Aufgabe 1 (9 Punkte) **Seite 1**

a) Definieren Sie den Begriff des Grenzwertes einer Folge reeller Zahlen.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit genau zwei Häufungspunkten an.

c) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}(5n)^{\frac{2}{n}} = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte) **Seite 2**

a) Zeigen Sie: Für jedes $a \in (1, \infty)$ gibt es genau eine positive Lösung x der Gleichung $\cosh x = a$.

b) Geben Sie eine Näherungslösung an, indem Sie cosh durch das Taylorpolynom 2. Ordnung im Punkt 0 ersetzen. Für welche a erwarten Sie, dass exakte Lösung und Näherungslösung nahe beieinander liegen?

Beantworten Sie folgende Fragen ohne Begründung durch Ankreuzen von **Richtig** oder **Falsch**. Jede richtige Antwort wird mit $+$**3 Punkten**, jede unbeantwortete mit **0 Punkten** und jede falsche mit **-9 Punkten** bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl beträgt **0 Punkte**.

Gegeben sei eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Die Reihe ist absolut konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

b) Es existieren reelle Zahlen b_n mit $b_n \geq |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist ebenfalls konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

d) Es existiert ein $q \in (0,1)$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle hinreichend großen n.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

e) Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

f) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

g) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

h) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die durch $b_N := f\big(\sum_{n=1}^{N} a_n\big)$ definierte Folge (b_N) konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

i) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die durch $b_N := \sum_{n=1}^{N} f(a_n)$ definierte Folge (b_N) konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstrass: Ist $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine Minimumsstelle $x_* \in I$ von f.

a) (12 Punkte) Geben Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Wert der folgenden Integrale an:

i) $$\int_0^{\pi} x \cos x \,\mathrm{d}x =$$

ii) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(3-x^2)^{1/2}} \,\mathrm{d}x =$$

iii) $$\int_0^{1} \frac{1}{x^2-4} \,\mathrm{d}x =$$

b) (7 Punkte) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(nx)^2} \,\mathrm{d}x = 0.$$

Hinweis: Versuchen Sie nicht, das Integral explizit zu berechnen.

a) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** auf einem möglichst großen Intervall $[0, T)$ die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen:

i) $y' = y^6, \quad y(0) = 1.$ Lösung: Intervall:

ii) $y' = -x^3 y, \quad y(0) = 1.$ Lösung: Intervall:

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 8y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Sei $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $u(a) = u(b) = 0$.
Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b (u')^2 \leq \frac{1}{2} \int_a^b u^2 + \frac{1}{2} \int_a^b (u'')^2.$$

Hinweis: Die Ungleichung $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ für reelle Zahlen a und b kann nützlich sein.

Studienbegleitende Prüfung
Analysis 1

Aufgabe 1 (9 Punkte)

a) Definieren Sie den Begriff des Grenzwertes einer Folge reeller Zahlen.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit genau zwei Häufungspunkten an.

c) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} (5n)^{\frac{2}{n}} = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für jedes $a \in (1, \infty)$ gibt es genau eine positive Lösung x der Gleichung $\cosh x = a$.

b) Geben Sie eine Näherungslösung an, indem Sie cosh durch das Taylorpolynom 2. Ordnung im Punkt 0 ersetzen. Für welche a erwarten Sie, dass exakte Lösung und Näherungslösung nahe beieinander liegen?

Aufgabe 3 (27 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen ohne Begründung durch Ankreuzen von **Richtig** oder **Falsch**. Jede richtige Antwort wird mit **+3 Punkten**, jede unbeantwortete mit **0 Punkten** und jede falsche mit **-9 Punkten** bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl beträgt **0 Punkte**.

Gegeben sei eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Die Reihe ist absolut konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

b) Es existieren reelle Zahlen b_n mit $b_n \geq |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist ebenfalls konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

d) Es existiert ein $q \in (0, 1)$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle hinreichend großen n.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

e) Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

f) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

g) Für alle $|z| < 1$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

h) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Folge $b_N := f\big(\sum_{n=1}^{N} a_n\big)$ konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

i) Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Folge $b_N := \sum_{n=1}^{N} f(a_n)$ konvergent.

Richtig ☐ **Falsch** ☐

Aufgabe 4 (14 Punkte)
Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Bolzano–Weierstrass: Ist $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine Minimumsstelle $x_* \in I$ von f.

Aufgabe 5 (19 Punkte)
a) (12 Punkte) Geben Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** den Wert der folgenden Integrale an:

i) $$\int_0^\pi x \cos x \,\mathrm{d}x = \boxed{}$$

ii) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(3-x^2)^{1/2}} \,\mathrm{d}x = \boxed{}$$

iii) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2-4} \,\mathrm{d}x = \boxed{}$$

b) (7 Punkte) Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sin(nx)}{(nx)^2} \,\mathrm{d}x = 0.$$

Hinweis: Versuchen Sie nicht, das Integral explizit zu berechnen.

Aufgabe 6 (12 Punkte)
a) Bestimmen Sie **ohne Angabe Ihrer Rechenwege** auf einem möglichst großen Intervall $[0, T)$ die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen:

i) $y' = y^6, \quad y(0) = 1.$ Lösung: $\boxed{}$ Intervall: $\boxed{}$

ii) $y' = -x^3 y, \quad y(0) = 1.$ Lösung: $\boxed{}$ Intervall: $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 8y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe 7 (7 Punkte)
Sei $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $u(a) = u(b) = 0$.
Beweisen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b (u')^2 \le \frac{1}{2} \int_a^b u^2 + \frac{1}{2} \int_a^b (u'')^2.$$

Hinweis: Die Ungleichung $a \cdot b \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ für reelle Zahlen a und b kann nützlich sein.