PROF. DR. GERO FRIESECKE
DR. JOHANNES GIANNOULIS

SS 2009
BLATT 11

Analysis 2

Zentralübung (am 13.7.)

Z 11.1 *Hasen und Füchse*

Ein einfaches Modell für die Populationsentwicklung eines Raubtieres und seiner Beute ist gegeben durch das Lotka-Voltera-System

$$\begin{pmatrix} H \\ F \end{pmatrix}^{\bullet} = \begin{pmatrix} aH - cFH \\ -bF + dFH \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} H \\ F \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Hierbei sind $H(t)$ und $F(t)$ die Anzahl von Hasen bzw. Füchsen zur Zeit $t \geq 0$, $H_0 > 0$ und $F_0 > 0$ sind gegebene Anfangsbevölkerungen, und a, b, c, d sind positive biologische Parameter.[1]

a) Zeigen Sie: Für jede Lösung von (1) mit $H > 0$, $F > 0$ gilt $\frac{d}{dt}V(H(t), F(t)) = 0$, wobei

$$V(h,f) = V_1(h) + V_2(f), \quad V_1(h) = b \log h - dh, \quad V_2(f) = a \log f - cf, \quad V_i : (0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

b) Skizzieren Sie die Funktionen V_1 und V_2 und bestimmen Sie jeweils die eindeutige Maximumsstelle.

c) Folgern Sie: Für jede Lösung von (1), (2) mit $H_0 > 0$, $F_0 > 0$ existieren $m > 0$, $M > 0$ (abhängig von H_0, F_0) sodass $m \leq H(t) \leq M$, $m \leq F(t) \leq M$ für alle $t \geq 0$ („kein Aussterben, keine Bevölkerungsexplosion"). Insbesondere gilt $H > 0$, $F > 0$ für alle t.

Hinweis für untere Schranke für H: Nehmen Sie das Gegenteil an. Dann existiert entweder eine kleinste Zeit $T > 0$ sodass $H(T) = 0$ und $H(t) > 0$ für $t < T$, oder es gilt $H > 0$ für alle t, $H(t_j) \to 0$ für eine Folge $t_j \to \infty$ (wieso?). Leiten Sie mittels a) und b) einen Widerspruch her.

d) Zeigen Sie: Wenn $H_0 > 0$, $F_0 > 0$, $(H_0, F_0) \neq (\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$ und (H, F) Lösung von (1), (2), so ist $(H(t), F(t))$ nicht konvergent für $t \to \infty$ („Existenz von Oszillationen").

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an, d.h. $H(t) \to H_*$ und $F(t) \to F_*$ für $t \to \infty$. Untersuchen Sie das Verhalten für $t \to \infty$ von $\int_t^{t+1} \dot{H}$ und $\int_t^{t+1} \dot{F}$.

e) Setzen Sie $a = b = c = 1$, $d = 2$ „genügsame Füchse" bzw. $d = 1$ „gierige Füchse". Skizzieren sie die Niveaulinien $\{(f,g) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \mid V(f,g) = const\}$. Begründen Sie die Aussage „Gierige Füchse sind besser für die Hasen als genügsame Füchse".

[1]Genauer: a=Hasenvermehrungsrate ohne Füchse pro Zeiteinheit; b=Fuchssterberate ohne Hasen; FH=Anzahl Hasen-Fuchs-Treffen; c=Wahrscheinlichkeit erfolgreichen Beutefangs bei einem Hasen-Fuchs-Treffen; d modelliert den Beutebedarf der Füchse, genauer: großes d entspricht genügsamen Füchsen, die bereits wenig Beute erfolgreich in Bevölkerungswachstum umsetzen können, und kleines d entspricht gierigen Füchsen.

f) Wie eben gesehen, bedarf die Untersuchung selbst der einfachsten mathematischen Modelle aus der Biologie bereits recht anspruchsvoller Mathematik. Spekulieren Sie darüber, wie verbesserte Modelle aussehen könnten, wie dies das Verhalten der Lösungen abändern würde und wieviel man noch „mit Papier und Bleistift“ beweisen könnte beziehungsweise sollte.

Hausaufgaben (Abgabe: am 13.7., 14:00 Uhr)

H 11.1 *Picard-Iteration*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Picardschen Iterationverfahrens die Lösung von

$$\begin{aligned} &(D) \qquad y' = -2ty, \quad (t \geq 0) \\ &(A) \qquad y(0) = 1. \end{aligned}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Setzen Sie $f(y,t) = -2ty$, sowie $y^{(0)}(t) = 1$ und berechnen Sie die Picard-Iterierten $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ und $y^{(3)}$.

(b) Stellen Sie – motiviert von den Ergebnissen der letzten Teilaufgabe – eine Vermutung auf, wie $y^{(n)}(t)$ allgemein lauten könnte und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

(c) Folgern Sie aus Satz 6.2, dass $y_*(t) = \lim_{n\to\infty} y^{(n)}(t)$ existiert und (D), (A) löst. Verifizieren Sie diese Ergebnisse durch explizites Nachrechnen.

H 11.2 *Produktregeln*

Es seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ (d.h. $A(t)$ ist eine reelle $n \times n$ Matrix) und $b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Das Matrixvektorprodukt $A(t)b(t)$ ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)b(t)\right) = \dot{A}(t)b(t) + A(t)\dot{b}(t).$$

(b) Das Skalarprodukt $b(t) \cdot c(t)$ ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(b(t) \cdot c(t)\right) = \dot{b}(t) \cdot c(t) + b(t) \cdot \dot{c}(t).$$

(c) Für $n = 3$ ist das Vektorprodukt differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(b(t) \times c(t)\right) = \dot{b}(t) \times c(t) + b(t) \times \dot{c}(t).$$

Bemerkung: Eine matrixwertige Abbildung wird komponentenweise differenziert.

H 11.3 *Planetenbewegung*

Die Bewegung eines Planeten der Masse m unter Einfluss der Schwerkraft der Sonne genügt der berühmten, 1667 aufgestellten Newtonschen Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -\alpha \frac{x}{|x|^3}, \qquad (*)$$

wobei $x(t)$ die Position des Schwerpunktes des Planeten zur Zeit t bezeichnet. $\alpha > 0$ ist ein geeigneter Parameter und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

(a) Zeigen Sie die folgenden Erhaltungsgleichungen:

i. Energieerhaltung: $E := \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{\alpha}{|x|} = konst.$

ii. Drehimpulserhaltung $\ell := x \times p = konst$, mit Impuls $p := m\dot{x}$.

iii. Lenzscher Vektor $\epsilon := \frac{x}{|x|} - \frac{1}{\alpha m} p \times \ell = konst.$
Hinweis: Sie können ohne Beweis die Graßmann-Identität $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$ verwenden.

(b) Folgern Sie $\ell \cdot x(t) = konst$. Was bedeutet das geometrisch?
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Hessesche Normalenform.

(c) Wie ändert sich die Erhaltungsgleichung iii., wenn man anstatt $(*)$

$$m\ddot{x} = -q\alpha \frac{x}{|x|^{q+2}}, q \in (0, \infty),\ q \neq 1$$

betrachtet?

Hinweis: Sie dürfen **H 11.2** verwenden.

Tutorübungen (14.-17.7.)

T 11.1 *Differentialgleichungen für vektorwertige Funktionen*

(a) Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Zeigen Sie: $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = e^{\lambda t} v$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (D) \qquad & y'(t) = Ay(t), \\ (A) \qquad & y(0) = v. \end{aligned}$$

(b) Formulieren Sie die Differentialgleichung

$$mz''(x) + dz'(x) + kz(x) = 0$$

mit $m \neq 0$ und $d, k \in \mathbb{R}$, als Differentialgleichung der Form (D),(A) für eine geeignete vektorwertige Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$.

T 11.2 *Eindeutigkeit in Satz 6.1*

Es seien $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, Lipschitz-stetig in der ersten Variablen, und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Es existiert höchstens eine Lösung von

$$\begin{aligned} (D) \qquad & \dot{y} = f(y(t), t), \\ (A) \qquad & y(0) = y_0. \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie: Für Lösungen gilt

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s), s) ds.$$

Schätzen Sie nun die Differenz $|y_1(t) - y_2(t)|$ zweier Lösungen ab.

Beachten Sie: Die Tutorübungen der Gruppe 20 (Pitz) finden am Freitag, den 10.7., ausnahmsweise im Raum MW 1702 statt.