Prof. Dr. Gero Friesecke
Dr. Johannes Giannoulis

Analysis 2

Hausaufgaben (Abgabe: am 3.6., 12:00 Uhr)

H 6.1 *Implizit definierte Funktionen im* $\mathbb{R}^2$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2(1 - x^2) - y^2$.

(a) Skizzieren sie die Niveaulinie $N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x, y) = 0\}$.

(b) Für welche Punkte $(x_0, y_0) \in N_0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $N_0 \cap B_\delta(x_0, y_0)$ als Graph $w = h(z)$ einer Funktion $h : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, in einem geeigneten Koordinatensystem $(x, y) = ze_1 + we_2$, $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$, $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, dargestellt werden kann?

(c) Geben Sie zu allen Punkten, an denen dies möglich ist, solche Vektoren e_1, e_2 und eine zugehörige Funktion h an.

H 6.2 *Mehrdimensionaler Satz von Taylor*

Berechnen Sie jeweils das Taylorpolynom k-ter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um den Punkt (x_0, y_0):

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 - y^2)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $k = 2$.

(b) $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$, $(x_0, y_0) = (\pi/4, \pi/4)$, $k = 3$.

H 6.3 *Satz von Taylor und Extrema*

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

(a) Sei f zweimal stetig differenzierbar, $D^2 f(x_0) > 0$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Taylor: f besitzt bei x_0 ein lokales Minimum.

(b) Sei f dreimal stetig differenzierbar, $D^2 f(x_0) = 0$, $\dfrac{\partial^3}{\partial x_{i_0} \partial x_{j_0} \partial x_{k_0}} f(x_0) \neq 0$ für gewisse Indizes $i_0, j_0, k_0 \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie: f besitzt bei x_0 weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum.

Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung von f auf eine von Ihnen geeignet zu wählende Gerade durch x_0.

Tutorübungen (3.-9.6.)

T 6.1 *Impliziter Funktionensatz im* $\mathbb{R}^3$

(a) Geben Sie zu dem in der Vorlesung behandelten Impliziten Funktionensatz im $\mathbb{R}^2$ eine geeignete Verallgemeinerung für Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an.

(b) Sei f die Funktion aus **H 6.1**. Betrachten Sie die Fläche M im $\mathbb{R}^3$, die durch die Rotation der Kurve $f(x, y - a) = 0$, $a > \frac{1}{2}$, um die x-Achse entsteht. Stellen Sie M als Niveaumenge einer geeigneten Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dar. Geben Sie die Punkte $(x, y, z) \in M$ an, für die $\operatorname{grad} g$ nicht verschwindet. Was bedeutet dies für die Struktur von M in der Nähe solcher Punkte? Was passiert geometrisch an den Punkten mit $\operatorname{grad} g = 0$?

T 6.2 *Näherungsrechnung*

Der Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 ist gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Betrachten Sie die Funktion $R(R_1, R_2)$ in einer Umgebung des Punktes $(R_1, R_2) = (50, 100)$.

(a) Bestimmen Sie die zugehörigen Taylorpolynome 1. und 2. Ordnung.

(b) Wie groß ist die maximale Änderung von R in 1. Taylor-Näherung, wenn R_1 und R_2 um $\pm 1\%$ verändert werden?