Zentrum Mathematik — Technische Universität München

Prof. Dr. Gero Friesecke — SS 2009
Dr. Johannes Giannoulis — Blatt 1

Analysis 2

Hausaufgaben (Abgabe: am 27.4., 14:00 Uhr)

H 1.1 *Visualisierung von Funktionen im Mehrdimensionalen*

(a) Skizzieren Sie den Orbit, sowie falls möglich den Graphen der folgenden Funktionen:

(i) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, (ii) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}$.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
(i) $f(x,y) = x \cdot y$, (ii) $f(x,y) = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$.

(c) Skizzieren Sie die Vektorfelder der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
(i) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (ii) $f(x) = x$, (iii) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

H 1.2 *Offen, abgeschlossen, beides, oder weder noch?*

(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu beweisen, sollen aber einen kurzen Grund angeben.)

a) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$ b) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 2\}$ c) $\Omega = \mathbb{Z}^2$
d) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ e) $\Omega = \mathbb{Q}^2$ f) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$

H 1.3 *Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher*

(a) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) := \begin{pmatrix} xe^{-x^2} \\ 3x^2 - 2x + 7 \\ x\cos x \end{pmatrix}$

ii. $g : (0,\infty) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) := \frac{\log(y^2+z^2)}{x}$

iii. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x,y,z) := \begin{pmatrix} xyz \\ xy + xz + yz \end{pmatrix}$

(b) Zu einer zwei Mal differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, definiert man die Funktion

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_1, \dots, x_n).$$

Diese heißt *Laplace von f*. Bestimmen Sie den Laplace der folgenden Funktionen

i. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$,

ii. $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Tutorübungen (28.-30.4.)

T 1.1 (a) Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$. Skizzieren Sie den Orbit von γ.

Was passiert, wenn Sie $\sin(2t)$ durch $\sin(5t)$ ersetzen?

(b) Es sei $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\rho(x) = x_1^2 \mathrm{e}^{-|x|}$. Skizzieren Sie die Niveauflächen von ρ.

(c) Skizzieren Sie die Vektorfelder der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

i. $f(x) = x\mathrm{e}^{-|x|}$

ii. $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}$

T 1.2 *Offene und abgeschlossene Mengen.*

Wahr oder falsch? "Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A ist genau dann abgeschlossen, wenn sein Komplement $B := \mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist."

T 1.3 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie

(a) f ist differenzierbar,

(b) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$ und $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$ existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$,

(c) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$.

Was hat Ihr Ergebnis mit dem Satz von Schwarz zu tun?