Inoffizielle Lösungsskizzen: Analysis 2

Blatt 12

Diese Skizzen sind inoffiziell, nicht in Absprache mit dem Analysis 2 Team erstellt worden und erheben insbesondere keinen Anspruch auf (vollständige) Korrektheit. Der Autor weist ausdrücklich darauf hin, dass ihre Verwendung auf eigene Gefahr und Verantwortung erfolgt.

T 12.1 (Lösen von Differentialgleichungssystemen, III)
Löse

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Eine kurze Rechnung ergibt, dass $\lambda = -1$ ein doppelter Eigenwert der Matrix A ist. Außerdem besitzt $\lambda = 1$ die geometrische Vielfachheit 1, d. h. es existieren keine zwei linear unabhängige[1] Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$. Damit ist aber Schritt 3 des Lösungsverfahrens aus der Vorlesung, wonach man $y(0)$ als Linearkombination der gefundenen Eigenvektoren schreibt, nicht anwendbar.

Da wir in der Vorlesung nicht den Ansatz mit Auffinden von Hauptvektoren kennengelernt haben, berechnen wir nun $e^{At}y_0$ explizit. Letzteres ist bekanntlicherweise die zum Problem $(\star)$ eindeutige Lösung.

Simples Ausrechnen zeigt

$$\begin{aligned}
A^0 y_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A^1 y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
A^2 y_0 &= \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix} \\
A^3 y_0 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \\
A^4 y_0 &= \begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix} \\
A^5 y_0 &= \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix} \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

[1] In der Sprache der linearen Algebraiker ist natürlich eine linear unabhängige Menge bestehend aus zwei Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$ gemeint... Na ja, wer es mag.

und lässt daher die Vermutung zu, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt[2]:

$$A^n y_0 = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 2n-1 \\ 4n \end{pmatrix}.$$

Es bezeichnet nun $y_i(t)$ die i-te Komponente der eindeutigen Lösung $y(t) = e^{At} y_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n!} t^n = -\left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \right] \\ &= -\left[-2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} - e^{-t} \right] = -\left[-2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} - e^{-t} \right] \\ &= 2te^{-t} + e^{-t} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} 4nt^n = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{(n-1)!} \\ &= 4t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \\ &= 4te^{-t}. \end{aligned}$$

Also ist die eindeutige Lösung von $(\star)$ gegeben durch

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{-t} + e^{-t} \\ 4te^{-t} \end{pmatrix}.$$

T 12.2 (Invertierbarkeit von e^A für beliebige Matrizen)
Behauptung folgt aus T 12.3 mit $B := -A$. Offensichtlich kommutieren A und $-A$.

T 12.3 (Rechenregeln der Exponentialfunktion für Matrizen)

(a) Beweis. Wir wiederholen kurz das Cauchy-Produkt aus der Analysis 1[3]: Wenn $\sum a_n$ und $\sum b_n$ zwei absolut konvergente Reihen sind, dann gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Nun aber zum Beweis. Wir setzen nun $a_n := \frac{1}{n!} A^n$ und $b_n := \frac{1}{n!} B^n$. Aus der Vorlesung ist bereits kenant, dass $\sum a_n$, $\sum b_n$ (komponentenweise) absolut konvergieren.

[2]Für Anhänger der vollständigen Induktion und einer mehr als ausführlichen Lösung hier der Beweis, der aus Prioritätsgründen nicht im Haupttext erscheint: Der Induktionsanfang wurde bereits gezeigt. Sei also die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ richtig. Aus

$$A^{n+1} y_0 = A(A^n y_0) = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-1 \\ 4n \end{pmatrix} = (-1)^{n+2} \begin{pmatrix} 2(n+1)-1 \\ 4(n+1) \end{pmatrix}$$

folgt unmittelbar die Behauptung für $n+1$.

[3]Siehe dazu Vorlesung 11 und Hilfssatz dort auf Seite 2

Also darf die "Rechenregel" des Cauchy-Produktes (komponentenweise) angewendet werden. Wir erhalten daher:

$$
\begin{aligned}
e^A e^B &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt auch

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n \overset{(\star\star)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Damit ist $e^A e^B = e^{A+B}$ gezeigt. Dabei wurde in $(\star\star)$ eine Variante der Binomischen Formel für kommutative quadratische $n \times n$-Matrizen A, B über einem Körper $\mathbb{K}$ verwendet:

$$
(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},
$$

deren Beweis wir aber Auslassen, weil dies bereits in der Linearen Algebra 2, Z62 auf Blatt 8 besprochen wurde. Es handelt sich dabei lediglich um einen Induktionsbeweis.

(b) *Behauptung.* $e^A e^B = e^{A+B}$ gilt nicht für alle $n \times n$ Matrizen.

Beweis. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $A^n = B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für alle $n \geq 2$ ist

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
e^B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Unter Beachtung von $(A+B)^2 = I$ erhalten wir des Weiteren

$$
(A+B)^{2k} = I, \qquad (A+B)^{2k+1} = A+B \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0
$$

und erhalten daher für e^{A+B}:

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(A+B)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(A+B)^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^A e^B.
\end{aligned}
$$