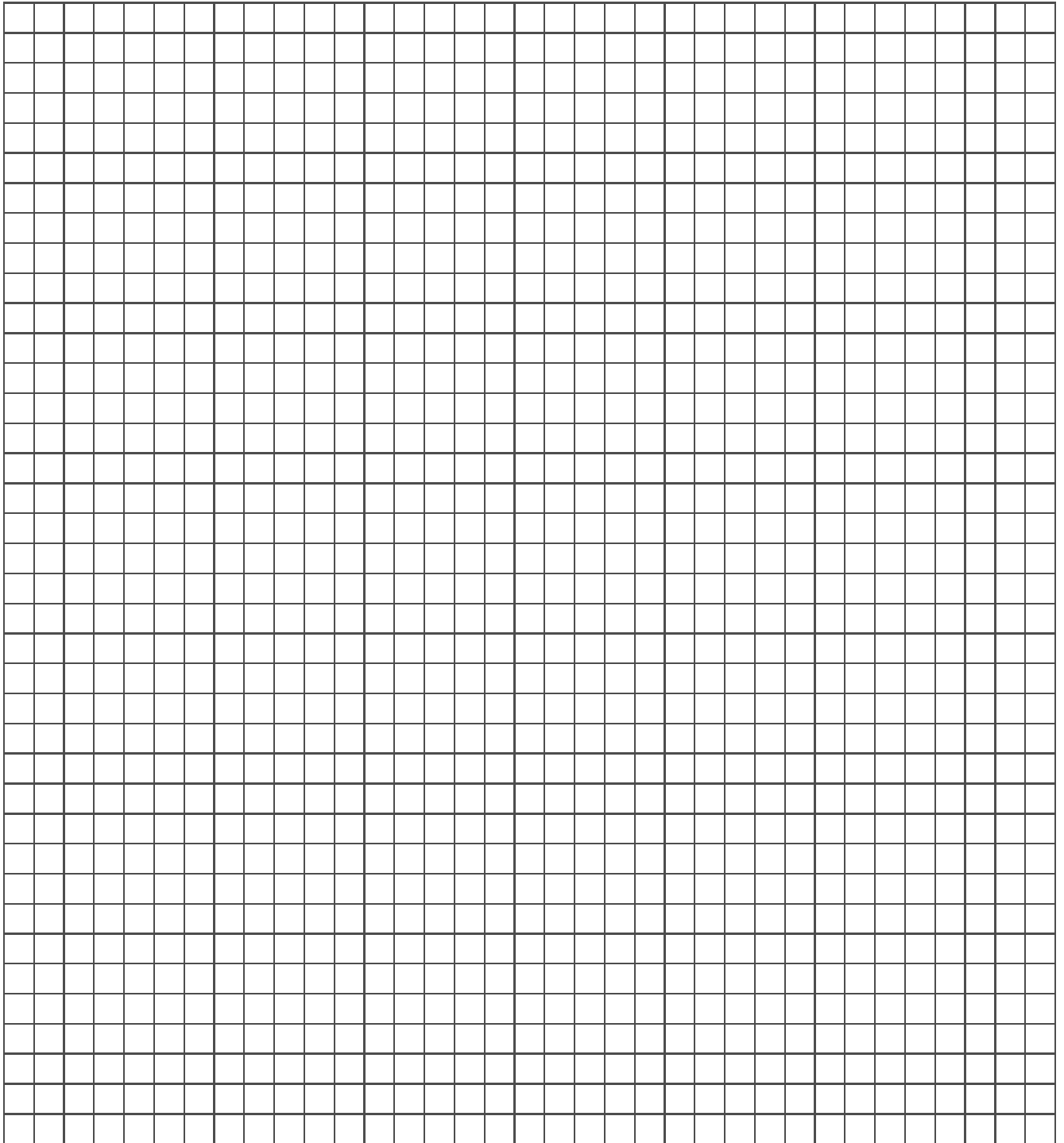
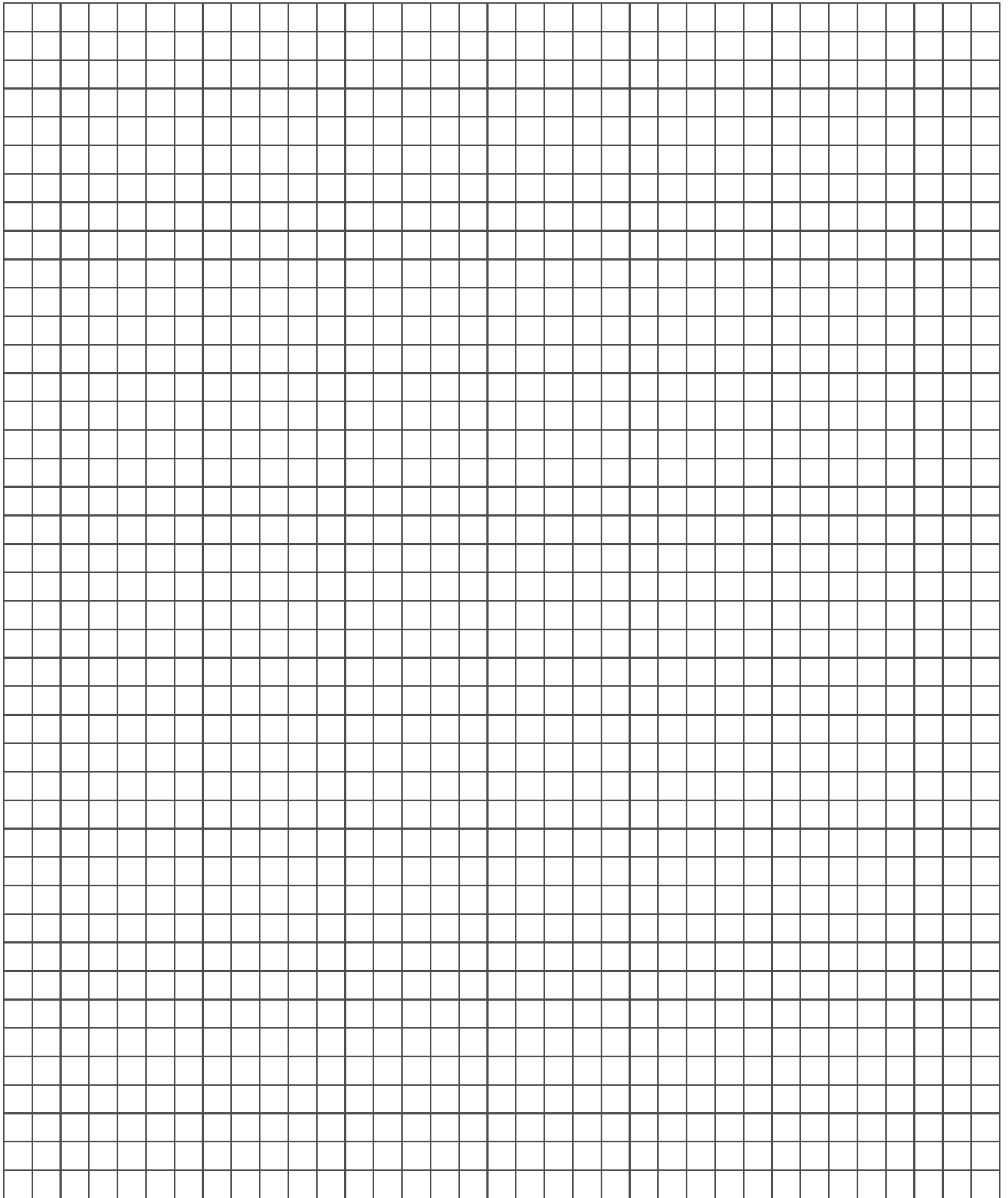


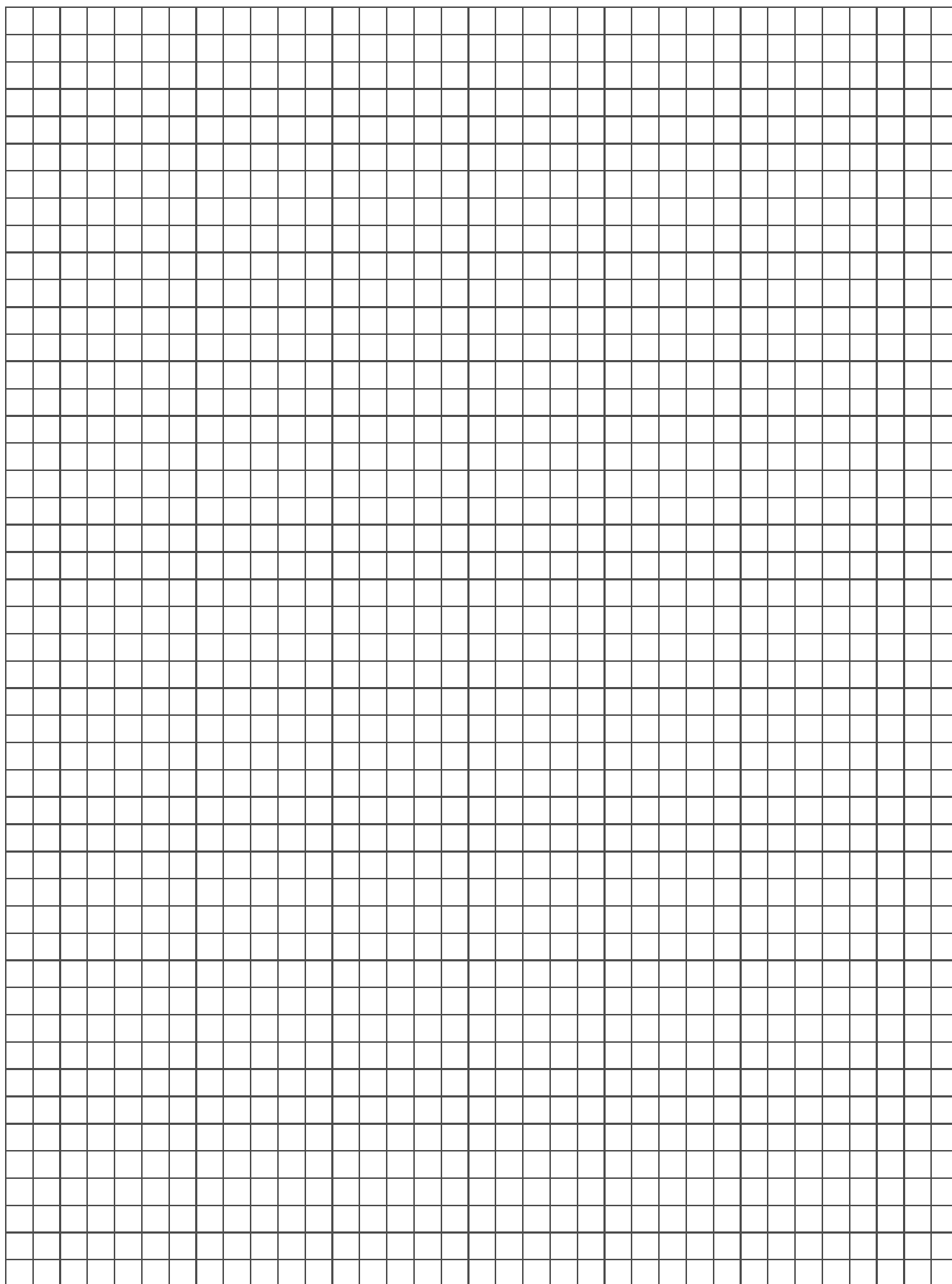
- a) Definieren Sie den Begriff des Grenzwertes einer Folge reeller Zahlen.
- b) Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit genau zwei Häufungspunkten an.
- c) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n)^{\frac{2}{n}} = \boxed{}$$



- a) Zeigen Sie: Für jedes $a \in (1, \infty)$ gibt es genau eine positive Lösung x der Gleichung $\cosh x = a$.
- b) Geben Sie eine Näherungslösung an, indem Sie \cosh durch das Taylorpolynom 2. Ordnung im Punkt 0 ersetzen. Für welche a erwarten Sie, dass exakte Lösung und Näherungslösung nahe beieinander liegen?





Beantworten Sie folgende Fragen ohne Begründung durch Ankreuzen von **Richtig** oder **Falsch**. Jede richtige Antwort wird mit **+3 Punkten**, jede unbeantwortete mit **0 Punkten** und jede falsche mit **-9 Punkten** bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl beträgt **0 Punkte**.

Gegeben sei eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Die Reihe ist absolut konvergent.

Richtig

Falsch

b) Es existieren reelle Zahlen b_n mit $b_n \geq |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Richtig

Falsch

c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist ebenfalls konvergent.

Richtig

Falsch

d) Es existiert ein $q \in (0, 1)$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle hinreichend großen n .

Richtig

Falsch

e) Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Richtig

Falsch

f) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergent.

Richtig

Falsch

g) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent.

Richtig

Falsch

h) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die durch $b_N := f\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)$ definierte Folge (b_N) konvergent.

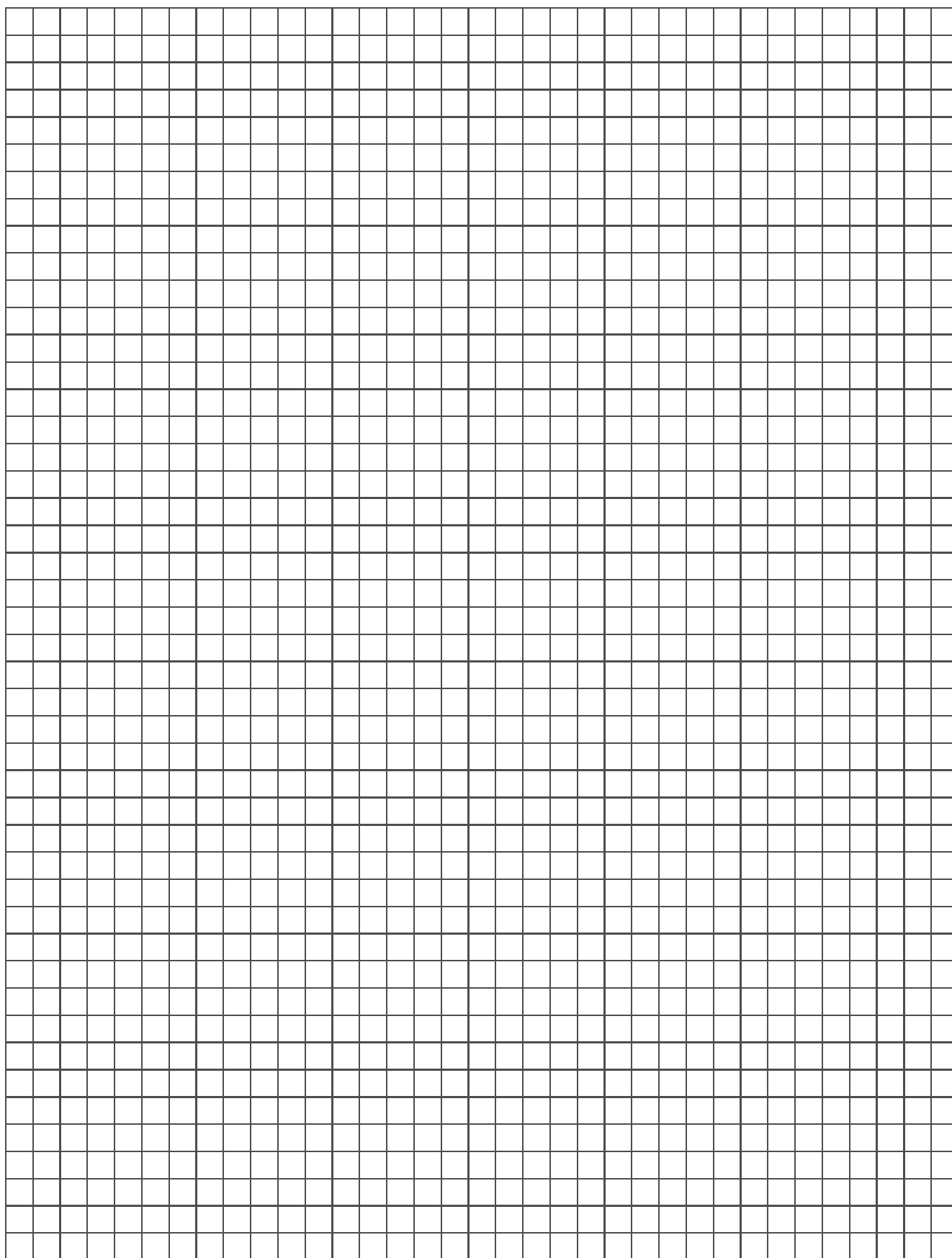
Richtig

Falsch

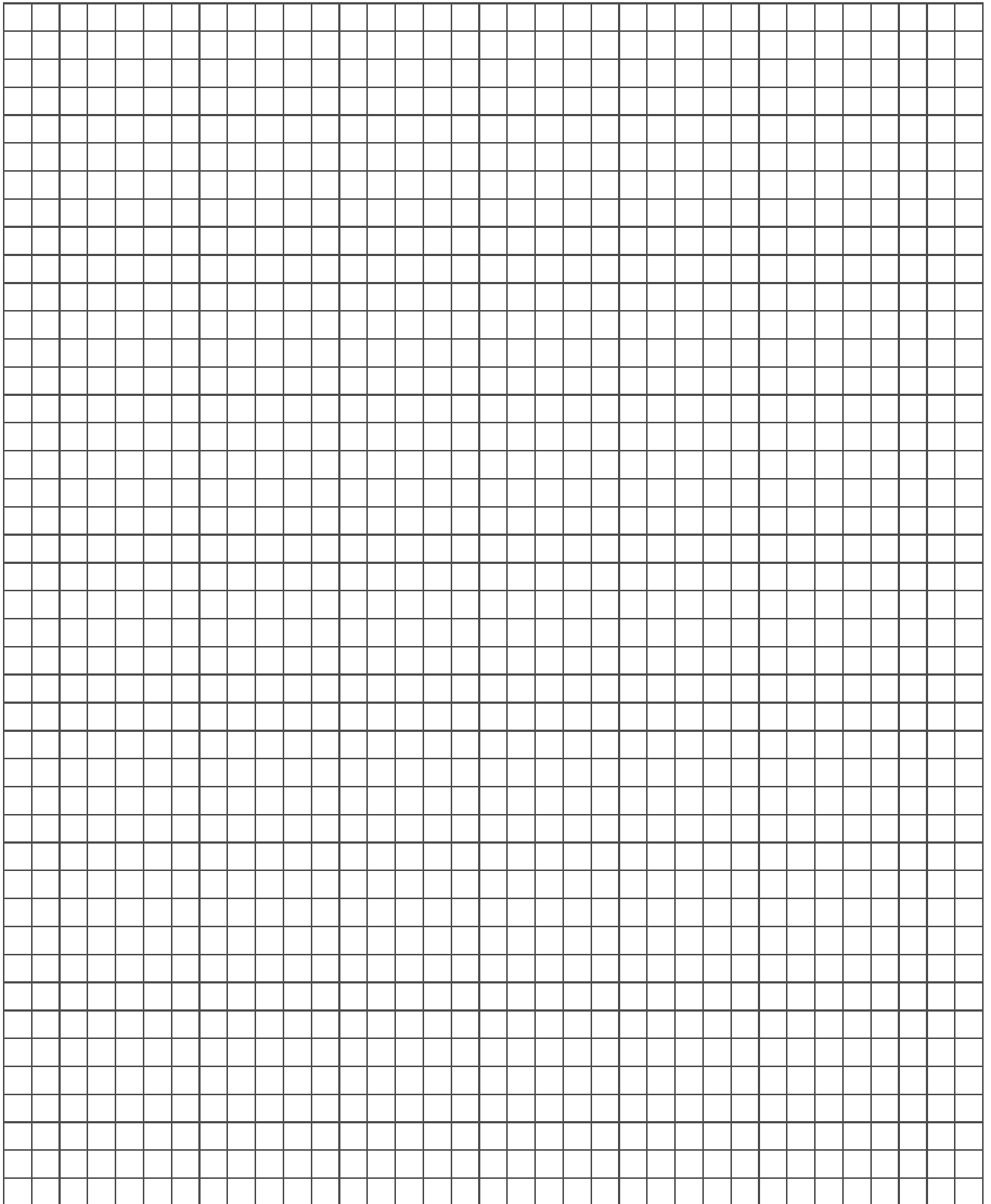
i) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die durch $b_N := \sum_{n=1}^N f(a_n)$ definierte Folge (b_N) konvergent.

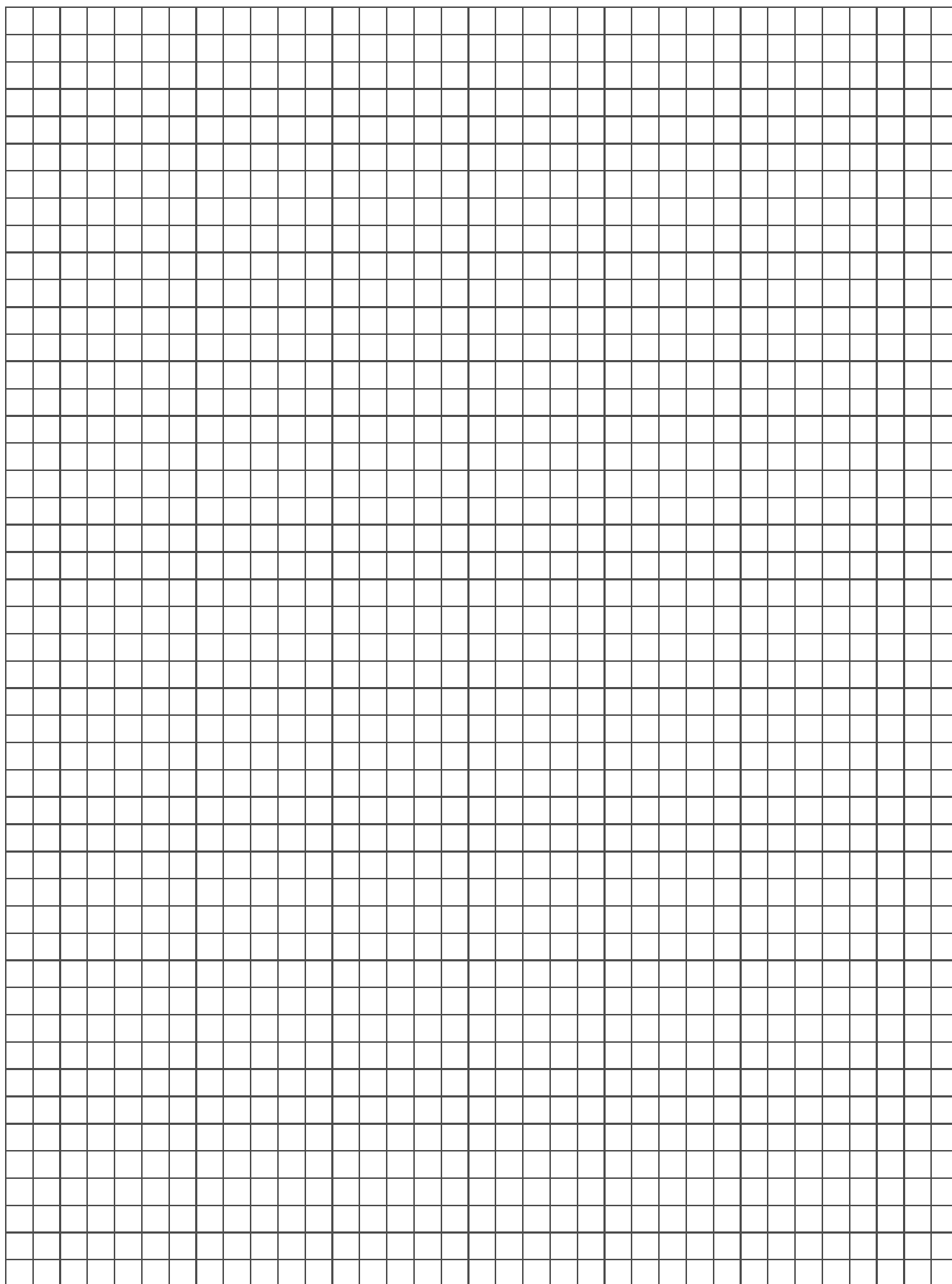
Richtig

Falsch



Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstrass: Ist $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine Minimumsstelle $x_* \in I$ von f .





a) (12 Punkte) Geben Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Wert der folgenden Integrale an:

i) $\int_0^\pi x \cos x \, dx =$

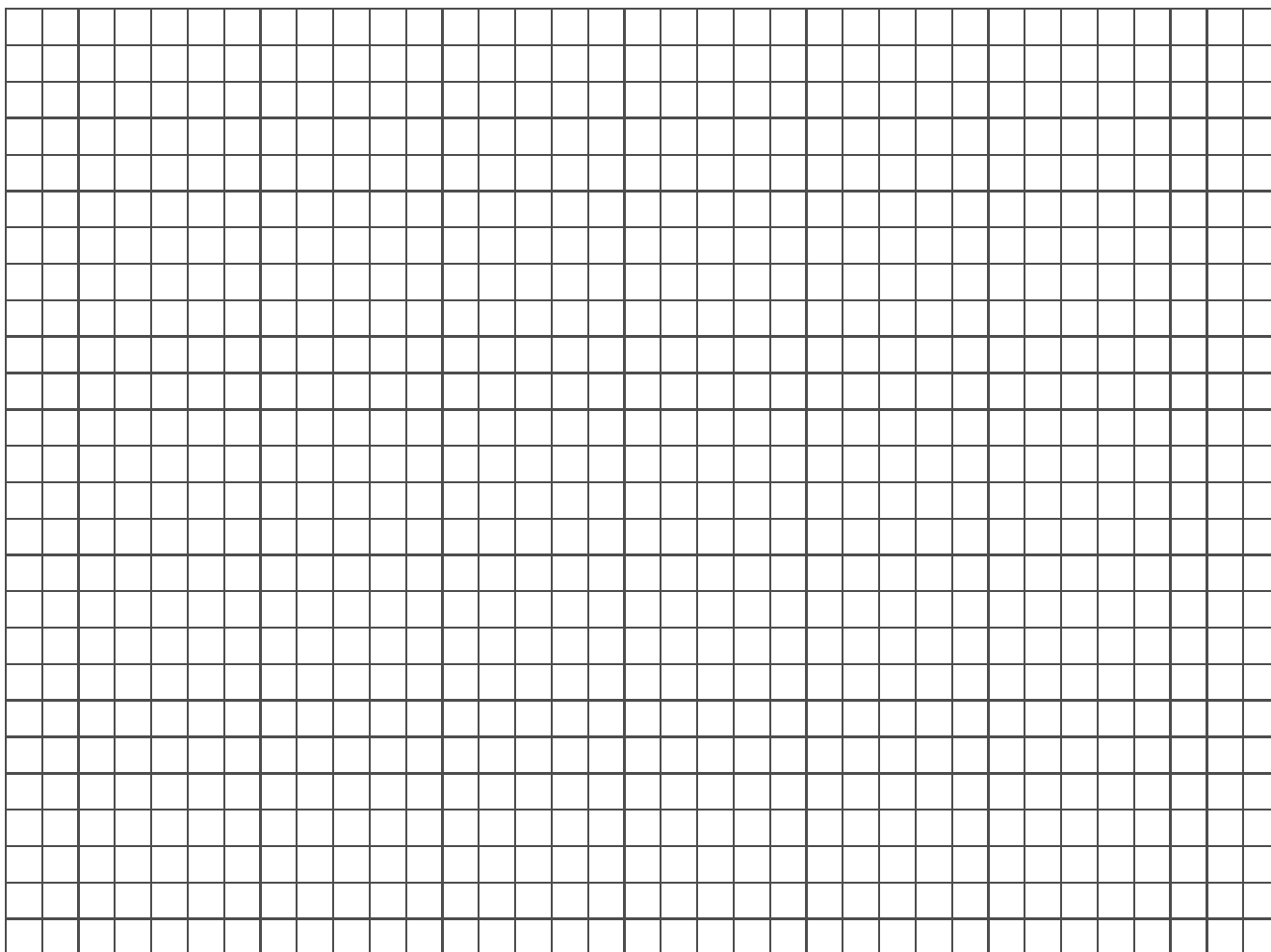
ii) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(3-x^2)^{1/2}} \, dx =$

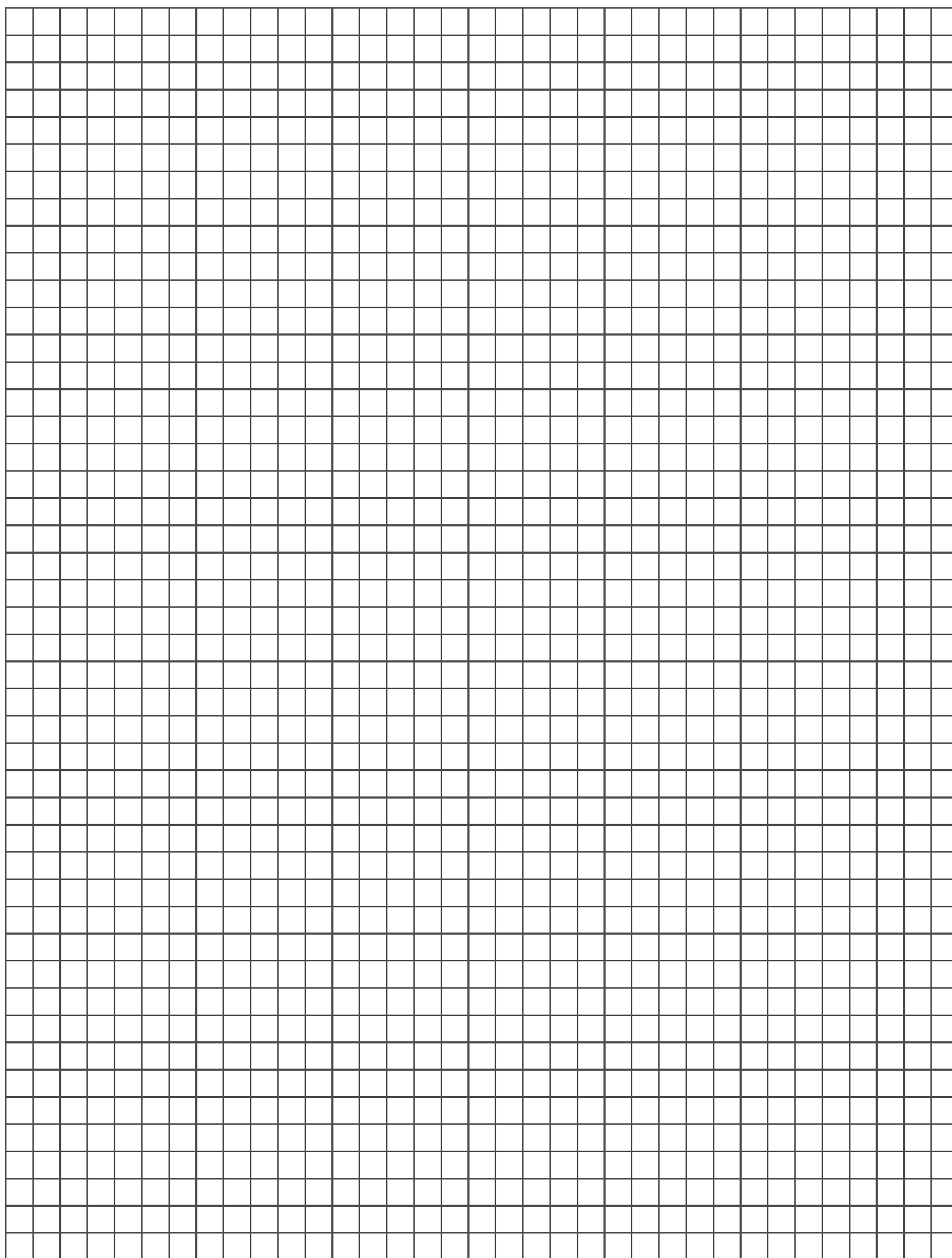
iii) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} \, dx =$

b) (7 Punkte) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\sin(nx)}{(nx)^2} \, dx = 0.$$

Hinweis: Versuchen Sie nicht, das Integral explizit zu berechnen.





a) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** auf einem möglichst großen Intervall $[0, T)$ die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen:

i) $y' = y^6, \quad y(0) = 1.$ Lösung:

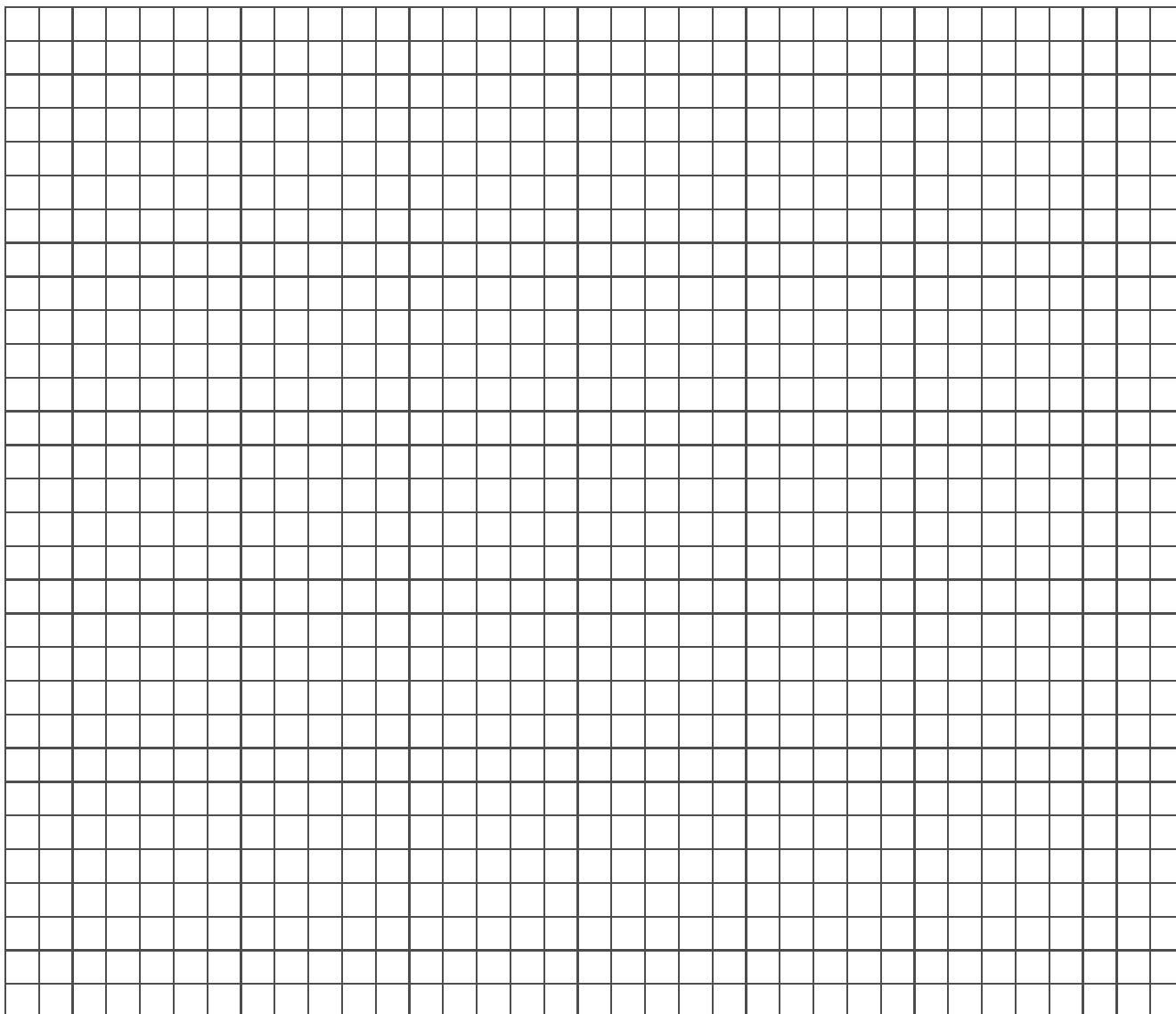
Intervall:

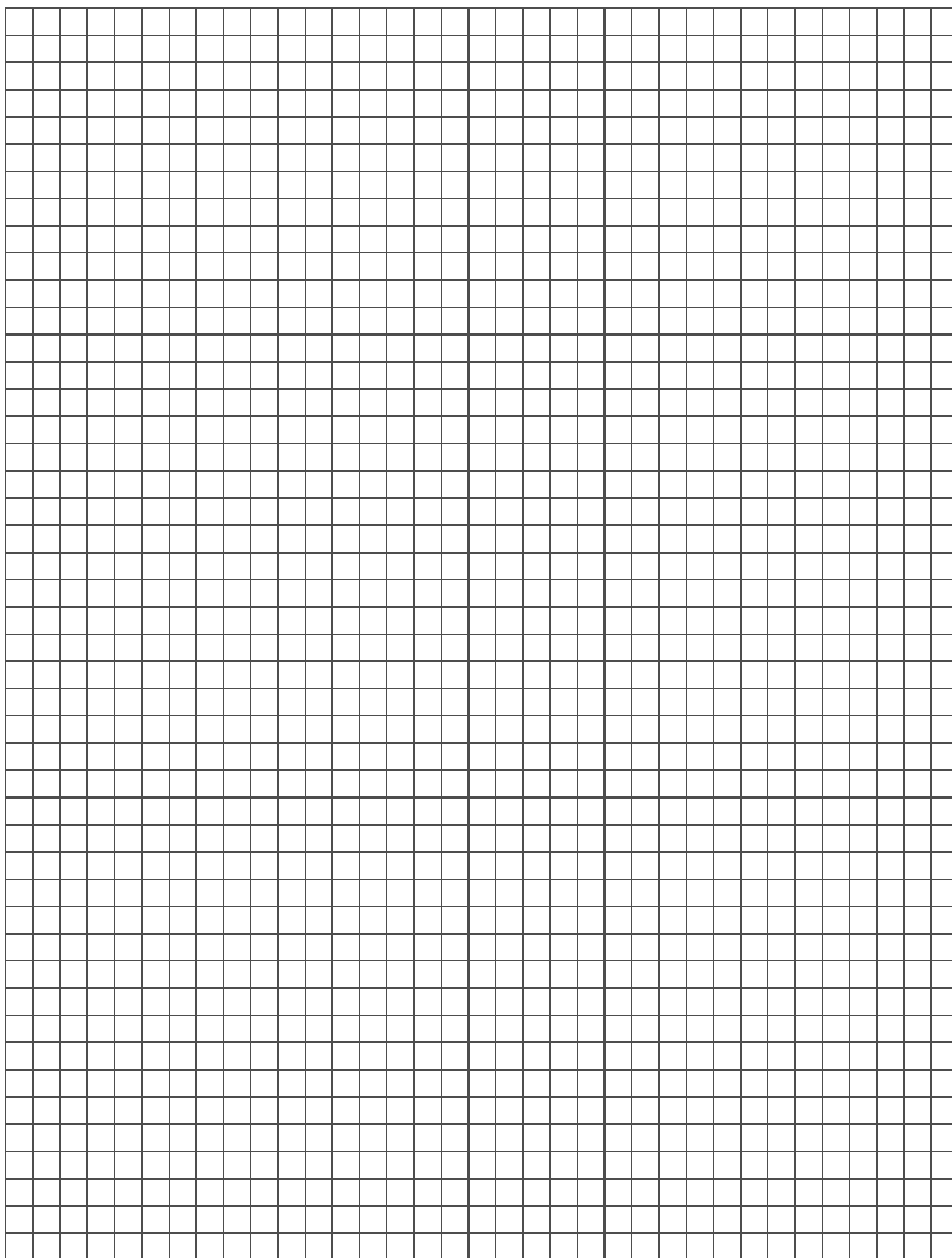
ii) $y' = -x^3 y, \quad y(0) = 1.$ Lösung:

Intervall:

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 8y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$



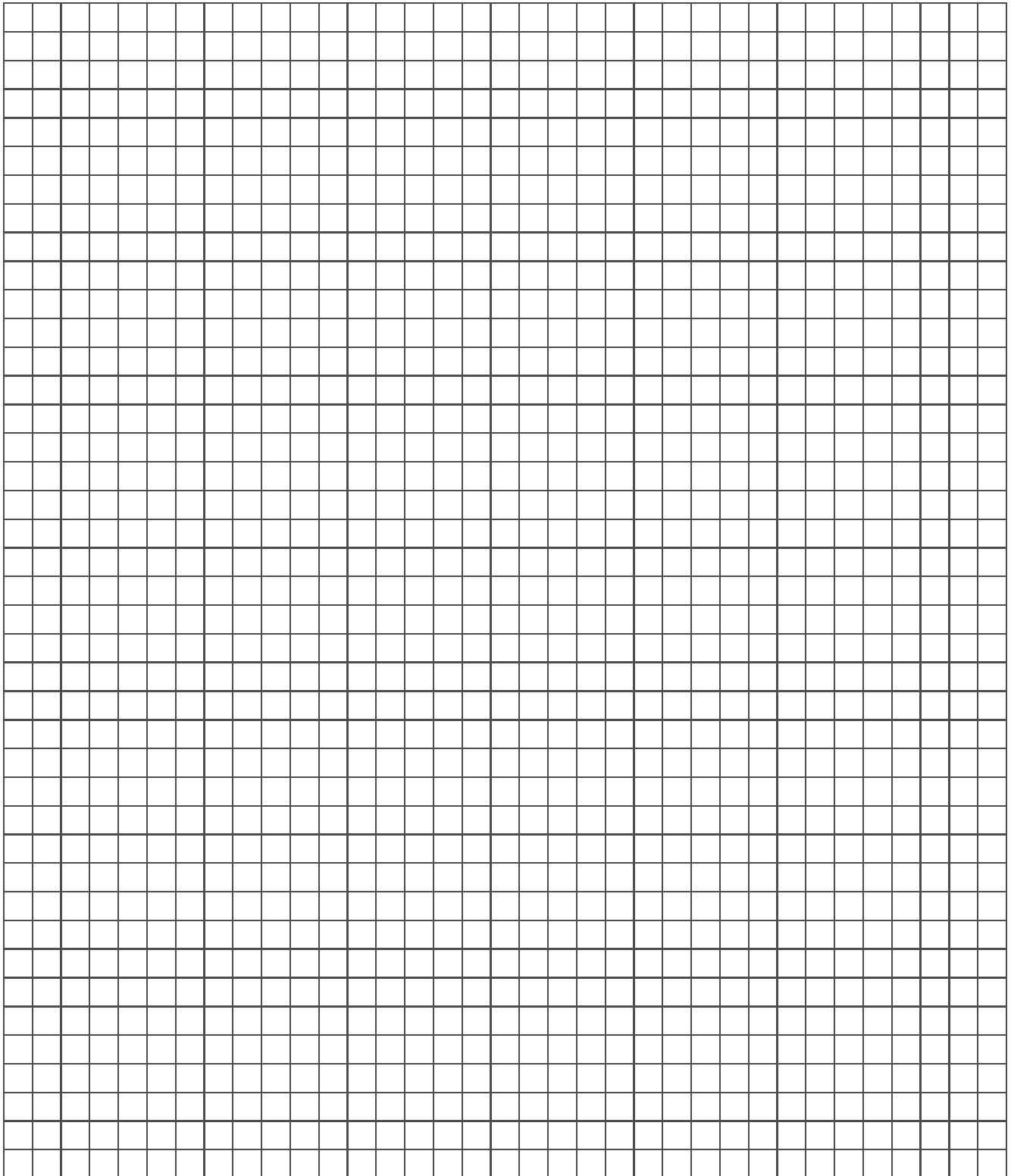


Sei $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $u(a) = u(b) = 0$.

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b (u')^2 \leq \frac{1}{2} \int_a^b u^2 + \frac{1}{2} \int_a^b (u'')^2.$$

Hinweis: Die Ungleichung $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ für reelle Zahlen a und b kann nützlich sein.



Studienbegleitende Prüfung

Analysis 1

Aufgabe 1 (9 Punkte)

- a) Definieren Sie den Begriff des Grenzwertes einer Folge reeller Zahlen.
b) Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit genau zwei Häufungspunkten an.
c) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n)^{\frac{2}{n}} = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Für jedes $a \in (1, \infty)$ gibt es genau eine positive Lösung x der Gleichung $\cosh x = a$.
b) Geben Sie eine Näherungslösung an, indem Sie \cosh durch das Taylorpolynom 2. Ordnung im Punkt 0 ersetzen. Für welche a erwarten Sie, dass exakte Lösung und Näherungslösung nahe beieinander liegen?

Aufgabe 3 (27 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen ohne Begründung durch Ankreuzen von **Richtig** oder **Falsch**. Jede richtige Antwort wird mit **+3 Punkten**, jede unbeantwortete mit **0 Punkten** und jede falsche mit **-9 Punkten** bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl beträgt **0 Punkte**.

Gegeben sei eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) Die Reihe ist absolut konvergent.

Richtig

Falsch

- b) Es existieren reelle Zahlen b_n mit $b_n \geq |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Richtig

Falsch

- c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist ebenfalls konvergent.

Richtig

Falsch

- d) Es existiert ein $q \in (0, 1)$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle hinreichend großen n .

Richtig

Falsch

- e) Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Richtig

Falsch

- f) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergent.

Richtig

Falsch

- g) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent.

Richtig

Falsch

- h) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Folge $b_N := f\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)$ konvergent.

Richtig

Falsch

- i) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Folge $b_N := \sum_{n=1}^N f(a_n)$ konvergent.

Richtig

Falsch

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Bolzano–Weierstrass: Ist $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine Minimumsstelle $x_* \in I$ von f .

Aufgabe 5 (19 Punkte)

a) (12 Punkte) Geben Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Wert der folgenden Integrale an:

i) $\int_0^\pi x \cos x \, dx =$

ii) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(3-x^2)^{1/2}} \, dx =$

iii) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} \, dx =$

b) (7 Punkte) Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\sin(nx)}{(nx)^2} \, dx = 0.$$

Hinweis: Versuchen Sie nicht, das Integral explizit zu berechnen.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** auf einem möglichst großen Intervall $[0, T)$ die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen:

i) $y' = y^6, \quad y(0) = 1.$ Lösung:

Intervall:

ii) $y' = -x^3 y, \quad y(0) = 1.$ Lösung:

Intervall:

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 8y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Sei $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $u(a) = u(b) = 0$.

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b (u')^2 \leq \frac{1}{2} \int_a^b u^2 + \frac{1}{2} \int_a^b (u'')^2.$$

Hinweis: Die Ungleichung $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ für reelle Zahlen a und b kann nützlich sein.