

Analysis 2

Zentralübung (am 25.5.)

Z 5.1 Minimaler Abstand

(a) Im \mathbb{R}^2 seien ein Kreis $K_r(0)$ um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$ und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit $|P| > r$ gegeben. Geben Sie den Punkt x auf dem Kreis an, der einen minimalen (euklidischen) Abstand zum Punkt P hat, sowie diesen Abstand. Verwenden Sie dazu die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Diskutieren Sie Existenz und Eindeutigkeit von x und interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch.

(b) Gegeben sei nun eine Gerade $f(x) = ax + b$ im \mathbb{R}^2 mit $b^2/(1+a^2) > r^2$. Verwenden Sie (a), um den Punkt des minimalen Abstandes der Geraden f zum Kreis $K_r(0)$ zu berechnen. Diskutieren Sie auch hier Existenz, Eindeutigkeit und geometrische Eigenschaften.

Hausaufgaben (Abgabe: am 25.5., 14:00 Uhr)

H 5.1 Extrema unter Nebenbedingungen

Bestimmen Sie die Extrema von $f(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

H 5.2 Youngsche Ungleichung

Es seien a_1, \dots, a_n beliebige positive Zahlen und p_1, \dots, p_n positive Zahlen mit $p_1 + \dots + p_n = 1$. Zeigen Sie:

$$a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n.$$

H 5.3 Fussball oder Kino?

Frederic möchte Fussball sehen, Arabella will zu 'Kino am Pool'. Keiner der beiden hat Lust, auf den Vorschlag des anderen einzugehen. Andererseits ist beiden ihre Beziehung wichtig, und sie möchten sich gern treffen. Insbesondere ist ihnen sehr wichtig, Streit zu vermeiden bzw. ihre Beziehung nicht aufs Spiel zu setzen. Darüber hinaus sind beide zu kooperativem Verhalten erzogen worden und haben ein schlechtes Gewissen, wenn sie sich zu egoistisch aufführen.

Diese Situation kann durch die folgenden Gewinnfunktionen in Abhängigkeit ihrer Verhaltensstrategien modelliert werden. Strategie von Frederic: Insistieren mit Wahrscheinlichkeit $f \in [0, 1]$, Nachgeben mit Wahrscheinlichkeit $1 - f$. Strategie von Arabella: Insistieren mit Wahrscheinlichkeit $a \in [0, 1]$, Nachgeben mit Wahrscheinlichkeit $1 - a$. Im Falle beiderseitigen Insistierens (Streit) erhalten beide -100 Punkte, im Falle beiderseitigen Nachgebens (es findet kein Treffen statt) erhalten beide 0 Punkte, und im Falle einer Einigung (der eine setzt sich durch, der andere gibt nach) erhält der 'Gewinner' 10 Punkte und der 'Verlierer' 5 Punkte. Die Gewinnfunktion von Arabella ist

$$A(a, f) = 10a(1 - f) - 100af + 5(1 - a)f - a^2$$

und diejenige von Frederic

$$F(a, f) = 10f(1 - a) - 100fa + 5(1 - f)a - f^2,$$

wobei jeweils der letzte Term das schlechte Gewissen modelliert.

Was ist die optimale Strategie von Arabella, d.h. die Maximumsstelle $a_*(f)$ bezüglich a von $A(a, f)$? Was ist die optimale Strategie von Frederic? Gibt es Wertepaare (a, f) , die einer optimalen Strategie sowohl von Arabella als auch von Frederic entsprechen? Wie gross ist der dortige Gesamtgewinn $A(a, f) + F(a, f)$ im Vergleich zum bei maximaler Kooperation möglichen Gesamtgewinn?

Tutorübungen (26.-29.5.)

T 5.1 *Lagrange-Multiplikatoren*

Bestimmen Sie die Maximums- und Minimumsstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 3x^2y - y^3$$

auf der Menge $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

- (a) mit der *Lagrange-Multiplikatorregel*,
- (b) mit Hilfe der *Parametrisierung* $g : \mathbb{R} \rightarrow K, \quad g(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

T 5.2 Aus einem gegebenen rechteckigen Stück Pappe soll eine quaderförmige Schachtel

- (a) mit Deckel,
- (b) ohne Deckel,

mit größtmöglichem Volumen gebastelt werden. Wie sieht sie aus?

(Das Stück darf beliebig zerschnitten und neu zusammengeklebt werden.)

T 5.3 *Neues von Arabella und Frederic...: Fussball oder Kino?, Episode II*

Diese Woche möchte Arabella nach wie vor am liebsten mit Frederic ins Kino, sie zieht aber einen Kinobesuch mit ihrem kinointeressierten Bekannten Paolo (7 Punkte) einem gemeinsamen Fussballabend mit Frederic vor. Sie ruft Frederic nur noch mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1]$ an; mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ verabredet sie sich mit Paolo. Ihre neue Gewinnfunktion ist $A_2(a, p, f) = pA(a, f) + 7(1 - p)$, und die von Frederic $F_2(a, p, f) = pF(a, f) - 3(1 - p)$. Der letzte Term modelliert Frederics Eifersucht. Wie verändern sich im Vergleich zur Vorwoche die optimalen Strategien von Arabella und Frederic?