Prof. Dr. Gero Friesecke
Dr. Johannes Giannoulis

SS 2009
Blatt 4

Analysis 2

Zentralübung (am 18.5.)

Z 4.1 *Positivität von Matrizen*

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine symmetrische 2×2-Matrix. Zeigen Sie: $A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a, c \geq 0$, $\det A \geq 0$.

Hausaufgaben (Abgabe: am 18.5., 14:00 Uhr)

H 4.1 *Maximums- und Minimumsstellen*

Es sei $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x,y)| \leq 2\}$ und

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := (x + 2y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

Bestimmen Sie, analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung, die Maximums- und Minimumsstellen von f, sowie das Maximum und Minimum.

H 4.2 *Eine Liste von Beispielen*

Geben Sie zu jeder Spalte Beispiele abgeschlossener Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetiger Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit f auf $\operatorname{int} \Omega$ zweimal stetig differenzierbar an.

(N1) besitzt eine Lösung $x \in \operatorname{int} \Omega$	J	J	J	J	N	N
(N1), (N2) besitzen eine simultane Lösung $x \in \operatorname{int} \Omega$	J	J	N	N	N	N
f besitzt eine Minimumsstelle	J	N	J	N	J	N

Hierbei sind (N1), (N2) die Bedingungen aus Satz 3.1 der Vorlesung. "J" bzw. "N" stehen für "Ja" bzw. "Nein".

Warum steht Ihr Beispiel zur Spalte $\begin{matrix} \text{N} \\ \text{N} \\ \text{J} \end{matrix}$ nicht im Widerspruch zu Satz 3.1?

H 4.3 *Arithmetisches und geometrisches Mittel*

Es seien $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) := x_1 + \cdots + x_n$, $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 1$ und $x_i \geq 0$ für alle $i\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_1 \cdots x_n$.

(a) Begründen Sie, warum f auf M ein Maximum annimmt, und berechnen Sie Maximierer und Maximum.

(b) Folgern Sie daraus die *Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{für beliebige } a_1, \ldots, a_n \geq 0.$$

Tutorübungen (19.-22.5.)

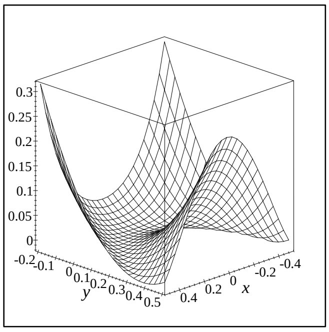
T 4.1 *Maxima und Minima*

Sei $f(x,y) := (y - x^2)(y - 2x^2)\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$ und die dortigen Hesse-Matrizen.

(b) Welche dieser Matrizen sind ≥ 0 bzw. ≤ 0?

(c) Punkte mit $\operatorname{grad} f = 0$ und $\det D^2 f < 0$ werden Sattelpunkte genannt. Wieso? Worin besteht der mathematische Zusammenhang mit dem Begriff des Sattelpunktes einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?



(d) Besitzt f eine Maximums- oder Minimumsstelle?

T 4.2 *Methode der kleinsten Quadrate.*

Gegeben seien zu den unabhängigen Variablen $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ $(N \in \mathbb{N})$, die Messdaten $y_i \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Gerade $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, die den Abstand (*Fehlerquadratsumme*) $d := (1/N)\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - y_i)^2}$ zu den Daten y_i minimiert.

(a) Existiert immer genau eine solche Gerade?

(b) Wenn ja, finden Sie diese.