Prof. Dr. Gero Friesecke
Dr. Johannes Giannoulis

Analysis 2

Zentralübung (am 15.6.)

Z 7.1 *Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit*

(a) Seien die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei f_n gleichmäßig konvergent gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar?

(b) Zeigen Sie: Wenn zusätzlich $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent gegen $g{:}[a,b]{\to}\mathbb{R}$, ist f differenzierbar, und es gilt $f' = g$.

(c) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine auf $(-R,R)$ konvergente Potenzreihe. Dann konvergieren ihre Partialsummen $S_k(x) := \sum_{n=0}^{k} c_n x^n$ auf $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$, $\epsilon > 0$, gleichmäßig gegen f, und f ist unendlich oft differenzierbar auf $(-R,R)$ mit

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n x^{n-k}.$$

Hausaufgaben (Abgabe: am 15.6., 14:00 Uhr)

H 7.1 *Konvergenz von Funktionenfolgen*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz, und Konvergenz im quadratischen Mittel.

(a) $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2n - 2n^2x & \text{für } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

(b) $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f_n(x) = \frac{1}{1+n|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}], \\ 0 & \text{für sonstige } x \in [0,1]. \end{cases}$ (*"Wandernder Buckel"*)

Hierbei sind $\nu, k \in \mathbb{N}_0$ die eindeutig bestimmten Zahlen mit $n = 2^\nu + k$, $k < 2^\nu$.

H 7.2 *p-Normen im* $\mathbb{R}^2$

Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $p \in [1,\infty]$. Dann definieren wir die p- Norm von x durch

$$|x|_p := \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \max\{|x_1|, |x_2|\} & p = \infty \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie für $p = 1, 2, \infty$, dass $|x|_p$ eine Norm ist.

(b) Ist $|x|_p$ mit $p = 1/2$ eine Norm?

(c) Skizzieren Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^2 |\, |x|_p = 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$.

(d) Zeigen Sie, dass es für jedes $p \in [1, \infty]$ nur von p abhängige Konstanten c_p und C_p gibt mit

$$c_p|x|_\infty \leq |x|_p \leq C_p|x|_\infty.$$

(e) Bei der Definition der Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ wurde die 2-Norm verwendet. Analog könnte man „Konvergenz bezüglich der p-Norm" definieren.

Wenn Sie wissen, dass eine Folge im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der 2-Norm konvergiert, was glauben Sie, gilt dann für die Konvergenz bezüglich einer anderen p-Norm? Wie sieht es mit der Stetigkeit von vektorwertigen Funktionen bezüglich der p-Norm aus? (Bitte schreiben Sie hier nur Ihre Vermutung und eine kurze Begründung auf, aber keinen Beweis).

H 7.3 *Fixpunkte*

Beweisen Sie wie folgt, dass die Gleichung $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ auf $I = [\sqrt{\mathrm{e}}, 2]$ eine Lösung besitzt.

(a) Zeigen Sie: $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ erfüllt $f(I) \subseteq I$.

(b) $|f'(x)| \leq \lambda$ für alle $x \in I$ und ein $\lambda < 1$.

(c) Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Tutorübungen (16.-19.6.)

T 7.1 *L^2-Norm für stückweise konstante Funktionen*

Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = v_j$ für $x \in [a + (j-1)\frac{b-a}{n}, a + j\frac{b-a}{n})$, $j = 1, \dots, n$. Drücken Sie die L^2-Norm $\|f\|_2$ mithilfe des Vektors $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ der Werte von f aus.

T 7.2 *Banachräume*

Zeigen Sie durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels, dass der Raum $C([a, b])$ der stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, bezüglich der L^2-Norm $\|\cdot\|_2$ *kein* Banachraum ist.

Hinweis: Geben Sie eine Funktionenfolge $(f_n) \subset C([a, b])$ an, die bzgl. $\|\cdot\|_2$ eine Cauchyfolge ist, und die im quadratischen Mittel gegen keine Funktion $f \in C([a, b])$ konvergiert.

T 7.3 *Banachscher Fixpunktsatz*

Zeigen Sie durch ein geeignetes Gegenbeispiel, dass die Voraussetzung

$$\exists\, \lambda < 1 : \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

des Banachschen Fixpunktsatzes nicht durch

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

ersetzt werden kann.