Analysis 2

Zentralübung (am 20.7.)

Z 12.1 *Differentialgleichungen, komplexe Eigenwerte und die Exponentialreihe für Matrizen*

(a) Es seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Berechnen Sie mit der Methode der Vorlesung die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} y$$

zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie $e^{tA}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ und $t \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie hierfür die Definition der Exponentialfunktion für Matrizen aus der Vorlesung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lösung von (a).

Hausaufgaben (Abgabe: am 20.7., 14:00 Uhr)

H 12.1 *Lösen von Differentialgleichungssystemen, I*

(a) Lösen Sie $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y$, $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Skizzieren Sie die Spur der reellwertigen Lösungen von $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y$.

H 12.2 *Lösen von Differentialgleichungssystemen, II*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\omega > 0$ und $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$ mit $y(0) = y_0$ mit dem Verfahren der Vorlesung und skizzieren Sie ihre Spur.

H 12.3 *Variation der Konstanten.*

(a) Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Zeigen Sie: Eine Lösung von

$$\dot{y}(t) = A\, y(t) + f(t)\,, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n\,,$$

ist gegeben durch

$$y(t) = e^{tA}\left(y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\, ds\right).$$

(b) Zeigen Sie: Die Lösung ist eindeutig.

Hinweis: Welche Differentialgleichung und welche Anfangsbedingung erfüllt die Differenz zweier Lösungen?

(c) Ein an einer elastischen Feder hängendes Teilchen unterliegt neben der Federkraft der Gravitationskraft. In geeigneten Einheiten ist die Auslenkung $z(t)$ des Teilchens nach unten beschrieben durch die forcierte Schwingungsgleichung

$$\ddot{z} + z = g(t) \qquad \text{mit } g(t) = G > 0\,.$$

Bestimmen und skizzieren Sie deren Lösung zur Anfangsbedingung $z(0) = 1, z'(0) = 0$.

Tutorübungen (21.-24.7.)

T 12.1 *Lösen von Differentialgleichungssystemen, III*

Lösen Sie $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

T 12.2 *Invertierbarkeit von e^A für beliebige Matrizen*

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass e^A invertierbar ist, in dem Sie $e^A \cdot e^{-A}$ berechnen. Benutzen Sie hierfür die Definition der Exponentialfunktion für Matrizen und das Cauchyprodukt für Reihen.

T 12.3 *Rechenregeln der Exponentialfunktion für Matrizen*

(a) Es seien A, B zwei reelle $n \times n$ Matrizen derart, dass $AB = BA$ gilt. Zeigen Sie

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Gleichung $e^A e^B = e^{A+B}$ gilt für beliebige reelle $n \times n$ Matrizen mit $n > 1$.

Das Analysis-2-Team bedankt sich für Ihre Mitarbeit und wünscht Ihnen viel Erfolg bei der Klausur und in Ihrem weiteren Studium!