Kurzskript zur Vorlesung Analysis 2

Prof. G. Friesecke
Zentrum Mathematik, TU München

SS 2009

Abstract

Dieses Kurzskript ersetzt weder die Teilnahme an, noch die Mitschrift aus, der Vorlesung. Es enthält lediglich die formalen Definitionen und Sätze der Vorlesung, aber keine Beispiele, Beweise oder Erläuterungen. Es ist als zuverlässiges Nachschlagewerk für erstere gedacht.

1 Funktionen von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ (2W)

1.1 Der Raum $\mathbb{R}^n$

Definition $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\ mal}$

Elemente des $\mathbb{R}^n$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$–Vektorraum unter komponentenweiser Addition und komponentenweiser Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Euklidischer) Absolutbetrag eines Punktes/Vektors im $\mathbb{R}^n$: $|v| := \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_j)^2}$

(Euklidischer) Abstand zweier Punkte im $\mathbb{R}^n$: $|x - y| := \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$

Dreiecksungleichung: $|x + y| \le |x| + |y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Definition Eine Folge $(a^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $a^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}^n$, Schreibweise: $a^{(k)} \to a$ oder $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a^{(k)} - a| < \epsilon$ für alle $k \geq N_0$.

Bemerkung: Die folgenden Aussagen sind aequivalent:
(1) $a^{(k)} \to a$
(2) $|a^{(k)} - a| \to 0$
(3) $|a_j^{(k)} - a_j| \to 0 \ \forall j = 1, ..., n$
(4) $a_j^{(k)} \to a_j \ \forall j = 1, ..., n$.
Insbesondere gilt (1)$\Longleftrightarrow$(4), d.h. Konvergenz ist aequivalent zu komponentenweiser Konvergenz.

1.2 Visualisierung von Funktionen im Mehrdimensionalen

Siehe Mitschrift.

1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn zu jedem $x_0 \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodaß $\{x \in \mathbb{R}^n | |x - x_0| < \varepsilon\} \subseteq \Omega$.

Definition $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn für jede Folge $\{a^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a^{(k)} \in K$ und $a^{(k)} \to a \in \mathbb{R}^n$ $(k \to \infty)$ gilt: $a \in K$.

1.4 Stetigkeit

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. f heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in \Omega$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\text{Betragsfunktion auf } \mathbb{R}^m} < \varepsilon$$

für alle x mit

$$x \in \Omega, \quad \underbrace{|x - x_0|}_{\text{Betragsfunktion auf } \mathbb{R}^n} < \delta.$$

Bemerkung: Das Folgenkriterium aus Analysis 1 für Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt x_0 gilt auch für $m, n > 1$.

1.5 Ableitung

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt partiell nach x_j differenzierbar im Punkt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wenn

$$\frac{1}{h}(f(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n))$$

konvergent für $h \to 0$. Falls ja, heißt der Grenzwert **partielle Ableitung von** f **nach** x_j im Punkt x. Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m$

Bemerkung Schreibe

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Wegen Aequivalenz von Konvergenz und komponentenweiser Konvergenz gilt: f partiell nach x_j differenzierbar genau dann, wenn jede Komponente f_k partiell nach x_j differenzierbar. Falls ja, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}.$$

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar im Punkt** $x \in \Omega$, wenn f partiell nach x_j differenzierbar im Punkt x, für alle j. Falls ja, heißt die $m \times n$ Matrix

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Ableitung von f im Punkt x. f heißt **differenzierbar**, falls f differenzierbar in jedem Punkt $x \in \Omega$. f heißt **stetig differenzierbar**, wenn zusätzlich die partiellen Ableitungen von f stetig sind.

Theorem 1.1 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $g : \Omega' \to \Omega$. Sei $h(x) := f(g(x))$ (***Verkettung** *von f und g). Falls g stetig differenzierbar im Punkt $x \in \Omega'$ und f stetig differenzierbar im Punkt $g(x) \in \Omega$, ist h differenzierbar im Punkt x, und es gilt*

$$\underbrace{Dh(x)}_{\in M^{m\times k}} = \underbrace{Df(g(x))}_{\in M^{m\times n}} \underbrace{Dg(x)}_{\in M^{n\times k}}.$$

Theorem 1.2 *(Charakterisierung der Ableitung als bestapproximierende lineare Abbildung) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$. Betrachte die Aussagen*

(i) f ist differenzierbar im Punkt x

(ii) Es existiert eine lineare Abbildung $A \in M^{m\times n}$ derart, dass

$$\textbf{(*)} \qquad \frac{|f(x+h) - (f(x) + Ah)|}{|h|} \to 0(|h| \to 0).$$

Es gilt (ii) $\Rightarrow$ (i); (i) und Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f im Punkt $x \Rightarrow$ (ii). Falls (ii) erfüllt, ist A eindeutig, und es gilt:

$$A = Df(x).$$

Interpretation von (*): Der Fehler in der Approximation $f(x+h) \approx f(x) + Ah$ ist kleiner als $const. \cdot |h|$, insbesondere kleiner als $|Ah|$.

Definition Falls Aussage (ii) erfüllt ist, nennt man f "total differenzierbar im Punkt x".

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in \Omega e \in \mathbb{R}^n, |e| = 1$. Die reelle Zahl $\frac{d}{dt} f(x_0 + te)|_{t=0}$ heißt **Richtungsableitung** von f am Punkt x_0 in Richtung e.

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Der Vektor

$$\text{grad}\, f(x) = Df(x)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt Gradient von f am Punkt x.

Theorem 1.3 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, grad $f(x) \neq 0$. grad $f(x)$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f, das heißt für alle $e \in \mathbb{R}^n, |e| = 1$ gilt*

$$|\frac{d}{dt} f(x+te)|_{t=0}| \leq |\mathrm{grad} f(x)|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $e = \pm \frac{\mathrm{grad} f(x)}{|\mathrm{grad} f(x)|}$.

Definition (Höhere partielle Ableitungen): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

differenzierbar. Falls die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, heißt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(x)$ **zweite partielle Ableitung** von f nach x_i, x_j. Falls $i = j$, schreibt man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$. f heißt 2 mal differenzierbar, falls f differenzierbar ist und alle (ersten) partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$, differenzierbar sind.

Analog sind höhere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x), \quad i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\},$$

definiert.

Theorem 1.4 *(Satz von Schwarz) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 2 mal differenzierbar, und seien die die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig im Punkt x. Dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

1.6 Integral

Definition Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\, dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f_1\, dx \\ \vdots \\ \int_a^b f_n\, dx \end{pmatrix},$$

d.h. das Integral ist komponentenweise definiert.

Definition $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalgebiet**, wenn $a < b$ und stetige Funktionen $\alpha, beta : [a, b\} \to \mathbb{R}$ mit $alpha \leq \beta$ existieren, sodaß

$$\Omega = \left\{(x, y) \in m^2 |\ a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(y)\right\}.$$

Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Normalgebiet, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. $\int_\Omega f := \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\right) dx$, d.h. das Integral ist durch sukzessive Integration über die Koordinaten definiert.

2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. K heißt **beschränkt**, wenn $C \geq 0$ existiert mit $|x| \leq C$ für alle $x \in K$.

Definition Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x_* \in K$ heißt Maximumsstelle [Minimumsstelle] einer Funktion $f : K \to \mathbb{R}$, wenn $f(x) \leq [\geq] f(x_*)$ für alle $x \in K$.

Satz 2.1 (vgl. Satz 5.4 aus Analysis 1) (Existenz von Maxima und Minima)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren (mindestens) eine Maximumsstelle $x_+ \in K$ und (mindestens) eine Minimumsstelle $x_- \in K$ von f.

Satz 2.2 (Satz von Bolzano - Weierstrass): Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abeschlossen und beschränkt. Dann besitzt jede Folge $\{a^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $a^{(j)} \in K$ mindestens einen Häufungspunkt a mit $a \in K$.

Ausblick: In allgemeinen (z.B. unendlich-dimensionalen) normierten Vektorräumen oder metrischen Räumen heißen Teilmengen mit obiger Häufungspunkteigenschaft **kompakt**. Satz 2.2 besagt, dass für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gilt: abgeschlossen + beschränkt $\Longrightarrow$ kompakt. Die Umkehrung gilt trivialerweise, d.h. insgesamt gilt für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$: abgeschlossen und beschränkt $\Longleftrightarrow$ kompakt. Vorsicht: In unendlich-dimensionalen Vektorräumen gilt diese Äquivalenz nicht. Solche Vektorräume werden in der **Funktionalanalysis** untersucht.

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt **gleichmäßig stetig** auf Ω, wenn $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ **unabhängig von** x_0 existiert, sodaß

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x, x_0 \in \Omega \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Satz 2.3 Sei $K \in \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}^m$ automatisch gleichmäßig stetig.

3 Anwendungen der mehrdimensionalen Differentialrechnung

3.1 Maxima und Minima

Definition Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$int\, K := \left\{ x \in K \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0 : y \in K, \text{ für alle}\, y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < \varepsilon \right\}$$

heißt **Inneres** von K.

Satz 3.1 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $x \in int\,\Omega$ Maximumsstelle [bzw. Minimumsstelle] von f.

a) Falls $f : int\,\Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, ist
   (N1) $\quad Df(x) = 0.$

b) Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, gilt
   (N2) $\quad D^2 f(x) \leq 0$ [bzw. ≥ 0].

Definition Die $n \times n$ Matrix

$$D^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

der zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x heißt **Hesse-Matrix** (von f im Punkt x).

Definition Eine $n \times n$ Matrix A heißt nicht-negativ, Schreibweise: $A \geq 0$, wenn $Av \cdot v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Kriterien für Nicht-Negativität: siehe Mitschrift.

3.2 Maxima und Minima unter Nebenbedingungen

Satz 3.2 (Lagrange'sche Multiplikatorregel) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, x_0 Maximums- oder Minimumsstelle von f auf $\{x \in \Omega | g(x) = c\}, c \in \mathbb{R}$. Sei grad $g(x_0) \neq 0$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ sodaß

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \lambda \operatorname{grad} g(x_0).$$

Die Zahl λ heißt **Lagrange'scher Multiplikator**.

Hilfssatz 3.1 (Impliziter Funktionensatz im $\mathbb{R}^2$) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}, M = \{x \in \mathbb{R}^2 | g(x) = c\}$ (Niveaumenge von g), $x_0 \in M, \operatorname{grad} g(x_0) \neq 0$. Dann existieren orthonormale Vektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ (d.h. $|e_1| = |e_2| = 1, e_1 \cdot e_2 = 0$), eine Zahl $\delta > 0$, ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, und eine stetig differenzierbare Funktion $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ sodaß

$$M \cap \{x \in \mathbb{R}^2 | |x - x_0| < \delta\} = \{y_1 e_1 + y_2 e_2 \big| \ y_1 \in (a, b), y_2 = h(y_1)\}.$$

Interpretation Jede implizit durch eine Gleichung definierte Kurve im $\mathbb{R}^2$ kann lokal als Graph dargestellt werden.

Bemerkung Eine geeignete Verallgemeinerung gilt für die Lösungsmenge von k Gleichungen $g_1(x) = c_1, ..., g_k(x) = c_k$ im $\mathbb{R}^n$.

3.3 Taylorentwicklung

Ziel: Approximiere $f(x + h)$, $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nahe einem gegebenen Punkt $x \in \Omega$ durch ein Polynom in $h \in \mathbb{R}^n$.

Satz 3.3 (Taylor) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k - mal stetig differenzierbar, $x \in \Omega$. Sei

$$T_\ell(x, h) := f(x) + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

(Taylorpolynom der Ordnung ℓ). Spezialfälle:

$$T_1(x, h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i,$$

$$T_2(x,h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j.$$

Dann gilt

$$f(x+h) = T_\ell(x,h) + o(|h|^\ell) \quad (|h| \to 0).$$

4 Konvergenz von Funktionenfolgen

4.1 Punktweise Konvergenz, gleichmässige Konvergenz, und Konvergenz im quadratischen Mittel

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$, und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Die Folge (f_n) heisst

a) *punktweise konvergent* gegen f, wenn

$$f_n(x) \to f(x) \ (n \to \infty) \text{ für jedes } x \in \Omega,$$

b) *gleichmässig konvergent* gegen f, wenn

$$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \ (n \to \infty),$$

c) *konvergent im quadratischen Mittel* gegen f, wenn

$$\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^2 dx \to 0 \ (n \to \infty).$$

Damit das Integral in c) wohldefiniert ist, muss z.B. angenommen werden: Ω Normalgebiet, f_n, f stetig.

Satz 4.1 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig, f_n gleichmässig konvergent gegen f. Dann ist f stetig.

Bemerkung: Die Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz ist wichtig. Stetigkeit bleibt im allgemeinen weder unter punktweiser Konvergenz, noch unter Konvergenz im quadratischen Mittel erhalten.

Satz 4.2 (Gleichmässige Konvergenz und Integration) Sei $[a, b]$ abgeschlossenes beschränktes Intervall, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ stetig, f_n gleichmässig konvergent gegen f. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n \Big).$$

Bemerkung: Die Voraussetzung der gleichmässigen Konvergenz ist wichtig. Integration vertauscht im Allgemeinen nicht mit punktweiser Konvergenz.

4.2 Der Begriff der Konvergenz bezüglich einer Norm

Def. Sei V reeller Vektorraum. Eine *Norm* aufc V ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:
1) $||v|| \geq 0$ for all $v \in V$, $||v|| = 0$ if and only if $v = 0$ (Positivität)
2) $||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v||$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (Homogenität)
3) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ for all v, $w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Def. Sei V ein Vektorraum, $||\cdot||$ eine Norm auf V. Eine Folge $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $v_j \in V$, heisst

- *Cauchyfolge* (bzgl. $||\cdot||$), wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$: $||v_j - v_k|| < \epsilon \; \forall j, k \geq N$
- *konvergent* gegen $v \in V$ (bzgl. $||\cdot||$), wenn gilt: $||v_j - v|| \to 0$ $(j \to \infty)$.

Seien f_j, $f \in C(\Omega)$. Gleichmässige Konvergenz von f_j gegen f entspricht Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm

$$||f||_{sup} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

(Auf abgeschlossenen beschränkten Mengen wird nach Satz 2.1 das Supremum angenommen und obige Norm entspricht der Maximumsnorm $||f||_{max} := \max_{x\in\Omega} |f(x)|$). Konvergenz von f_j gegen f im quadratischen Mittel entspricht Konvergenz bezüglich der 2-Norm (oder L^2-Norm)

$$||f||_2 := \Big(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

4.3 Banach'scher Fixpunktsatz

Def. (Banachraum) Ein Vektorraum V mit Norm $||\cdot||$ heisst *Banachraum*, wenn jede Cauchyfolge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in V konvergent ist (d.h. ein $f \in V$ existiert sodaß $||f_j - f|| \to 0$).

Wichtiges Beispiel (Z 8.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Der Vektorraum $C(\Omega)$ der stetigen Funktionen auf Ω versehen mit der Maximumsnorm ist ein Banachraum.

Satz 4.3 (Banach'scher Fixpunktsatz) Sei V ein Banachraum mit Norm $||\cdot||$. Sei A abgeschlossene Teilmenge von V. Sei $F : A \to V$ mit
(i) $F(A) \subseteq A$
(ii) $\exists \lambda \in (0,1)$: $||F(v) - F(w)|| \leq \lambda ||v - w|| \; \forall v, w \in A$.
Dann existiert genau ein Fixpunkt $v_* \in A$ von F (d.h. $v_* \in A$ mit $F(v_*) = v_*$).

4.4 Lösen nichtlinearer Gleichungssyteme

Satz 4.4 (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $f(x_0) = y_0$, $D\Phi(x_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Mengen $U_0 \ni x_0$ (mit $U_0 \subseteq \Omega$), $V_0 \ni y_0$, sodaß für alle $y \in V_0$ die Gleichung

$$\Phi(x) = y$$

genau eine Lösung $x \in U_0$ besitzt und sodaß $\Phi(U_0) \subseteq V_0$. D.h. Φ bildet U_0 bijektiv auf V_0 ab. Darüber hinaus ist die Umkehrabbildung $x =: \alpha(y)$, $\alpha : V_0 \to U_0$, stetig differenzierbar, und es gilt

$$D\alpha(y) = D\Phi(\alpha(y))^{-1}.$$

Satz 4.5 (Satz über implizite Funktionen für 1 Gleichung mit 2 Unbekannten) Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ offen, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\mathbb{M} = \{(x,y) \in \Omega | g(x,y) = c\}$ und sei $(x_o, y_0) \in M$, $\frac{\delta g}{\delta y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann existieren $\delta > 0, \delta' > 0, h : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}, h$ stetig differenzierbar, sodaß

$$M \cap I \times I' = \{(x,y) \in |\mathbb{R}^2| x \in I, y = h(x)\},$$

wobei $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), I' = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.

Kurzfassung: Die Niveaumenge M von g kann lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion h dargestellt werden. Der Name des Satzes stammt daher, dass die Funktion h nicht - wie bisher bei Funktionen üblich - "explizit", sondern "implizit" (d.h. indirekt), als Lösung der Gleichung $g(x, h(x)) = c$, definiert ist.

Verallgemeinerung: (Satz über implizite Funktionen für k Gleichungen mit n Unbekannten, nicht in der Vorlesung bewiesen): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : \Omega \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar, $k \in \{1, ..., n-1\}, M = \{(x, y) \in \Omega | g(x, y) = c\}$, wobei $(x, y) = (x_1, ..., x_{n-k}, y_1, ..., y_k)$ und sei $(x_0, y_0) \in M$,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y g_k} \end{pmatrix} (x_0, y_0)$$

invertierbar. Dann existieren offene Mengen U, U' mit $U \times U' \subset \Omega, U \ni x_0, U' \ni y_0$, und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}^k$ sodaß

$$M \cap U \times U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k | x \in U, y = h(x)\}.$$

Kurzfassung: Die Niveaumenge M von g kann lokal mithilfe der Funktion h durch $n - k$ freie Parameter $x_1, , ..., x_{n-k}$ beschrieben werden.

5 Fourier - Reihen

Definition: Sei: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig, $n \in \mathbb{Z}$.

$$f_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

heißt n^{ter} **Fourier-Koeffizient** von f, und

$$S_{f,N}(x) := \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{inx}$$

heißt N^{te} **Fourier - Partialsumme**.

Hilfssatz 5.1 (Riemann-Lebesgue-Lemma) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt $f_n \to 0 \quad (|n| \to \infty)$.

Definition: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heisst *Lipschitz-stetig*, wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, sodaß

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

für alle $x, y \in \Omega$.

Satz 5.1 (Konvergenz von Fourierreihen) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Lipschitz-stetig, $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt für alle $x \in [-\pi, \pi]$: $\lim_{N\to\infty} S_{N,f}(x)$ existiert und ist gleich $f(x)$.

Definition: Die Reihe

$$lim_{N\to\infty} S_{N,f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$$

heißt Fourier-Reihe von f.

Varianten von Satz 5.1 für reellwertige Funktionen:

(a) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, $f(-\pi) = f(\pi)$. Seien

$a_n := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

$b_n := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

Dann gilt für alle $x \in [-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

(b) Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, $f(0) = f(\pi) = 0$,

$$b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt für alle $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Satz 5.2 (Zusammenhang zwischen Glattheit von f und Kleinheit der hohen Fourierkoeffizienten) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch. Dann gilt:

a) f k mal stetig differenzierbar $\Rightarrow \exists C > 0 : |f_n| \leq \frac{C}{|n|^k} \forall n \neq 0$

b) $\exists C, \epsilon > 0 : |f_n| \leq \frac{C}{|n|^{k+1+\epsilon}} \forall n \neq 0 \Rightarrow f$ k-mal und stetig differenzierbar.

Fourierreihen-Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung (oder analoger Probleme)

Gesucht: $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, u = u(x, t)$, sodaß

(W) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Wärmeleitungsgleichung)

(R) $u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \forall t$ (Randbedingung)

(A) $u(x, 0) = w(x) \forall x$ (Anfangsbedingung)

(W) ist ein Beispiel einer sogenannten "partiellen Differentialgleichung".

Lösungsmethode

1) Machen Sie einen Fourierreihen-Ansatz für $u(x, t)$ mit zeitabhängigen Koeffizienten. Berücksichtigen Sie hierbei (R). (Hier: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$)

2) Leiten Sie aus (W) durch formale Rechnung eine gewöhnliche Dgl. für die Fourier-Koeffizienten her. (Hier $b_n' = -n^2 b_n$)

3) Lösen Sie diese, d.h. bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten zur Zeit t als Funktion der Fourierkoeffizienten zur Zeit 0. (Hier: $b_n(t) = e^{-n^2 t}\, b_n(0)$)

4) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten zu Zeit 0 aus (A).
(Hier: $b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w(y) \sin(ny) dy = w_n$)

Die so erhaltene Fourierreihe $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$ ist wegen Satz 5.2 2mal partiell nach x und 1mal partiell nach t differenzierbar, vorausgesetzt die antisymmetrische 2π-periodische Fortsetzung $\tilde{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von w ist 4mal stetig differenzierbar, und löst (W), (R), (A). Man kann zeigen, daß die Lösung eindeutig ist (vgl. Z 9.1(b)).

Bestapproximations-Eigenschaft der N^{ten} Fourier-Partialsumme

$V := \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} | \quad f \text{ stetig}\}$.

Skalarprodukt auf V: $\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$

Induzierte Norm: $||f||_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$
(L^2-Norm, siehe Abschnitt 4.2)

$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx} \qquad (n \in \mathbb{N})$

$U :=$ Span $\{e_{-N}, e_{-N+1}, \ldots, e_{N-1}, e_N\}$

Sei $f \in V$ gegeben. Welches Element $g \in U$ hat minimalen Abstand zu f?

Satz 5.3 Der Abstand zu f in der L^2-Norm,

$$A(g) := \|f - g\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx},$$

$A : U \to \mathbb{R}$, ist genau dann minimal, wenn $g = S_{N,f}$. (Bestapproximations-Eigenschaft der N^{ten} Fourier-Partialsumme im quadratischen Mittel)

6 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

(D) $\dot{y}(t) = f\,(y(t), t)$

(A) $y(0) = y_0$.

Gesucht: $y : [0, T) \to \mathbb{R}^n$
Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^n$.

6.1 Beispiele
Siehe Mitschrift

6.2 Existenz und Eindeutigkeit

Definition: Eine Lösung von (D),(A) auf $[0, T)$ ist eine Funktion $y : [0, T) \times \mathbb{R}^n$, sodaß y differenzierbar auf $(0, T)$, (D) erfüllt auf $(0, T)$, y stetig auf $(0, T)$, (A) erfüllt.

Satz 6.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig in der ersten Variablen (d.h. $\exists L > 0 : |f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y| \forall x, y, t)$. Dann existiert zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ von (D),(A).

Satz 6.2 Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 konvergiert die Folge $x^{(n)}$ des Picard'schen Iterationsverfahrens punktweise auf $[0, \infty)$ und gleichmäßig auf $[0, T]$ für alle $T > 0$ gegen eine Lösung von (D), (A).

6.3 Lineare Systeme

Ein lineares System ist ein System von n gekoppelten linearen Differentialgleichungen für Funktionen $y_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{\bullet} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Vektorschreibweise als Differentialgleichung für eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

(L) $\dot{y} = A\,y$, A reelle $n \times n$ Matrix.

Anfangsbedingung:

(A) $y(0) = y_0$

Lösungsmethode:

(1) Bestimme alle Eigenwerte von A.

(2) Bestimme zu jedem Eigenwert $\lambda_j (\in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ einen zugehörigen Eigenvektor $v_j (\in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n)$.

(3) Versuche, den Anfangswert y_0 als Linearkombination $\sum_j \alpha_j v_j$ $(\alpha_j \in \mathbb{C})$ von Eigenvektoren darzustellen. (Funktioniert oft, aber nicht immer.)

(4) Falls $y_0 = \sum_j \alpha_j v_j$, so ist die Funktion $y(t) := \sum_j \alpha_j e^{\lambda_j t}\, v_j$ die eindeutige Lösung von $(L), (A)$.

Lösungsmethode, **falls 3. nicht funktioniert:** Die Lösung von (L), (A) ist gegeben durch die abstrakte Lösungsformel

$$y(t) = e^{tA} y_0.$$

Versuche, die Matrix e^{tA} explizit zu bestimmen.

Definition (Exponentialreihe für Matrizen) Sei A reelle oder komplexe $n \times n$ Matrix.

$$e^A := I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n,$$

wobei $A^0 = I_n = n \times n$ Einheitsmatrix,

$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n Faktoren}}$, $\cdot =$ Matrizenmultiplikation.

Die Reihe ist komponentenweise absolut konvergent. Vorsicht: Die Funktionalgleichung $e^{A+B} = e^A e^B$ gilt nur für kommutierende Matrizen.