# Inoffizielle Lösungsskizzen: Analysis 2

**Blatt 6**

Diese Skizzen sind inoffiziell, nicht in Absprache mit dem Analysis 2 Team erstellt worden und erheben insbesondere keinen Anspruch auf (vollständige) Korrektheit. Der Autor weist ausdrücklich darauf hin, dass ihre Verwendung auf eigene Gefahr und Verantwortung erfolgt.

**T 6.1** (Impliziter Funktionensatz im $\mathbb{R}^3$)

(a) Zur Wiederholung der impliziter Funktionensatz im $\mathbb{R}^2$:

**Hilfssatz 3.1** Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $c \in \mathbb{R}$ und $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = c\}$ die Niveaumenge zum Wert $c$.
Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ mit $\nabla g(x_0) \neq 0$ gibt es orthonormale Vektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ und eine Zahl $\delta > 0$, ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $h : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass

$$M \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \delta\right\} = \{y_1 e_1 + y_2 e_2 \mid y_1 \in (a, b),\ y_2 = h(y_1)\}\,.$$

Wir verallgemeinern den o. g. Satz:

Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $c \in \mathbb{R}$, $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = c\}$ und sei weiter $x_0 \in M$.
Falls es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt mit $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$, dann gibt es orthonormale Vektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$, eine Zahl $\delta > 0$ und offene Intervalle $(a, b)$, $(c, d) \subset \mathbb{R}^2$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $h : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$M \cap \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x_0| < \delta\right\} = \{y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \mid y_1 \in (a, b),\ y_2 \in (c, d),\ y_3 = h(y_1, y_2)\}\,.$$

(b) Mit etwas überlegen (siehe Erklärungen in der Tutorübung) erhält man

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y, z) := f(x, \sqrt{y^2 + z^2} - a).$$

Zunächst verschwindet der Gradient für $z = 0$, also im Fall $g(x, y, 0) = f(x, y - a)$, genau an den Punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ und an den Punkten $\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei die letzten Punkte $\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht in der Niveaumenge $M$ von $g$ dann liegen.

Also verschwindet der Gradient von $g$ an dem Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ rotiert um die $x$-Achse, d. h. ist $R$ die Rotationsmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

dann verschwindet $\nabla g$ eingeschränkt auf der Niveaumenge $M$ von $g$ an den Punkten[1]

$$R\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}.$$

An allen Stellen, wo der Gradient nicht verschwindet, ist $M$ in einer hinreichend kleinen Umgebung (bzw. Kugel mit hinreichend kleinem Radius um diesen Punkt) lokal ein Graph einer stetig differenzierbaren Funktion.

An den Punkten $R\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$ schneiden sich zwei Kurven.

**T 6.2** (Näherungsrechnung)
Zunächst einmal ist die Funktion $R$ gegeben durch

$$R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

(a) Für die Taylorpolynome $T_1$ und $T_2$ brauchen wir die jeweiligen Ableitungen. Einfaches Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1, R_2) &= \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}\\
\frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1, R_2) &= \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\\
\frac{\partial^2 R}{\partial R_1 \partial R_2}(R_1, R_2) &= \frac{\partial^2 R}{\partial R_2 \partial R_1}(R_1, R_2) = \frac{2R_1^2 R_2 + 2R_1 R_2^2}{(R_1+R_2)^4}\\
\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2}(R_1, R_2) &= -\frac{2R_2^2}{(R_1+R_2)^3}\\
\frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2}(R_1, R_2) &= -\frac{2R_1^2}{(R_1+R_2)^3}.
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir dabei den Satz von Schwarz ausgenutzt: Als gebrochen rationale Funktion ist $R$ überall bis auf an den Nullstellen des Nenners unendlich oft stetig differenzierbar. Daher stimmen die gemischten partiellen Ableitungen überein.[2]

---

[1] Das kann man auch ausrechnen. Das obige war nur die Intuition. Wenn man es ausrechnet, dann erhält man

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ -2(\sqrt{y^2+z^2} - a) \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ -2(\sqrt{y^2+z^2} - a) \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}. \end{pmatrix}$$

Jetzt sieht man, dass die erste Komponente für $x = 0$ oder $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ verschwindet. Die zweite und die dritte Komponente verschwindet, wenn der Ausdruck im Klammern (also $\sqrt{y^2+z^2} - a$) verschwindet. Diese Ausdrücke beschreiben praktisch Kreise mit Radius $a$. Die Fälle, bei denen $y = 0$ oder $z = 0$ in der zweiten bzw. dritten Komponente, werden durch den Fall $\sqrt{y^2+z^2} - a = 0$ abgedeckt. Oder so ähnlich...

[2] Das solltet Ihr versuchen stets anzuwenden! In der studienbegleitenden Prüfung kann das viel Zeit ersparen!

Nach dem Satz von Taylor ist das erste Taylorpolynom gegeben durch

$$\begin{aligned} T_1\left(\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right) &= R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix} + \frac{\partial R}{\partial R_1}\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}h_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}h_2 \\ &= \frac{100}{3} + \frac{4}{9}h_1 + \frac{1}{9}h_2. \end{aligned}$$

Das zweite Taylorpolynom ist weiter gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2\left(\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right) &= T_1\left(\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right) + \\ &\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2}\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}h_1^2 + 2\frac{\partial^2 R}{\partial R_1 \partial R_2}\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}h_1h_2 + \frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2}\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}h_2^2\right] \\ &= \frac{100}{3} + \frac{4}{9}h_1 + \frac{1}{9}h_2 + \frac{1}{2\cdot 675}\left[-4h_1^2 + 4h_1h_2 - h_2^2\right] \end{aligned}$$

(b) Jetzt dürfen $R_1 = 50$ und $R_2 = 100$ um bis zu 1% schwanken, d. h. $R_1$ darf sich zwischen 49,5 und 50,5 und $R_2$ zwischen 99 und 101 ändern. Gefragt ist nach der maximalen Änderung von $R$ in erster Taylor-Näherung.

Der Satz von Taylor sagt ja angewendet auf unser $R$ und $R_1 = 50$, $R_2 = 100$ aus

$$R\begin{pmatrix}50+h_1\\100+h_2\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix} + \nabla R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} + o(|h|)$$

Das $h_1$ bzw. $h_2$ drückt also unsere 1%-Schwankung aus. Also ist $h_1 \in [-0,5, 0,5]$, $h_2 \in [-1, 1]$. Bis auf Terme höherer Ordnung, im Speziellen bis auf $o(|h|)$, ist also der Fehler $\left|R\begin{pmatrix}50+h_1\\100+h_2\end{pmatrix} - R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix}\right|$ gegeben durch

$$\left|\nabla R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right|.$$

Dieser wird maximal für $h_1 = 0,5$ und $h_2 = 1$, denn dann ist

$$\left|\nabla R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right| \leq \left|\nabla R\begin{pmatrix}50\\100\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0,5\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}$$

Das geht auch ein bisschen einfacher, weil anscheinend in der Aufgabenstellung nur $R_1$ und $R_2$ um $\pm 1\%$ verändert werden und nicht um bis zu $\pm 1\%$, also kann man gleich für $h_1 = 0,5$ und für $h_2 = 1$ einsetzen.