Analysis 2

Zentralübung (am 6.7.)

Z 10.1 *Partialbruchzerlegung des Cotangens, Eulersches Sinusprodukt und Wallissches Produkt*

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(ax)$.

(a) Begründen Sie: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ mit $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie die a_n und zeigen Sie: $\pi \cot(\pi a) = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{a-n} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a-n}$.

(c) Zeigen Sie: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\pi x) = \pi x \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)$.

(d) Folgern Sie aus (c): $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdots = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}$.

Hausaufgaben (Abgabe: am 6.7., 14:00 Uhr)

H 10.1 *Fourier-Reihen*

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cosh(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: $\cosh(\alpha x) = \dfrac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \left(\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \cos(nx) \right)$.

(b) Berechnen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$.

H 10.2 *Parsevalsche Gleichung*

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig, $f(\pi) = f(-\pi)$. Weiter seien f_n, $n \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffizienten von f, und die Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n\, \mathrm{e}^{inx}$ sei absolut konvergent.

(a) Zeigen Sie die *Parsevalsche Gleichung*: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2$.

Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |S_{N,f}(x)|^2 \mathrm{d}x$ und verwenden Sie **T 10.3** und Satz 4.2.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2$ für $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{\pi}{2} - |x|$.

(c) Berechnen Sie $\zeta(4) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

H 10.3 *Differenzierbarkeit von f und Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten*

(a) Sei $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \,\mathrm{e}^{inx}$ eine absolut konvergente Fourier-Reihe und sei die formal differenzierte Reihe $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\, f_n \,\mathrm{e}^{inx}$ ebenfalls absolut konvergent.

Zeigen Sie mithilfe von **T 10.3**: f ist differenzierbar mit $f' = g$.

Hinweis: Wenden Sie **Z 7.1 b)** auf die Folge der Partialsummen $S_{N,f}(x)$ an.

(b) Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und Lipschitz-stetig.

i. Zeigen Sie Satz 5.2 b): Falls $C, \epsilon > 0$ existieren, so dass $|f_n| \leq \dfrac{C}{|n|^{k+1+\epsilon}}$ $\forall\, n \neq 0$, dann ist f k-mal stetig differenzierbar.

ii. Zeigen Sie Satz 5.2 a): Falls f k-mal stetig differenzierbar, existiert $C > 0$, so dass $|f_n| \leq \dfrac{C}{|n|^k}$ $\forall\, n \neq 0$.

Tutorübungen (7.-10.7.)

T 10.1 *Lipschitz-stetige Funktionen*

Welche der folgenden Funktionen sind Lipschitz-stetig?

(a) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\,,\qquad f(y) := \tan y$

(b) $f : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}\,,\qquad f(y) := \tan y$

(c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,,\qquad f(y) := |y|^\alpha,\quad 0 \leq \alpha < 1$

(d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,,\qquad f(y) := |y|^\alpha,\quad \alpha \geq 1$

(e) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,,\qquad f(y) := y \sin\frac{1}{y}$ für $y \neq 0$, $\qquad f(0) := 0$

T 10.2 *Orthogonalität von* $\cos(nx)$, $\sin(nx)$

Zeigen Sie

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$.

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)\,\mathrm{d}x$ sowie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x$ und benützen Sie die Additionstheoreme.

T 10.3 *Gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen*

Zeigen Sie:

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig, $f(-\pi) = f(\pi)$. Zusätzlich sei die Fourier-Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \,\mathrm{e}^{inx}$ absolut konvergent. Dann konvergiert $S_{N,f}$ gleichmäßig gegen f.