$\underline{Z\ 12.1}$ (a) $\quad \dot{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}}_{=A} y, \ (a,b>0), \ y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der EW:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ab = \lambda^2 - (i\sqrt{ab})^2 =$$

$$= (\lambda - i\sqrt{ab})(\lambda + i\sqrt{ab}) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{EW: } \pm i\sqrt{ab}.$$

Berechnung der EV:

$$(A \mp i\sqrt{ab}\, I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mp i\sqrt{ab} & -a \\ b & \mp i\sqrt{ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} \text{ zu EW } \pm i\sqrt{ab}$$

$\Rightarrow$ allg. Lös. $y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{ab}t}$
$+ c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{ab}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Anfangsbed.: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\frac{b}{a}} & i\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \underset{A}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{-i\sqrt{\frac{b}{a}}} \\ 1 & \frac{1}{i\sqrt{\frac{b}{a}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 3 - i\sqrt{\frac{a}{b}} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \right]$$

$\Rightarrow$ spezielle Lös. zu AB $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{ab}t} + \underbrace{\text{c.c.}}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left(3 + i\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{ab}t} \right)$$

= complexconjugate
[= konjugiert Komplex…]

Z 12.1 (Forts.)

$$\Rightarrow y(t) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{\frac{a}{b}} \\ 1 - i3\sqrt{\frac{b}{a}} \end{pmatrix}\left(\cos(\sqrt{ab}\,t) + i\sin(\sqrt{ab}\,t)\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos(\sqrt{ab}\,t) - \sqrt{\frac{a}{b}}\sin(\sqrt{ab}\,t) \\ \cos(\sqrt{ab}\,t) + 3\sqrt{\frac{b}{a}}\sin(\sqrt{ab}\,t) \end{pmatrix}$$

(b) Die obige Lösung kann auch als $y(t) = e^{tA}\binom{3}{1}$ berechnet werden (vgl. Vorl.).

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad \text{mit } A^0 = I,\ A^1 = A,$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix},\quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & (-a)^2 b \\ -ab^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{pmatrix}.$$

Mit vollst. Induktion lässt sich leicht zeigen

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-ab)^n & 0 \\ 0 & (-ab)^n \end{pmatrix}. \text{ Dann: } A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -a(-ab)^n \\ b(-ab)^n & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n)!}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n} (\sqrt{ab})^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1} (\sqrt{ab})^{2n}}{(2n+1)!} \underbrace{\sqrt{ab}\left(-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}_{=-a} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1} (\sqrt{ab})^{2n}}{(2n)!} \underbrace{\sqrt{ab}\sqrt{\frac{b}{a}}}_{=b} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n} (\sqrt{ab})^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{ab}\,t) & -\sqrt{\frac{a}{b}}\sin(\sqrt{ab}\,t) \\ \sqrt{\frac{b}{a}}\sin(\sqrt{ab}\,t) & \cos(\sqrt{ab}\,t) \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA}\binom{3}{1} = y(t) \text{ aus (a)}.$$

12.1 (a) $\dot{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} y, \quad y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

EW von A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2)$$

$$= (-1-\lambda)(3-\lambda) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \text{EW}: \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

EV von A zu $\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$

zu $\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$

allg. Lös. von $\dot{y} = Ay$:

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y(0) = \underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 \overset{!}{=} y_0}_{\text{hier}}$$

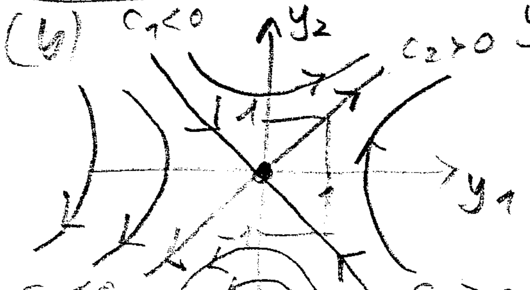
$$\Leftrightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

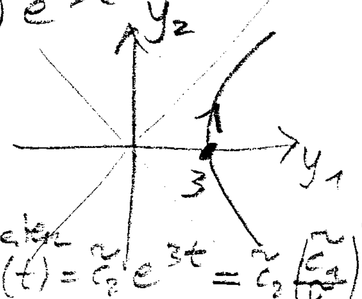
$\Rightarrow$ Lös. von $\dot{y} = Ay$, $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$y(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

(b) $y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$



Hier: $c_1 = c_2 = \frac{3}{2}$



Bzgl. des Achsensystems $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ gilt in transformierten Koordinaten: $\tilde{y}_1(t) = \tilde{c}_1 e^{-t}$, $\tilde{y}_2(t) = \tilde{c}_2 e^{3t} = \tilde{c}_2 \left(\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{y}_1}\right)^3$

12.2

EW: $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\omega \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \omega & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2+\omega^2)}_{=\lambda^2-(i\omega)^2}$

$= (1-\lambda)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ EW: $\lambda_1 = i\omega,\ \lambda_2 = -i\omega,\ \lambda_3 = 1$

$\Rightarrow$ EV: $(\dots)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allg. Lösung:

$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\omega t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

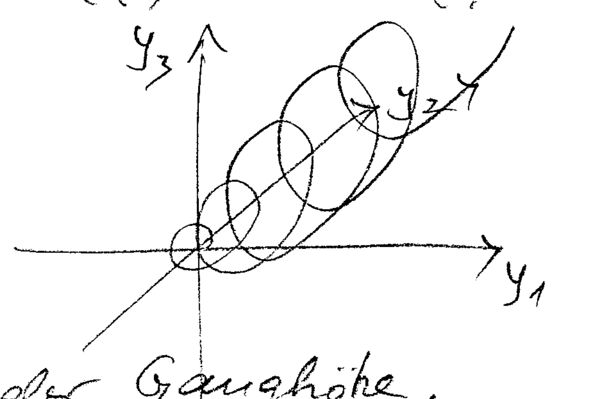
$y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ spezielle Lös. für AB $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$y(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ e^t \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$



Die Spur (= Orbit) ist eine Spirale um y_2 mit wachsender Ganghöhe.

H 12.3

(a) $$y(t) = e^{tA}\left(y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) \underset{(*)}{=} A \underbrace{e^{tA}\left(y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right)}_{=y(t)}$$

$$+ \underbrace{e^{tA}\, e^{-tA}}_{= I \text{ (vgl. T 12.2)}} f(t).$$

(*) wegen Produktregel (vgl. H11.2) und Hauptsatz der Diff.- & Int.rechnung [e^{tA} diff.bar, vgl. Vorl. (also stetig), f stetig nach Voraussetzung.]

(b) Betrachte zwei Lös. y_1, y_2 von $\begin{cases} \dot{y} = Ay + f, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow y := y_1 - y_2$ löst $\dot{y} = Ay$, $y(0) = 0$

$\underset{\substack{\text{Satz 6.1} \\ \text{(Existenz \& Eindeutigkeit)}}}{\Rightarrow}$ $y \equiv 0$ [d.h. $y(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$].

(c) $\ddot{z} + z = G > 0, \quad z(0) = 1, \dot{z}(0) = 0.$ (*)

Setze $z =: y_1$, $\dot{z} =: y_2$. Dann

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0 \end{cases} \quad (**)$$

Nach (a) ist die eind. Lös. von (**) gegeben durch

#12.3 | (Forts.)

$$y(t) = e^{tA}\left(y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right)$$

<u>Hier</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $A^2 = -I \Rightarrow A^3 = -A \Rightarrow A^4 = -A^2 = I$

Mit vollst. Ind. kann man zeigen:

$$A^{2n} = (-1)^n I, \quad A^{2n+1} = (-1)^n A$$

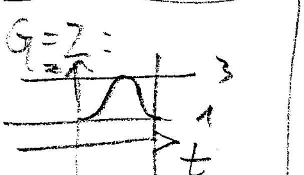
$$\Rightarrow e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\right)}_{=\cos t} I + \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}_{=\sin t} A$$

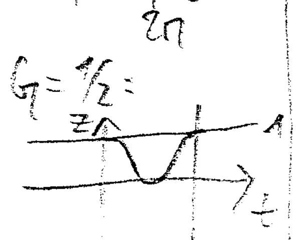
$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{-sA} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{tA}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\int_0^t \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} G\,ds}_{= G\begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \sin t \end{pmatrix}}\right)$$



$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} \cos^2 t - \cos t + \sin^2 t \\ -\cos t \sin t + \sin t + \sin t \cos t \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \cos t + G(1 - \cos t) \\ -\sin t\,(1 - G) \end{pmatrix} \Rightarrow z(t) = (1-G)\cos t + G$$

T 12.1

$$\dot{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} y \quad , \quad y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der EW:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\underbrace{(1-\lambda)(3+\lambda)}_{= 3 - 2\lambda - \lambda^2} + 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \text{EW}: \lambda = -1$$

Berechnung der EV

$$(A+I)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

z.B. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung eines Hauptvektors

$$(A+I)w = v \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_1 - 1 \end{pmatrix}$$

z.B. mit $w_1 = 0$: $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 (w + vt) e^{\lambda t}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right) e^{-t}$$

$$\Rightarrow y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right) e^{-t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} t \right) e^{-t}$$

T 12.2 Da $A(-A) = (-A)A \left(= -A^2\right)$ folgt aus T 12.3 $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0$ mit $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k 0^k}{k!} = I + 0 = I \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

T 12.3

(b) Im Allgemeinen gilt $e^A e^B = e^{A+B}$ __nicht__ wenn A und B nicht kommutieren.

__z.B.:__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A^k = A, \; k \in \mathbb{N}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^k = 0, \; k = 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{= e-1}$$

$$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A+B$$

$$\Rightarrow (A+B)^k = (A+B) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow e^{A+B} = I + (A+B)(e-1) \neq \overbrace{\left(I + A(e-1)\right)}^{= e^A} \overbrace{(I+B)}^{= e^B}$$

$$= I + A(e-1) + B + AB(e-1)$$

T 12.3 (a) $AB = BA$

z.z.: $$\underbrace{\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)}_{=:\tilde{A}} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right)}_{=:\tilde{B}}}_{=:\tilde{C}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!}$$

$$\tilde{C}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\tilde{A}_{il} \tilde{B}_{lj}}_{= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)_{il}}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B^k)_{lj}}{k!}\right)}$$

$$\overset{\triangle}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} \frac{(A^s)_{il}}{s!} \frac{(B^{m-s})_{lj}}{(m-s)!}$$

Cauchy-Produkt für Reihen (vgl. Analysis 1)
[gilt da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$
(komponentenweise) absolut konvergent sind]

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{m} \underbrace{\frac{m!}{s!(m-s)!}}_{=\binom{m}{s}} (A^s)_{il} (B^{m-s})_{lj}$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \underbrace{\sum_{l=1}^{n} (A^s)_{il} (B^{m-s})_{lj}}_{= (A^s B^{m-s})_{ij}}$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} A^s B^{m-s}}_{\overset{\triangle}{=} (A+B)^m}$$

Binomische Formel
für kommutierende Matrizen
(vgl. LAAG 2, SS09, Z62)