y_h(t) + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds.$$

Üb Man verifiziere, dass y eine Lösung der AWA ist.

(8) Homogene Differentialgleichungen. Sei k stetig auf der offenen Menge $D_k \subset \mathbb{R}$ und

$$y' = k\left(\frac{y}{t}\right), \quad t \neq 0.$$

Die Substitution $v(t) := \frac{y(t)}{t}$ liefert: $y(t) = tv(t) \implies y'(t) = v(t) + tv'(t) \implies v' = \frac{1}{t}(k(v) - v)$. Diese Differentialgleichung ist trennbar.

Üb Löse die AWA $y' = \frac{y^2+t^2}{ty}$, $y(1) = 1$ und bestimme das maximale Definitionsintervall.

Das nächste Ziel ist der Satz von Picard-Lindelöf.

(9) Lemma. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig auf dem Intervall I . Dann ist y genau dann eine Lösung der AWA $y' = f(t, y)$ mit $y(t_0) = y_0$, wenn $(t, y(t)) \in D$ und $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ für alle $t \in I$. Vergleiche (19.2)(b).

Beweis. Da die Abbildung $t \mapsto f(t, y(t))$ stetig ist, ist eine Stammfunktion davon stetig differenzierbar. Man wende nun den HDI an. \square

(10) Definition. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Die Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz stetig bzgl. y in D mit Lipschitz Konstante L , falls

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_\infty \leq L \|y_1 - y_2\|_\infty \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in D.$$

Dabei ist $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm im \mathbb{R}^n .

(11) Lemma. Seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $w: X \rightarrow]0, \infty[$ stetig, $y \in C(X, \mathbb{R}^n)$ und

$$\|y\|_w := \|wy\|_s = \sup_{t \in X} w(t) \|y(t)\|_\infty.$$

Dann ist $\|\cdot\|_w$ eine Norm auf $C(X, \mathbb{R}^n)$ und $(C(X, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_w)$ ist vollständig, d.h. ein Banachraum.

Beweis. Weil X kompakt ist und $w\mathbf{y}$ stetig ist, ist $w\mathbf{y}$ beschränkt. Somit ist $\|\mathbf{y}\|_w < \infty$ wohldefiniert. Weil $\|\cdot\|_s$ eine Norm auf $C(X, \mathbb{R}^n)$ ist, ist auch $\|\cdot\|_w$ eine Norm darauf. Das überprüft man leicht. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum (14.11) existieren $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit $\alpha \leq w(t) \leq \beta \forall t \in X$, weshalb

$$\alpha\|\mathbf{y}\|_s \leq \|\mathbf{y}\|_w \leq \beta\|\mathbf{y}\|_s.$$

Wegen (14.16) bleibt zu zeigen, dass $(C(X, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_s)$ ein Banachraum ist. Dazu identifizieren wir $C(X, \mathbb{R}^n)$ und $C(X', \mathbb{R})$ mit $X' := \{1, \dots, n\} \times X$, indem wir $\mathbf{y}(i, t)$ statt $y_i(t)$ schreiben. Nach (14.9) ist X' kompakt. Daher folgt aus (14.11), dass $C(X', \mathbb{R}) \subset B(X', \mathbb{R})$. Weil der gleichmäßige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen stetig ist (was man wie in (9.8) zeigt), ist $(C(X', \mathbb{R}), \|\cdot\|_s)$ ein abgeschlossener Unterraum von $B(X', \mathbb{R}), \|\cdot\|_s$. Damit ist $(C(X', \mathbb{R}), \|\cdot\|_s)$ selbst ein Banachraum nach (10.5) und (13.25)(ii). \square

(12) Satz von Picard-Lindelöf. Seien I ein kompaktes Intervall, $D := I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. \mathbf{y} Lipschitz stetig. Dann hat die AWA in (2) genau eine auf I definierte Lösung.

Beweis. Sei $T : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$, $(T\mathbf{y})(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathbf{y}(s)) ds$, $t \in I$. Nach (9) löst $\mathbf{y} \in C(I, \mathbb{R}^n)$ die AWA genau dann, wenn $T\mathbf{y} = \mathbf{y}$, d.h. wenn \mathbf{y} ein Fixpunkt von T ist. Weiter sei L die Lipschitz Konstante für f aus (10) und $w : I \rightarrow \mathbb{R}$, $w(t) := e^{-2L|t-t_0|} > 0 \forall t$. Dann gilt für $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ und $t \in I$:

$$\begin{aligned} \|(T\mathbf{y}_1)(t) - (T\mathbf{y}_2)(t)\|_\infty &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \mathbf{y}_1(s)) - f(s, \mathbf{y}_2(s))) ds \right\|_\infty \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \mathbf{y}_1(s)) - f(s, \mathbf{y}_2(s))\|_\infty ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L\|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\|_\infty ds \right| = \left| \int_{t_0}^t \frac{L}{w(s)} (w(s)\|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\|_\infty) ds \right| \\ &\stackrel{(11)}{\leq} L\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_w \cdot \underbrace{\left| \int_{t_0}^t e^{2L|s-t_0|} ds \right|}_{=\frac{1}{2L}(e^{2L|t-t_0|}-1)} \leq \frac{1}{2} \underbrace{e^{2L|t-t_0|}}_{=\frac{1}{w(t)}} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_w. \end{aligned}$$

Das beweist $\|T\mathbf{y}_1 - T\mathbf{y}_2\|_w \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_w$. Also ist T eine Kontraktion auf $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_w)$. Dieser ist nach (11) ein Banachraum. Die Behauptung folgt aus dem Fixpunktsatz (19.4). \square

Das folgende einfache Beispiel (13) mit auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definierter, stetig differenzierbarer rechter Seite f zeigt, dass es keine Lösung der AWA auf einem vorgegebenen Intervall zu geben braucht, wenn die Voraussetzung in (12) der Lipschitzstetigkeit von f bez. \mathbf{y} nicht gegeben ist. Diesem Problem wird die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf (17) gerecht.

(13) Beispiel. Wir lösen die AWA $y' = y^2$, $y(t_0) = y_0$. Für $y_0 = 0$ finden wir die Nulllösung, die auf ganz \mathbb{R} existiert und hier nicht weiter interessiert. — Sei nun $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ergibt die Trennung der Variablen $\frac{y'}{y^2} = 1$, $\int_{y_0}^y \frac{1}{\eta^2} d\eta = \frac{1}{\eta} \Big|_{y_0}^y = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}$, $\int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0$ und somit $-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = t - t_0$. Die eindeutige Lösung der AWA ist also

$$y(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{1}{y_0} - t}$$

mit dem maximalen Lösungsintervall $I_0 =]-\infty, t_0 + \frac{1}{y_0}[$ für $y_0 > 0$ und $I_0 =]t_0 + \frac{1}{y_0}, \infty[$ für $y_0 < 0$. Das bedeutet, dass es **keine** Lösung auf einem kompakten Intervall I gibt, welches t_0 und $t_0 + \frac{1}{y_0}$ enthält, wie z.B. $(t_0, y_0) = (0, 1)$ und $I = [0, 1]$. In der Tat ist (12) nicht auf $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, y) = y^2$ mit $D = I \times \mathbb{R}$ anwendbar, denn f ist nicht Lipschitz stetig bez. y :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = \underbrace{|y_1 + y_2|}_{\text{beliebig groß}} |y_1 - y_2|.$$

(14) Definition. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ heißt **lokal Lipschitz stetig** bez. y , falls es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung U_0 gibt, so dass $f|_{D \cap U_0}$ Lipschitz stetig bez. y ist, d.h. dass

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_\infty \leq L_0 \|y_1 - y_2\|_\infty \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in D \cap U_0$$

für ein geeignetes (von (t_0, y_0) abhängiges) $L_0 < \infty$ gilt.

Für $a \in \mathbb{R}^m$ und $r > 0$ bezeichne wie üblich $\tilde{U}_r(a)$ die abgeschlossenen Kugel um a mit Radius r . Wir benutzen wie bisher die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf \mathbb{R}^m .

(15) Lemma. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass $\partial_y f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert und stetig ist. Dann ist f bez. y lokal Lipschitz stetig.

Beweis. Sei $(t_0, y_0) \in D$. Weil D offen ist, existiert $r > 0$ derart, dass $U_0 := \tilde{U}_r(t_0, y_0) \subset D$. Aus (18.3) folgt $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_\infty \leq L_0 \|y_1 - y_2\|_\infty \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in U_0$ mit $L_0 := n \max_{(t, y) \in U_0} \|\partial_y f(t, y)\|_\infty$. Dabei ist $L_0 < \infty$, da A kompakt ist. \square

Die Eigenschaft der lokalen Lipschitz Stetigkeit erweist sich als hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit der AWA.

(16) Lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf. Seien $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $D := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \tilde{U}_r(y_0)$ mit $\alpha, r > 0$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bez. y Lipschitz stetig. Weiter seien $M := \max_{(t, y) \in D} \|f(t, y)\|_\infty$ und $\delta := \min\{\alpha, \frac{r}{M}\}$ falls $M \neq 0$ und $\delta = \alpha$ falls $M = 0$. Dann hat die AWA in (2) auf $I := [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine eindeutige Lösung.

Beweis. Sei $Y := \{y \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|y(s) - y_0\|_\infty \leq r \quad \forall s \in I\}$ die abgeschlossene Kugel in $C(I, \mathbb{R}^n)$ bez. der Supremumsnorm mit Radius r und der konstanten Funktion y_0 als Mittelpunkt. Nach (13.25)(ii) ist Y ein vollständiger metrischer Raum, weil $C(I, \mathbb{R}^n)$ nach (11) vollständig ist. Für T aus (12) und $y \in Y$ gilt nun $\|(Ty)(t) - y_0\|_\infty \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\|_\infty ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq r \quad \forall t \in I$. Also ist $T(Y) \subset Y$. Damit folgt die Behauptung wie im Beweis zu (12). \square

(17) Korollar. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bez. y lokal Lipschitz stetig. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein $\delta > 0$ derart, dass die AWA in (2) auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ genau eine Lösung hat.

Beweis. Wende (16) mit hinreichend kleinen $\alpha, r > 0$ an. \square

Die Frage, die sich jetzt stellt, ist die nach der Fortsetzbarkeit einer lokalen Lösung.

(18) Lemma. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bez. \mathbf{y} lokal Lipschitz stetig. Dann hat die AWA in (2) für jedes kompakte Intervall $H = [a, b]$ mit $t_0 \in H$ höchstens eine Lösung auf H .

Beweis. Seien $\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}} : H \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der AWA. Setze $t_1 := \sup\{t \in H : \mathbf{y}|_{[t_0, t]} = \tilde{\mathbf{y}}|_{[t_0, t]}\}$. Dann ist $t_1 \geq t_0$ und $\mathbf{y}(t_1) = \tilde{\mathbf{y}}(t_1) =: \mathbf{w}_1$, weil \mathbf{y} und $\tilde{\mathbf{y}}$ stetig sind. Angenommen $t_1 < b$. Dann hat die AWA

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{w}_1 \quad (*)$$

auf $[t_0, b]$ zwei verschiedene Lösungen. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ sei w die eindeutige Lösung der AWA (*) auf $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ nach (17). Betrachte nun z auf $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$ mit

$$z|_{[t_1 - \delta, t_1]} := w|_{[t_1 - \delta, t_1]}, \quad \text{und} \quad z|_{[t_1, t_1 + \delta]} := \begin{cases} \mathbf{y}|_{[t_1, t_1 + \delta]} \\ \text{oder} \\ \tilde{\mathbf{y}}|_{[t_1, t_1 + \delta]}. \end{cases}$$

Wegen $\mathbf{w}_1 = w(t_1) = \mathbf{y}(t_1) = \tilde{\mathbf{y}}(t_1)$ ist z wohldefiniert und stetig. Wegen $f(t_1, \mathbf{w}_1) = w'(t_1) = \mathbf{y}'(t_1) = \tilde{\mathbf{y}}'(t_1)$, liefert z zwei verschiedene Lösungen der AWA (*). Dies ist ein Widerspruch zu (17). Damit ist $\mathbf{y}|_{[t_0, b]} = \tilde{\mathbf{y}}|_{[t_0, b]}$. — Ebenso folgt $\mathbf{y}|_{[a, t_0]} = \tilde{\mathbf{y}}|_{[a, t_0]}$. \square

(19) Satz vom maximalen Lösungsintervall. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bez. \mathbf{y} lokal Lipschitz stetig. Dann existiert zu jedem $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ ein offenes Intervall I_0 mit $t_0 \in I_0$ und eine Lösung $\mathbf{y} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ der AWA in (2) derart, dass für jedes Intervall J mit $t_0 \in J$ und jeder Lösung z der AWA auf J folgt:

- $J \subset I_0$
- $z = \mathbf{y}|_J$.

I_0 heißt **maximales Lösungsintervall** der AWA.

Beweis. Wegen (17) sind $t_1 := \inf\{t : t < t_0, \exists \text{ Lösung } \mathbf{y}_t \text{ der AWA auf } [t, t_0]\}$ und $t_2 := \sup\{t : t > t_0, \exists \text{ Lösung } \mathbf{y}_t \text{ der AWA auf } [t_0, t]\}$ definiert, wobei $t_1 = -\infty$ oder $t_2 = +\infty$ sein kann. Seien $I_0 :=]t_1, t_2[$ und $\mathbf{y} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(t) := \mathbf{y}_t(t)$ für $t \neq t_0$ und $\mathbf{y}(t_0) := \mathbf{y}_0$.

Für s echt zwischen t und t_0 gilt $\mathbf{y}_s(s) = \mathbf{y}_t(s)$ nach (18), weshalb $\mathbf{y}(s) = \mathbf{y}_t(s)$. Offensichtlich gilt dies auch für $s = t$ und $s = t_0$. Nach (9) ist daher

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_t(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathbf{y}_t(s)) ds = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathbf{y}(s)) ds \quad \forall t \in I_0,$$

weshalb \mathbf{y} eine Lösung der AWA auf I_0 ist.

Sei nun z eine Lösung der AWA auf J . Dann ergibt z eine Lösung der AWA auf $[t_0, t]$ bzw. auf $[t, t_0]$ für jedes $t \in J$. Daher ist $t \in I_0$ für $t \in J$, und aus (18) folgt $z(t) = \mathbf{y}(t)$. \square

Die folgenden Beispiele sollen das Verhalten der Bahn der maximalen Lösung illustrieren.

(20) Beispiele.

- (a) AWA $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \implies I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $y(t) = \tan t$.
- (b) AWA $y' = y^2$, $y(0) = 1$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \implies I_0 =]-\infty, 1[$, $y(t) = \frac{1}{1-t}$.
- (c) AWA $y' = y^2 - 1$, $y(0) = 0$, $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \implies I_0 = \mathbb{R}$, $y(t) = \tanh t$.
- (d) AWA $y' = \frac{1}{y}$, $y(0) = 1$, $D = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \implies I_0 =]-\frac{1}{2}, \infty[$, $y(t) = \sqrt{2t+1}$.

Man erkennt drei Möglichkeiten des Verhaltens der Lösungen für $t < t_0$ (analog für $t > t_0$):

- (1) $y(t)$ existiert $\forall t < t_0$ (siehe (b) und (c)).
- (2) $\exists a \in]-\infty, t_0[$ mit $\lim_{t \rightarrow a, t > a} \|y(t)\|_\infty = \infty$ (siehe (a)).
- (3) $\exists a \in]-\infty, t_0[$ mit $\lim_{t \rightarrow a, t > a} d((t, y(t)), \partial D) = 0$ (siehe (d)).

Was ist den drei Fällen gemein?

(21) Satz. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. y lokal Lipschitz stetig und $y : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Lösung der AWA auf dem maximalen Lösungsintervall I_0 . Dann ist weder die **Vorwärtsbahn** $\{(t, y(t)) : t \in I_0, t \geq t_0\}$ noch die **Rückwärtsbahn** $\{(t, y(t)) : t \in I_0, t \leq t_0\}$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten. Kurz gesagt, der Graph der maximalen Lösung der AWA erstreckt sich in beiden Richtungen stets bis zum Rand von D bzw. bis ins Unendliche.

Beweis. Sei $I_0 =]a, b[$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Angenommen es existiert ein kompaktes $K \subset D$ mit $(t, y(t)) \in K \forall t \in I_0, t \geq t_0$. Weil K insbesondere beschränkt ist, folgt $b < \infty$. Außerdem ist $M := \max_{(t, \eta) \in K} \|f(t, \eta)\|_\infty < \infty$, weil f stetig auf dem Kompaktum K ist. Für alle $t_1, t_2 \in [t_0, b[$ folgt daraus mit (9)

$$\|y(t_1) - y(t_2)\|_\infty = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) ds \right\|_\infty \leq M|t_2 - t_1|. \quad (*)$$

Damit existiert $y_b := \lim y(t)$ für $t \rightarrow b, t < b$, denn für jede Folge (t_k) in $[t_0, b[$ mit $t_k \rightarrow b$ ist $(y(t_k))_k$ wegen (*) eine CF. Sei $\tilde{y}(t) := y(t)$ für $t \in [t_0, b[$ und $\tilde{y}(b) := y_b$. Dann ist \tilde{y} stetig und löst die Integralgleichung $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ auf $[t_0, b]$ und damit auch die AWA. Dies widerspricht jedoch der Maximalität von I_0 . \square

Als nächstes soll die Abhängigkeit der Lösung von dem Anfangswert untersucht werden.

(22) Lemma. Seien $t_0 < t_1$, $I := [t_0, t_1]$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig derart, dass

$$\varphi(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \quad \forall t \in I.$$

Dann ist $\varphi(t) \leq a e^{b(t-t_0)} \forall t \in I$.

Beweis. Sei $\eta > 0$. Setze $\alpha_\eta := \alpha + \eta$ und $\omega_\eta(t) := \alpha_\eta e^{b(t-t_0)}$. Dann ist $\omega_\eta(t) = \alpha_\eta + b \int_{t_0}^t \omega_\eta(s) ds$, wie man leicht nachrechnet, und

$$\varphi(t) < \alpha_\eta + b \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \quad \forall t \in I \text{ und } \varphi(t_0) < \omega_\eta(t_0).$$

Für $T := \sup\{t \in I : \varphi(s) < \omega_\eta(s) \quad \forall s \leq t\}$ gilt dann $\varphi(T) < \alpha_\eta + b \int_{t_0}^T \varphi(s) ds \leq \alpha_\eta + b \int_{t_0}^T \omega_\eta(s) ds = \omega_\eta(T)$, weil $b \geq 0$ und $\varphi(s) \leq \omega_\eta(s) \quad \forall s \in [t_0, T]$. Es folgt $T = t_1$, denn sonst wäre $\varphi(t) < \omega_\eta(t)$ in $[T, T + \epsilon]$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ wegen der Stetigkeit von φ und ω_η , was ein Widerspruch zur Definition von T wäre. Also ist $\varphi(t) < \omega_\eta(t) = (\alpha + \eta)e^{b(t-t_0)} \quad \forall t \in I$. Dies gilt für jedes $\eta > 0$. Daraus folgt die Behauptung. \square

(23) Abhängigkeit der Lösung der AWA von den Anfangswerten. Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und bzgl. y Lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante L . Seien $y, z : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen von

$$y' = f(t, y)$$

mit den Anfangswerten $y(t_0) = y_0$ und $z(t_0) = z_0$. Dann gilt

$$\|y(t) - z(t)\|_\infty \leq \|y_0 - z_0\|_\infty e^{L(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Beweis. Mit der üblichen Abschätzung unter Verwendung der Integraldarstellung (9) folgt $\|y(t) - z(t)\|_\infty \leq \|y_0 - z_0\|_\infty + L \int_{t_0}^t \|y(s) - z(s)\|_\infty ds$. Mit $\alpha := \|y_0 - z_0\|_\infty$, $b := L$ und $\varphi(t) := \|y(t) - z(t)\|_\infty$ folgt aus (22) die Behauptung. \square

Zeitabhängige lineare Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten abschließend speziell die AWA

$$y' = A(t)y + b(t) \quad \text{mit} \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad b(t) \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

Wenn $b = 0$ ist, heißt das System **homogen**, sonst inhomogen. Der Fall, dass A nicht von t abhängt, wurde in Kapitel 15 behandelt. Meist wird t als die Zeitvariable angesehen.

(24) Satz. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat die AWA (*) eine eindeutige Lösung auf I . Sie ist stetig differenzierbar.

Beweis. Die rechte Seite $f(t, y) := A(t)y + b(t)$ für $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$ ist stetig. Sei $H \subset I$ ein kompaktes Intervall mit $t_0 \in H$. Dann ist $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_\infty = \|A(t)(y_1 - y_2)\|_\infty \leq \|A(t)\| \|y_1 - y_2\|_\infty \leq L_H \|y_1 - y_2\|_\infty$ mit $L_H := \sup_{t \in H} \|A(t)\|$ unter Verwendung der Operatornorm für $A(t)$. Also ist $f|_{H \times \mathbb{R}^n}$ Lipschitz stetig bzgl. y . Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (12) existiert eine eindeutige Lösung y_H auf H . Da $I = \bigcup\{H \subset I : H \text{ kompaktes Intervall mit } t_0 \in H\}$, gibt es eine eindeutige Lösung y der AWA auf ganz I . Weil f stetig ist, ist $t \mapsto y'(t) = f(t, y(t))$ stetig. \square

Im Folgenden gelten stets die Voraussetzungen von (24). Die Lösung der AWA von (24) wird genauer mit

$$I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$$

bezeichnet. Weiter sei

$$\varphi_{tt_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_{tt_0}(\eta) := \mathbf{y}(t; t_0, \eta).$$

(25) Beispiel. Für $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ mit A konstant und $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ ist $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{y}_0$ und $\varphi_{tt_0}(\eta) = \mathbf{y}(t; t_0, \eta) = e^{(t-t_0)A} \eta$.

(26) Lemma. Für alle $r, s, t \in I$ gilt $\varphi_{rs} \circ \varphi_{st} = \varphi_{rt}$, $\varphi_{tt} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\varphi_{ts}^{-1} = \varphi_{ts}$.

Beweis. Da $\varphi_{tt}(\eta) = \mathbf{y}(t; t, \eta) = \eta \forall \eta$ ist $\varphi_{tt} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Sei nun $t \leq s \leq r$. Dann ist $\mathbf{y}(r; t, \eta) = \mathbf{y}(r; s, \mathbf{y}(s; t, \eta))$ wegen der Eindeutigkeit der Lösung, d.h. $\varphi_{rt}(\eta) = \varphi_{rs} \circ \varphi_{st}(\eta) \forall \eta$. Ebenso folgt $\mathbf{y}(s; t, \eta) = \mathbf{y}(s; r, \mathbf{y}(r; t, \eta)) \forall \eta$, weshalb $\varphi_{st} = \varphi_{sr} \circ \varphi_{rt}$. Insbesondere folgt für $t = r$, dass $\text{id}_{\mathbb{R}^n} = \varphi_{rr} = \varphi_{rs} \circ \varphi_{sr}$ und für $t = s$, dass $\text{id}_{\mathbb{R}^n} = \varphi_{ss} = \varphi_{sr} \circ \varphi_{rs}$. \square

(27) Übergangsmatrix. Sei $\mathbf{b} = 0$ der homogene Fall. Dann ist $\varphi_{st} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus $\forall s, t \in I$. Die darstellende Matrix bez. der Standardbasis wird mit $\Phi(s, t)$ bezeichnet. Sie heißt Übergangsmatrix.

Beweis. Nach (26) ist φ_{st} bijektiv. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{y}(t; s, \eta_i)$ für $i = 1, 2$ und $s, t \in I$. Dann ist $\mathbf{y}_1 + \alpha \mathbf{y}_2$ die Lösung zur AWA $(\mathbf{y}_1 + \alpha \mathbf{y}_2)(s) = \mathbf{y}_1(s) + \alpha \mathbf{y}_2(s) = \eta_1 + \alpha \eta_2$, weshalb $\varphi_{ts}(\eta_1 + \alpha \eta_2) = \varphi_{ts}(\eta_1) + \alpha \varphi_{ts}(\eta_2)$. \square

(28) Bemerkungen.

- $\Phi(s, t) = \Phi(s, r)\Phi(r, t)$, $\Phi(t, t) = E_n$ und $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$.
- Ist \mathbf{e}_i der i -te Basisvektor in \mathbb{R}^n , dann ist die i -te Spalte von $\Phi(t, t_0)$ gleich $\Phi(t, t_0)\mathbf{e}_i = \varphi_{tt_0}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{e}_i)$. Sie löst die AWA $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{e}_i$.
- Ist A von t unabhängig, d.h. $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, dann ist $\Phi(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$ nach (15.15). Wegen der freien Zeitentwicklung gilt die Zeittranslationsinvarianz.

Es folgt ein zu (15.16) analoger Satz.

(29) Satz. Der Lösungsraum des homogenen Systems

$$\mathcal{L} := \{\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \text{ ist differenzierbar und löst } \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}\}$$

ist ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Sei $t_0 \in I$. Dann ist $\varphi_{t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}$, $\varphi_{t_0}(\eta)(t) := \varphi_{tt_0}(\eta)$, ein linearer Isomorphismus. Der inverse Isomorphismus lautet $\varphi_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}(t_0) \forall \mathbf{y} \in \mathcal{L}$.

Beweis. Nach (4) ist $\mathcal{L} \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Nach Definition ist $\varphi_{t_0}(\eta) = \mathbf{y}(\cdot; t_0, \eta)$. Daraus folgt $\varphi_{t_0}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der AWA ist φ_{t_0} auch injektiv. Weil $(\varphi_{t_0}(\eta_1 + \alpha\eta_2))(t) = \varphi_{tt_0}(\eta_1 + \alpha\eta_2) = \varphi_{tt_0}(\eta_1) + \alpha\varphi_{tt_0}(\eta_2) = (\varphi_{t_0}(\eta_1))(t) + \alpha(\varphi_{t_0}(\eta_2))(t)$, ist φ_{t_0} linear. Also ist φ_{t_0} ein linearer Isomorphismus und \mathcal{L} ein n -dimensionaler Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Zu $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$ existiert ein η mit $\mathbf{y} = \varphi_{t_0}(\eta)$. Damit folgt $(\varphi_{t_0}(\eta))(t_0) = \varphi_{t_0 t_0}(\eta) = \eta$, weshalb $\varphi_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}) = \eta = \mathbf{y}(t_0)$. \square

(30) Fundamentalmatrix. Sei $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ eine Basis von \mathcal{L} in (29). Dann heißt

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$$

eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$. Sei \mathbf{Y} irgendeine Fundamentalmatrix. Dann ist $\mathbf{Y}(t_0) \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar und es gilt $\Phi(t, t_0) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1} \forall t, t_0 \in I$.

Beweis. Da $\mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{y}_1(t_0) \dots \mathbf{y}_n(t_0))$ eine Basis von \mathbb{R}^n ist nach (29), ist $\mathbf{Y}(t_0)$ invertierbar. Für $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathbf{y}(t) := \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0.$$

Weil $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{Y}'(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0$, löst \mathbf{y} die AWA, weshalb $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \varphi_{tt_0}(\mathbf{y}_0)$. Das bedeutet, dass $\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 = \Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 \forall \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, was den Rest der Behauptung zeigt. \square

(31) Korollar. Seien $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \in \mathcal{L}$, d.h. Lösungen von $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, und $\mathbf{Y} := (\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n)$. Dann sind äquivalent

- (i) \mathbf{Y} ist eine Fundamentalmatrix.
- (ii) $\mathbf{Y}(t_0)$ ist invertierbar für ein $t_0 \in I$.
- (iii) $\mathbf{Y}(t)$ ist invertierbar für alle $t \in I$.

Beweis. (i) \Rightarrow (iii) folgt aus (30) und (iii) \Rightarrow (ii) ist klar. Bleibt (ii) \Rightarrow (i) zu zeigen. Nach (29) ist $\varphi_{t_0}(\mathbf{y}_i(t_0)) = \mathbf{y}_i \forall i$, wobei φ_{t_0} ein linearer Isomorphismus ist. Weil $\mathbf{y}_1(t_0), \dots, \mathbf{y}_n(t_0)$ eine Basis von \mathbb{R}^n ist nach Voraussetzung, ist $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ eine Basis von \mathcal{L} . \square

(32) Satz. Die AWA für das inhomogene System

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

wird eindeutig gelöst durch

$$\mathbf{y}(t) := \Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{b}(s)ds.$$

Dabei dürfen $\mathbf{b}(t)$ und \mathbf{y}_0 auch komplex sein. Weil $\mathbf{A}(t)$ und $\Phi(t, t_0)$ reell sind, genügt es in diesem Fall Re und Im der Gleichungen separat zu betrachten.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar nach (24). Weiter ist $\mathbf{y}(t_0) = \Phi(t_0, t_0)\mathbf{y}_0 + 0 = \mathbf{y}_0$. Schließlich rechnet man nach

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \partial_t \underbrace{\Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0}_{\text{Lsg. hom. Sys.}} + \underbrace{\Phi(t, t)}_{=E_n} \mathbf{b}(t) + \int_{t_0}^t \partial_t \Phi(t, s) \mathbf{b}(s) ds = \\ &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t)\Phi(t, s)\mathbf{b}(s) ds = \\ &= \mathbf{A}(t) \left[\Phi(t, t_0)\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{b}(s) ds \right] + \mathbf{b}(t) = \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

□

Läßt sich die Inhomogenität in einfache Bestandteile linear zerlegen, dann ist es vorteilhaft, das Superpositionsprinzip anzuwenden.

(33) Superpositionsprinzip. *Betrachte die AWA*

- $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$
- $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{b}}(t), \mathbf{y}(t_0) = \tilde{\mathbf{y}}_0.$

Sind \mathbf{y} und $\tilde{\mathbf{y}}$ Lösungen, dann löst die Linearkombination $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{y} + \beta\tilde{\mathbf{y}}$ die AWA

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} + (\alpha\mathbf{b}(t) + \beta\tilde{\mathbf{b}}(t)), \mathbf{z}(t_0) = \alpha\mathbf{y}_0 + \beta\tilde{\mathbf{y}}_0.$$

Beweis. $\mathbf{z}'(t) = \alpha\mathbf{y}'(t) + \beta\tilde{\mathbf{y}}'(t) = \alpha(\mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)) + \beta(\mathbf{A}(t)\tilde{\mathbf{y}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}(t)) = \mathbf{A}(t)(\alpha\mathbf{y}(t) + \beta\tilde{\mathbf{y}}(t)) + \alpha\mathbf{b}(t) + \beta\tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \alpha\mathbf{b}(t) + \beta\tilde{\mathbf{b}}(t).$ □

(34) Bemerkung. In (33) dürfen α und β auch komplex sein. — *Erfüllen $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{a}(t) \in \mathbb{C}^n$ die Gleichung*

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} + \mathbf{a}(t),$$

dann erfüllen $\mathbf{u} := \text{Re } \mathbf{z}$ und $\mathbf{v} := \text{Im } \mathbf{z}$ die Gleichungen

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{u} + \text{Re } \mathbf{a}(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{v} + \text{Im } \mathbf{a}(t).$$

Zum Beweis bilde man den Real- und den Imaginärteil der Ausgangsgleichung. Hierbei ist $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ zu beachten.