H8.1

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, f_n stetig, $f_n \to f$ glm. auf $[a,b]$ $\underset{\text{Satz 4.1}}{\Longrightarrow}$ f stetig. [d.h. Voraussetzung f stetig in der Angabe kann weggelassen werden]

f_n stetig, f stetig $\Rightarrow |f_n - f|$ stetig

$\Rightarrow |f_n - f|^2$ stetig

Ferner: $f_n \to f$ glm. $\Longleftrightarrow f_n - f \to 0$ glm

$\Longleftrightarrow |f_n - f| \to 0$ glm. $\Longleftrightarrow |f_n - f|^2 \to 0$ glm.

[$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in \Omega : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ —"— $\exists n_0(\underbrace{\sqrt{\varepsilon}}_{>0}) \in \mathbb{N}_0$ —"—: $|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\varepsilon}$

$\Longleftrightarrow |f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon$

—"— $\exists \tilde{n}_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ —"—: $|f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon$

$\Rightarrow$ —"— $\exists \tilde{n}_0(\underbrace{\varepsilon^2}_{>0}) \in \mathbb{N}_0$ —"—: $|f_n(x) - f(x)|^2 < \varepsilon^2$

$\Longleftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$]

$$\underset{\text{Satz 4.2}}{\Longrightarrow} \int_a^b |f_n - f|^2 \to \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} |f_n - f|^2}_{=0} = 0,$$

q.e.d.

Alternative: $$\underbrace{\int_a^b |f_n - f|^2}_{= \|f_n - f\|_2^2} \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty^2 \to 0$$

H 8.1 (Zusatz)

Falls die Voraussetzung "$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig" (für den punktweisen Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$) weggelassen wird gilt <u>nicht</u> $\int_a^b |f_n - f|^2 \to 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{glm.}]{} f$

Gegenbeispiel: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$ (vgl. Bsp. 1) und 3) Vorlesung):

$\int_0^1 |f_n(x)|^2 = \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1} \to 0$; aber nach ZWS:

$\forall n\ \exists\ \xi_n \in (0,1): f_n(\xi_n) = \frac{1}{2} \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2} \not\to 0$.

Selbst unter der Vorauss. "$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig" gilt <u>nicht</u> $\int_a^b |f_n - f|^2 \to 0 \Rightarrow f_n \to f$ glm.

Gegenbeispiel: $g_n := \sqrt{\frac{f_n}{n}}$ aus H 7.1 (a):

$g_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2nx}, & x \in [0, \frac{1}{2n}] \\ \sqrt{2 - 2nx}, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \to 0$ pktweise $\forall x \in [0,1]$,

$\int_0^1 g_n^2 = \frac{1}{n}\int_0^1 f_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} \to 0$; $g_n(\frac{1}{2n}) = 1 \Rightarrow \|g_n\|_\infty \overset{(\geq)}{=} 1 \not\to 0$

[und $\|f_n\|_\infty = n \not\to 0$, was auch: "$f_n$ nicht glm konv. gegen 0" beweist; gegen $f \neq 0$ kann es nicht glm. konv., da es sonst gegen ein $f \neq 0$ auch pktweise konv. würde]

H 8.2 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist stetig diff.bar mit

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ y & x & 0 \\ 2x & 2y & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Df(2,-1,0) = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |Df(2,-1,0)| = -\lambda 27$$

Nach dem Satz v. d. lok. Umkehrbarkeit besitzt $f(x,y,z)=c$ für jedes $c \in V_0 \ni 0$, V_0 offen, eine eindeutige Lösung $(x,y,z) \in U_0$, U_0 offen, $(2,-1,0) \in U_0$, falls $\lambda \neq 0$.

H 8.3

Für die Abbildung $F: V \to V$ mit

$$(Fg)(x) = f(x) - r\int_a^b K(t,x)\,g(t)\,dt$$

für $g \in V = C([a,b])$ mit der Maximumsnorm $\|g\| := \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$ gilt:

$$\|Fg - Fh\| = |r| \max_{x\in[a,b]} \underbrace{\left|\int_a^b K(t,x)\big(g(t)-h(t)\big)\,dt\right|}$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|K(t,x)|}_{\leq C}\,\underbrace{|g(t)-h(t)|}_{\leq \|g-h\|}\,dt$$

$$\leq (b-a)\,C\,\|g-h\|$$

$$\leq \underbrace{|r|\,(b-a)\,C}_{<1}\,\|g-h\|$$

Damit existiert nach dem Banachschen Fixpunktsatz eine eindeutige Funktion $g \in V$ mit $Fg = g \iff (Fg)(x) = g(x)$

$$\iff f(x) - r\int_a^b K(t,x)\,g(t)\,dt = g(x)$$

$$\iff f(x) = g(x) + r\int_a^b K(t,x)\,g(t)\,dt.$$

T 8.1 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx),$

$$:= \lim_{k\to\infty} S_k(x), \quad S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n \sin(nx)$$

$$|f(x) - S_k(x)| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \sin(nx)\right|$$

$$= \left|\lim_{m\to\infty} \sum_{n=k+1}^{m} a_n \sin(nx)\right| \overset{(1)}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{\left|\sum_{n=k+1}^{m} a_n \sin(nx)\right|}_{\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} \sum_{n=k+1}^{m} |a_n|}$$

$$\overset{(2)}{\le} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \text{ da } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \ge n_0 \; \forall x \in \mathbb{R}:$
$|f(x) - S_k(x)| < \varepsilon.$

$\Leftrightarrow$ $S_k \to f$ glm. für $x \in \mathbb{R}$.

(1) Hier wurde verwendet: $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$

$$\left[a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0 \atop \big||a_n| - |a|\big| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} |a_n - a|\right\} \Rightarrow \big||a_n| - |a|\big| \to 0$$

$\Leftrightarrow |a_n| - |a| \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to |a|]$

(2) Hier wurde verwendet: $a_n \le b_n \; \forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$, $b_n \le b$
$\Rightarrow a \le b$ [Voraussetzungen $\Rightarrow$ $b_n - a_n \ge 0 \; \forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$,
$b_n - a_n \to b - a$
Ann.: $b - a < 0 \Rightarrow \exists \tilde{n}_0 \ge n_0 \; \forall n \ge \tilde{n}_0: b_n - a_n < 0$ ↯ Also $b - a \ge 0$]

Analog für $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx)}_{=: T_k(x)}$.

$$|g(x) - T_k(x)| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \cos(nx)\right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

[$\sum_{n=k+1}^{m} |a_n|$ ist eine Majorante von $S_m(x) - S_k(x)$ bzw. $T_m(x) - T_k(x)$

T 8.2

$$f(x,y) = e^x \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$$

(a) Für jedes feste x_0 (und damit für jede zur y-Achse Parallelengerade $x = x_0$ (vgl. (d))) ist das Bild $f(x_0, \mathbb{R})$ der Funktion $f(x_0, \cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Kreis um den Ursprung mit Radius e^{x_0}.

$$f(\mathbb{R}^2) = \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}} f(x_0, \mathbb{R}) = \bigcup_{r > 0} K_r(0) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

mit $K_r(0) := \{ z \in \mathbb{R}^2 : z_1^2 + z_2^2 = r^2 \}$

[da $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, $\exp(x) := e^x$]

(b) $$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |Df(x,y)| = e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Da $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig diff.bar ist, bedeutet dies, dass f an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar ist, d.h., dass es zu jedem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein offenes $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x_0, y_0) \in U_0$ und ein offenes $V_0 \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) \in V_0$ gibt, sodass $\forall z \in V_0$ $f(x,y) = z$ eine eind. Lös. $(x,y) \in U_0$ besitzt und

T 8.2 (Forts.)

$f(U_0) \subseteq V_0$ gilt [d.h. sodass $f: U_0 \to V_0$ bijektiv ist.]

Hierbei ist die "Lokalität" der Umkehrbarkeit essentiell: $f: \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$ ist nicht injektiv, da der Punkt $e^{x_0}\begin{pmatrix}\cos y_0\\ \sin y_0\end{pmatrix} \in f(\mathbb{R}^2)$ die Urbilder

$(x_0, y_0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ besitzt.

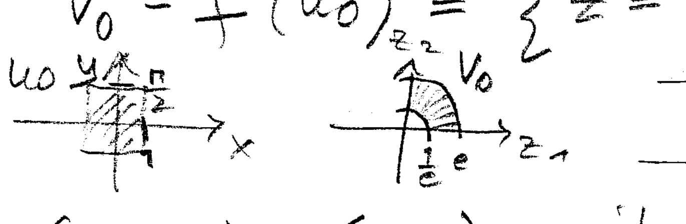
[Daher ist $U_0 \subseteq \mathbb{R} \times (-\pi + y_0, y_0 + \pi)$.]

(c) $a = (0, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow b = f(a) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

$g: V_0 \to U_0$ mit $b \in V_0$, $a \in U_0$, V_0, U_0 offen

[z.B.: $U_0 = (-1,1) \times (0, \frac{\pi}{2})$,

$V_0 = f(U_0) = \left\{ z = r\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix} : r \in (\frac{1}{e}, e), y \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}$



]

$g(z_1, z_2) = (x, y)$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix}e^x\cos y\\ e^x \sin y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{2x} = (e^x\cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 = z_1^2 + z_2^2$

$\Rightarrow x = \ln|z|$

und $\tan y = \frac{e^x \sin y}{e^x \cos y} = \frac{z_2}{z_1}$

$\Rightarrow y = \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$

$\Rightarrow g(z_1, z_2) = \begin{pmatrix}\ln|z|\\ \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\end{pmatrix}$ mit $g\underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{=b} = \begin{pmatrix}0\\ \arctan\sqrt{3}\end{pmatrix} = \ldots$

T 8.2 (Forts. 2)

$$Df(\underbrace{0, \tfrac{\pi}{3}}_{=a}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Dg(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|z|}\frac{1}{2}\frac{2z_1}{|z|} & \frac{z_2}{|z|^2} \\ \frac{1}{1+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2} z_2\left(-\frac{1}{z_1^2}\right) & \frac{1}{1+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2}\frac{1}{z_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{z_1}{|z|^2} & \frac{z_2}{|z|^2} \\ \frac{-z_2}{|z|^2} & \frac{z_1}{|z|^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{|z|^2}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad Dg(\underbrace{\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{=b}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Da $Df(\underbrace{a}_{=g(b)}) \cdot Dg(b) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt tatsächlich

$\left(Df(g(z))\right)^{-1} = Dg(z)$ für $z = b$

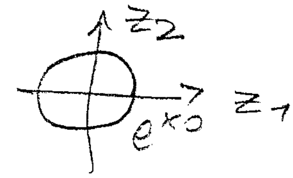
wie im Satz von der lokalen Umkehrbarkeit für $V_0 \ni z \mapsto g(z) \in U_0$ angegeben.

[Man beachte, dass $g: V_0 \to U_0$ stetig diff.bar ist; dies folgt aus der expliziten Darstellung von g und wird durch obige Berechnung und expl. Darstellung von $Dg(z)$ bestätigt.]

T 8.3 (Forts. 3)

(d) $x = x_0$: $f(x_0, y) = e^{x_0}\begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$

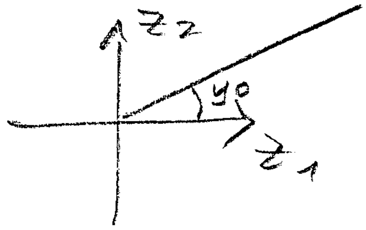
$f(x_0, \mathbb{R}) = K_{e^{x_0}}(0)$, d.h. Kreise um $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mit Radius e^{x_0}



$y = y_0$: $f(x, y_0) = e^{x}\begin{pmatrix}\cos y_0\\ \sin y_0\end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}, y_0) = \left\{ r\begin{pmatrix}\cos y_0\\ \sin y_0\end{pmatrix} : r > 0 \right\}$, d.h.

Halbgeraden vom (ohne den) Ursprung zum Winkel y_0 von der x-Achse



$x = y$: $f(x, x) = e^{x}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$

"Schneckenlinie"