Prof. Dr. Gero Friesecke
Dr. Johannes Giannoulis

Analysis 2

Hausaufgaben (Abgabe: am 4.5., 14:00 Uhr)

H 2.1 *Gradienten und Niveaumengen.*

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiter sei $c : (-\delta, \delta) \to \Omega$ stetig differenzierbar und $f(c(t)) = \text{const.}$, d.h. c ist eine *Niveaulinie* von f.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{grad} f(c(t)) \cdot \frac{d}{dt} c(t) = 0$ und interpretieren Sie dies geometrisch.

(b) Skizzieren Sie Niveaulinien und Gradienten für die folgenden Funktionen

(i)	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x,y) := y + 2x$
(ii)	$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$	$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
(iii)	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x,y) := xy$
(iv)	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x,y) := x^2 + 4y^2$

H 2.2 Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(0,0) := 0, \quad f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(a) Skizzieren Sie $\operatorname{graph} f$.

(b) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(c) Untersuchen Sie die Einschränkung $f(ct, st)$ von f auf Geraden durch den Ursprung (dabei sind c und s feste reelle Zahlen mit $c^2 + s^2 = 1$ und $t \in \mathbb{R}$).

   i. Zeigen Sie, dass die eingeschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ überall differenzierbar sind.

   ii. Berechnen Sie die Richtungsableitungen von f im Nullpunkt.

   iii. Besitzt f im Nullpunkt eine beste Approximation im Sinne von Theorem 1.2?

H 2.3 *Wärmeleitungsgleichung*

Sei $f : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,t) = t^{-n/2} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t}$. Zeigen Sie, dass f die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

löst, wobei Δ der Laplace-Operator bzgl. x ist.

Tutorübungen (5.-8.5.)

T 2.1 *Kettenregel.*

Sei $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\quad f(x_1, x_2) := \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$.

(a) Skizzieren Sie graph f.

(b) Sei $x \neq 0$, $e = \frac{1}{|x|}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung e. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

(c) Sei $\varphi \in \mathbb{R}$, $R := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ und $g(x) := Rx$, $h(x) := f(g(x))$.

Berechnen Sie $Dh(x)$. Skizzieren Sie für einen typischen Punkt $x \in \Omega$ den Punkt Rx, und die Vektoren $\nabla f(x) = Df(x)^T$, $\nabla h(x) = Dh(x)^T$.
Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch.

T 2.2 *Charakterisierung der Ableitung als bestapproximierende lineare Abbildung.*

Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage in Theorem 1.2:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung $A \in M^{m \times n}$ mit

$$\frac{|f(x+h) - (f(x) + Ah)|}{|h|} \to 0 \qquad (h \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } x + h \in \Omega,\ |h| \to 0)\ . \qquad (*)$$

Hinweis: Seien A_1, A_2 zwei solche Abbildungen mit $A_1 \neq A_2$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $(A_1 - A_2)v \neq 0$. Setzen Sie $h_t := tv$, $t \geq 0$. Da Ω offen ist, existiert $\delta > 0$ mit $x + h_t \in \Omega$ für alle $t \in [0, \delta]$. Betrachten Sie nun den Ausdruck

$$\frac{|f(x+h_t) - (f(x) + A_1 h_t) - (f(x+h_t) - (f(x) + A_2 h_t))|}{|h_t|}\ .$$

T 2.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(|x|)$ und differenzierbarem $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$(\operatorname{grad} f)(x) = \frac{g'(|x|)}{|x|} x$$

.