PROF. DR. GERO FRIESECKE
DR. JOHANNES GIANNOULIS

SS 2009
BLATT 3

Analysis 2

Zentralübung (am 11.5.)

Z 3.1 *Satz von Fubini*

Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie für jeden Punkt $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$:

$$\int_a^x \left(\int_c^y f(s,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \int_c^y \left(\int_a^x f(s,t)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Differentialgleichung für die Differenz beider Seiten her.

Hausaufgaben (Abgabe: am 11.5., 14:00 Uhr)

H 3.1 *Schwerpunkt einer Fläche*

Der Schwerpunkt des Gebietes $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq g(x)\}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g \geq 0$, ist gegeben durch $(\overline{x}, \overline{y})$ mit

$$\overline{x} = \frac{1}{F} \int_B x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad \overline{y} = \frac{1}{F} \int_B y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

wobei $F = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Drücken Sie den Schwerpunkt mithilfe der Funktion g aus.

(b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkreisfläche um den Ursprung mit Radius $r > 0$, d.h. für $[a,b] = [-r,r]$ und $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

H 3.2 *Stetigkeit und Differenzierbarkeit*

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: f ist stetig auf Ω.

Hinweis: Betrachten Sie $x_0 \in \Omega$. Da Ω offen, existiert ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x_0) \subseteq \Omega$. Sei $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, $e := \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$. Begründen Sie zunächst:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{t=0}^{|x-x_0|} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + te)\,\mathrm{d}t.$$

Drücken Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0+te)$ mithilfe von $Df(x_0+te)$ aus und schätzen Sie das Integral unter Benutzung der Stetigkeit von Df geeignet ab.

H 3.3 *Divergenz eines Vektorfeldes*

Funktionen $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (d.h. Definitionsbereich und Wertebereich haben die selbe Dimension) werden auch Vektorfelder genannt. Wir definieren die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathrm{div} f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

(a) Sei $n = 2$. Interpretieren Sie die Divergenz anschaulich. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

i. Betrachten Sie zu $\epsilon > 0$ ein Quadrat Q_ϵ mit den Eckpunkten $(\pm\epsilon, \pm\epsilon)$ und geben Sie die nach außen zeigende Normale ν der Quadratseiten an.

ii. Berechnen Sie $\int_{\partial Q_\epsilon} f \cdot \nu$, indem Sie $f \cdot \nu$ entlang der Quadratseiten integrieren. Stellen Sie dafür die vier eindimensionalen Integrale über $[-\epsilon, \epsilon]$ auf, die sich durch Festhalten einer Koordinate ergeben, und addieren Sie den Wert der Integrale.

iii. Zeigen Sie nun

$$\int_{\partial Q_\epsilon} f \cdot \nu = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \operatorname{div} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Sie dürfen ohne Beweis die Integrationsreihenfolge vertauschen.

iv. Folgern Sie

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{4\epsilon^2} \int_{\partial Q_\epsilon} f \cdot \nu = \operatorname{div} f(0, 0).$$

Nutzen Sie hierfür die Stetigkeit von div f aus und wenden Sie die Dreiecksungleichung für Integrale auf die Differenz $\frac{1}{4\epsilon^2} \int_{Q_\epsilon} \operatorname{div} f \; - \; \operatorname{div} f(0, 0)$ an.

(b) Vektorfelder f mit div $f = 0$ werden quellenfrei genannt. Können Sie sich vorstellen warum? Geben Sie Beispiele nicht konstanter quellenfreier Vektorfelder an.

Tutorübungen (12.-15.5.)

T 3.1 *"Wahr oder falsch" — Zustandsgleichung idealer Gase*

Für ein ideales Gas mit Druck $P > 0$, Volumen $V > 0$, und absoluter Temperatur $T > 0$ gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie: „$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = 1$."

T 3.2 *Volumen eines Kegels*

Berechnen Sie das Volumen des Kegels der Höhe $h > 0$ über der Kreisfläche mit Radius $r > 0$.

T 3.3 *Stetig oder nicht?*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0, 0) = a \in \mathbb{R}$ und

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

(a) Zeigen Sie, dass zu jeder Geraden im $\mathbb{R}^2$ eine Wahl von $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Einschränkung von f auf diese Gerade, d.h. die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) := f(v+te)$ mit $v, e \in \mathbb{R}^2$, $|e| = 1$, stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f an jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, das f an der Stelle $(0, 0)$ unstetig ist.