Prof. Dr. Gero Friesecke
Dr. Johannes Giannoulis



# Analysis 2

## **Zentralübung** (am 29.6.)

**Z 9.1** *Schwingende Saite (Fortsetzung von* **H 9.3***)*

Sei $u$ die in **H 9.3** berechnete formale Lösung zu (W), (R), (A).

(a) (Differenzierbarkeit) Sei die antisymmetrische $2\pi$-periodische Fortsetzung von $w$ bzw. $v$ auf $\mathbb{R}$ 4-mal bzw. 3-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: $u$ ist 2-mal stetig differenzierbar und erfüllt (W), (R), (A).

(b) (Eindeutigkeit) Unter den Voraussetzungen aus (a) existiert genau eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion $u$, die (W), (R), (A) erfüllt.

## **Hausaufgaben** (Abgabe: am 29.6., 14:00 Uhr)

**H 9.1** *Fourier-Reihen*

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f$.

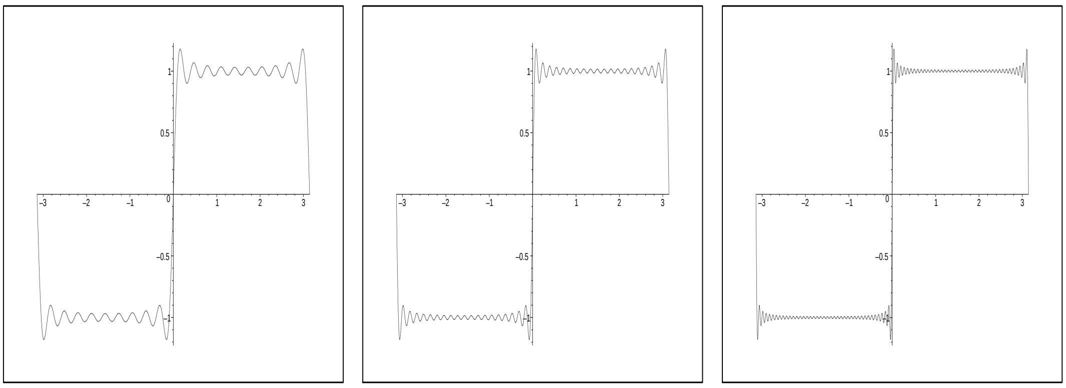
(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - + \cdots$.

**H 9.2** *Gibbssches Phänomen*

Gegeben ist die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\,,\qquad f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass für die $N$-te Fourier-Partialsumme $S_{N,f}$ gilt

$$S_{N,f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \{1,\dots,N\} \text{ ungerade}} \frac{\sin(nx)}{n}\,.$$



$S_{N,f}(x)$ für $N = 20\,,\ 40\,,\ 80$

(b) Wir wollen herausfinden, ob die „Ausreißer“ in der Nähe von $x = 0$ für großes $N$ verschwinden, d.h. ob das Maximum von $S_{N,f}(x)$ gegen 1 konvergiert für $N \to \infty$. Zeigen Sie dazu für ungerades $N$, dass $S'_{N,f}(y) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin((N+1)y)}{\sin y}$ gilt und finden Sie alle Stellen $x \in (0, \pi)$, an welchen $S_{N,f}(x)$ ein

(i) lokales Minimum, (ii) lokales Maximum, (iii) globales Maximum

annimmt.

*Hinweis:* Es gilt $S_{N,f}(x) = \int_0^x S'_{N,f}(y)\,\mathrm{d}y$; der Nenner in obiger Formel für $S'_{N,f}(y)$ ist monoton wachsend mit $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{N\to\infty} S_{N,f}(\frac{\pi}{N+1}) = G$ mit der *Gibbsschen Konstante*

$$G = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad (= 1,179...)\,.$$

*Hinweis:* Betrachten Sie $S_{N,f}(\frac{\pi}{N+1})$ als Riemannsche Summe.

**H 9.3** *Schwingende Saite*

Die Auslenkung $u(x,t)$ einer schwingenden Saite am Punkt $x \in [0,\pi]$ zur Zeit $t \in [0,\infty)$ genügt (in geeigneten physikalischen Einheiten) der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{(Wellengleichung)} \tag{W}$$

bezüglich der Randbedingung

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty) \qquad \text{(festgehaltene Enden)} \tag{R}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = w(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x) \qquad \text{(Anfangsauslenkung, -geschwindigkeit).} \tag{A}$$

Hierbei seien $v, w : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ gegebene Lipschitz-stetige Funktionen mit $w(0) = w(\pi) = 0$, $v(0) = v(\pi) = 0$.

Bestimmen Sie eine formale Lösung $u$ von (W), (R), (A) mit Hilfe der Fourier-Reihen-Methode, analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung für die Wärmeleitungsgleichung. Bestimmen Sie $u$ explizit im Falle $w(x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|$, $v = 0$ (gezupfte Saite), und skizzieren Sie $u$ für verschiedene Zeiten $t$.

(Fortsetzung der Aufgabe: siehe **Z 9.1**.)

**Tutorübungen** (30.6.-3.7.)

**T 9.1** *Fourier-Reihen reellwertiger Funktionen*

Es sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ (d. h. $f$ reellwertig), $f$ Lipschitz-stetig, $f(\pi) = f(-\pi)$. Zeigen Sie: Mit

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big) \qquad \text{für alle } x \in [-\pi,\pi]\,.$$

*Hinweis:* Betrachten Sie Realteil und Imaginärteil der (komplexen) Fourier-Reihe für $f$.

**T 9.2** *Fourier-Reihen gerader und ungerader Funktionen*

(a) Eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $\quad f(x) = f(-x) \quad$ gilt für alle $x$, und *ungerade*, wenn $\quad f(x) = -f(-x) \quad$ gilt für alle $x$.

Sei $f$ Lipschitz-stetig, $f(-\pi) = f(\pi)$. Betrachten Sie die Darstellung von $f$ aus **T 9.1**. Zeigen Sie:

$$f \text{ gerade} \iff b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,,$$

$$f \text{ ungerade} \iff a_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

(b) Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, $f(0) = f(\pi) = 0$. Zeigen Sie: Es gibt $b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ für alle $x \in [0, \pi]$.

*Hinweis:* Betrachten Sie eine geeignete Funktion $\widetilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Ihr Argument sollte nicht länger als eine Zeile sein.

**Beachten Sie:**
**Am MITTWOCH, den 24.6., um 12.15-13.45 Uhr, findet die Vorlesung AUSNAHMSWEISE im Physikhörsaal der LMU, COULOMBWALL, CAMPUS GARCHING statt.**