Prof. Dr. Gero Friesecke
Dr. Johannes Giannoulis

Analysis 2

Zentralübung (am 22.6.)

Z 8.1 Zeigen Sie: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Der Vektorraum $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen auf Ω versehen mit der Maximumsnorm ist ein Banachraum, d.h., jede Cauchyfolge in $C(\Omega)$ besitzt einen Grenzwert in $C(\Omega)$.

Hausaufgaben (Abgabe: am 22.6., 14:00 Uhr)

H 8.1 Zeigen Sie: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

$$f_n \text{ gleichmäßig konvergent gegen } f \;\Rightarrow\; f_n \text{ konvergent im quadratischen Mittel gegen } f.$$

Hinweis: Benutzen Sie Satz 4.2 aus der Vorlesung.

H 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 + y^3 + z^3 - 7 \\ xy + 2 \\ x^2 + y^2 - \lambda z - 5 \end{pmatrix}.$$

Für welche Parameterwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $f(x,y,z) = c$ für c nahe 0 und (x,y,z) nahe $(2,-1,0)$ auflösbar?

H 8.3 Sei $\Omega = [a,b]^2$, $K \in C(\Omega)$ mit $\|K\| \le C$, $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $r \in \mathbb{R}$ mit $|r| < \frac{1}{C(b-a)}$. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$f(x) = g(x) + r \int_a^b K(t,x) g(t)\,\mathrm{d}t$$

genau eine stetige Lösung $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $(Fg)(x) = f(x) - r\int_a^b K(t,x)g(t)\,\mathrm{d}t$ auf dem Banachraum $V = C([a,b])$.

Tutorübungen (23.-26.6.)

T 8.1 "Wahr oder falsch?": Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

T 8.2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das Bild $f(\mathbb{R}^2)$ von f an.

(b) Weisen Sie nach, dass die Determinante der Ableitung $Df(x, y)$ von f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ungleich Null ist. Was bedeutet dies für die lokale Umkehrbarkeit von f an einer beliebigen Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$? Ist $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ bijektiv?

(c) Seien nun $a = (0, \pi/3)$, $b = f(a)$, und g die Inverse von f auf einer Umgebung von b mit $g(b) = a$. Geben Sie eine explizite Darstellung von g an, berechnen Sie $Df(a)$ und $Dg(b)$ und verifizieren Sie die Formel $Dg(z) = (Df(g(z)))^{-1}$ für $z = b$ ohne Benutzung des Satzes von der lokalen Umkehrbarkeit.

(d) Wie sehen die Bilder der achsenparallelen Geraden sowie der Geraden $x = y$ unter f aus?