## T 7.1

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{a+(j-1)\frac{b-a}{n}}^{a+j\frac{b-a}{n}} |f(x)|^2 dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{a+(j-1)\frac{b-a}{n}}^{a+j\frac{b-a}{n}} v_j^2 \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \, \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} |v|^2 \quad \left[|v| := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \, |v| .$$

---

## T 7.3

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f : [1,\infty) \to [1,\infty)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \in [0,1) \quad \forall x \in [1,\infty)$$

$$\underset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \quad |f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{<1} \, |x-y| \quad \forall x,y \in [1,\infty)$$

und $\quad x = x + \frac{1}{x} = f(x)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{x}$ hat keine Lösung für $x \in \mathbb{R}$ und damit insbesondere für $x \in [1,\infty)$

T 7.2

$x \in [-1,1] \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx+1 & , x \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ -nx+1 & , x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

$f_n \in C([-1,1])$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0) \\ 1, & x \in (0,1] \\ \alpha \in \mathbb{R}, & x = 0 \end{cases} \qquad f \notin C([-1,1])$$

$$\int_{-1}^{1} |f_n - f|^2 = \underbrace{\int_{-\frac{1}{n}}^{0} (nx+1)^2 dx}_{\underset{y=-x}{=} -\int_{\frac{1}{n}}^{0} (-nx+1)^2 = \int_0^{1/n} (1-nx)^2 dx} + \int_0^{1/n} (-nx+1)^2 dx$$

$$= 2 \int_0^{1/n} (1-nx)^2 dx \underset{y=nx}{=} 2 \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 (1-y)^2 dy}_{<\infty} \to 0$$

$\Rightarrow$ $f_n$ konv. im q. M. gegen $f \notin C([-1,1])$

$\Rightarrow$ $f_n$ ist CF bzgl. $\|\cdot\|_{L^2([-1,1])}$

Ferner: $f_n|_{[-1,0)} \xrightarrow[L_2]{} f|_{[-1,0)}$

und $f_n|_{(0,1]} \xrightarrow[L_2]{} f|_{(0,1]}$

(siehe oben: man betrachtet nur das Integrations- intervall $[-1,0)$ bzw. $(0,1]$)

Ann.: $\exists\, g \in C([-1,1])$ mit $\|f_n - g\|_{L^2} \to 0$

$$\Rightarrow \quad g|_{[-1,0)} \in C([-1,0)),\; g|_{(0,1]} \in C((0,1])$$

Aus $\|f|_{[-1,0)} - g|_{[-1,0)}\|_{L^2} \le \underbrace{\|f_n|_{[-1,0)} - f|_{[-1,0)}\|}_{\to 0}$

$$+ \underbrace{\|f_n|_{[-1,0)} - g|_{[-1,0)}\|_{L^2}}_{\le \|f_n - g\|_{L^2} \to 0}$$

folgt $f = g$ auf $[-1,0)$ (*).

Analog folgt: $f = g$ auf $(0,1]$

$$\Rightarrow \quad g \notin C([-1,1]), \text{ da } g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0) \\ 1, & x \in (0,1] \end{cases}$$

---

Damit haben wir eine Funktionfolge stetiger Funktionen, die im q.M. eine Cauchy-Folge ist (und damit auch im q.M. konvergiert) die aber gegen keine stetige Funktion im q.M. konv.

---

(*): $\int_a^b |f|^2 = 0,\; f \in C([a,b)) \Rightarrow f = 0 \;\forall x \in [a,b)$

Ann.: $\exists\, x_0 \in [a,b)$ mit $f(x_0) \neq 0 \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta > 0:$

$f(x) \neq 0 \;\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)|^2 > 0 \;\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\Rightarrow 0 < \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^2 dx \le \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \quad ↯.$$

H 7.1

(a) $f_n(0) = 0 \to 0$

$\forall x \in (0,1]\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < x \ \forall n \geq n_0$

(vgl. Archimedisches Prinzip)

$\Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$

Insgesamt: $f_n \to f$ pktweise.

---

$f_n, f$ stetig, $\int_0^1 f_n = \int_0^{1/2n} 2n^2 x\,dx +$

$+ \int_{1/2n}^{1/n} (2n - 2n^2 x)\,dx = 2n^2 \frac{1}{2} \frac{1}{(2n)^2} +$

$+ \left[2nx - n^2x^2\right]_{x=1/2n}^{x=1/n} = \frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \int_0^1 f = 0$

$\Rightarrow f_n$ nicht glm. stetig gegen 0

(sonst Widerspruch zu S. 4.2, Vorl:

$f_n, f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f_n \xrightarrow[\text{glm}]{} f \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n).$)

---

$f_n$ nicht konv im q. M.:

$\int_0^1 |f_n|^2 dx = 4n^4 \int_0^{1/2n} x^2 dx + \int_{1/2n}^{1/n} (2n - 2n^2x)^2 dx$

$= 4n^4 \underbrace{\int_0^{1/2n} x^2 dx}_{= \frac{1}{3}\frac{1}{\cancel{n^3}}} + 4n^2 \frac{1}{\cancel{2n}} - 8n^3 \underbrace{\int_{1/2n}^{1/n} x\,dx}_{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{\cancel{4n^2}}}$

$= \frac{4}{3}n + 2n - 3n = \frac{n}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$

H 7.1) (a) (Forts.)

Ann: $\exists\ g \neq 0$ auf $[0,1]$ ( $\underbrace{\phantom{xx}}_{}$ $\neq 0$ nicht nur auf "vereinzelten" Pkte
mit $\int_0^1 |f_n - g|^2 \to 0$ [ Menge von Leb.-Maß 0 ]

Dann: $$\int_{1/n}^1 |g|^2 = \int_{1/n}^1 |f_n - g|^2 \leq \int_0^1 |f_n - g|^2 \to 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |g|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 |g|^2 = 0$$

$$\Rightarrow g = 0 \quad (\text{"bis auf Mengen vom Maß 0"})$$

---

Genauer kann man beweisen, dass es kein $g \in C([0,1])$ gibt mit $g \neq 0$, so dass $\int_0^1 |f_n - g|^2 \to 0$:

Wie oben bekommt man $\int_0^1 |g|^2 = 0$.

Wenn es ein $x_0 \in [0,1]$ gebe mit $g(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0 : |g(x)|^2 > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow 0 < \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |g(x)|^2 \leq \int_0^1 |g|^2 = 0$ ↯.

---

**H7.1**

(b) $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) \to |x|$ punktweise $\forall x \in \mathbb{R}$
(wegen Stetigkeit von $\sqrt{y}\,,\ y \in [0,\infty)$).

$$\left| f_n(x) - |x| \right| = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - |x|$$

$$\underset{\left(a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}\right)}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f_n(x) \to |x|$ glm. auf $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f_n(x) - |x| \right|^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \Bigg( \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|\right)^2} dx}_{\leq \int_{-1}^{1} n\, dx = 2n} + 2 \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|\right)^2} dx}_{\leq \int_1^\infty \frac{1}{4x^2} dx \,=\, \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{\infty} \,=\, \frac{1}{4}} \Bigg)$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\left(2n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $f_n(x) \to |x|$ konv. im quadratischen Mittel auf $\mathbb{R}$.

#7.1 (c)

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(0) = 1 \to 1$$

$$f_n(x) \to 0, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$f_n$ konv. nicht glm gegen $f$, da $f_n$ stetig, $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ nicht stetig

(sonst Wid. zu S. 4.1/Vorl.: $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $f_n$ glm. konv. gegen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ stetig)

[ $f_n$ konv. nicht glm, für jedes Intervall, das 0 enthält; da $\left|\frac{1}{1+n|x|}\right| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{n\alpha} \to 0$ für $|x| \geq \alpha > 0$

konv. $f_n$ glm. in allen Teilmengen des $\mathbb{R}$ mit positivem Abstand zur 0; für $x \in (0,\alpha)$ konv. $f_n$ nicht glm: $\sup\limits_{x\in(0,\alpha)} \frac{1}{1+n|x|} = 1 \ \forall n$. ]

$f_n$ konv. im q. M. gegen 0:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(n|x|+1)^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+nx)^2}dx = 2\left(\int_0^{1/n} \frac{1}{(1+nx)^2}dx + \int_{1/n}^\infty \frac{1}{(1+nx)^2}dx\right) \underset{\substack{y=nx \\ \frac{dy}{dx}=n}}{=} 2\frac{1}{n}\left(\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{(1+y)^2}}_{\leq 1}dy + \int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{(1+y)^2}}_{\leq \frac{1}{y^2}}dy\right)$$

$$\leq \frac{2}{n}(1+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

H 7.1 (d)

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^1 |f_n(x)|^2 = \dfrac{1}{2^\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \\ \text{und } n\to\infty \Rightarrow \nu\to\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 |f_n(x)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d.h. $f_n$ konv. im q.M. gegen 0.

$f_n$ konv für kein $x\in[0,1]$ pktweise: Sei $x\in[0,1]$ bel., fest.

Das Intervall $[0,1]$ wird für jedes $\nu$ durch die Intervalle $[k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}]$, $k=0,1,\dots,2^\nu-1$ "sukzessive durchgescannt"

$\Rightarrow \forall \nu\ \exists\ n,m \geq 2^\nu: f_n(x)=1,\ f_m(x)=0$

$\Rightarrow \forall n_0\ \exists$ ($\nu$ mit $2^\nu \geq n_0$ und damit) $n,m\geq n_0$:

$|f_n(x) - f_m(x)| = 1$

$\Rightarrow f_n(x)$ keine Cauchy-Folge

$\Rightarrow f_n(x)$ nicht konvergent.

Da $f_n$ für kein $x\in[0,1]$ pktweise konv.

$\Rightarrow f_n$ auch nicht glm. konv.

H 7.2 (a) Sei $x \in \mathbb{R}^2$.

i) Es gilt $|x|_p \geq 0$ für $p \in [1,\infty]$

ii) $|x|_1 = 0 \Rightarrow |x_1| + |x_2| = 0 \Rightarrow |x_1| = |x_2| = 0$
$\Rightarrow x = 0$

$|x|_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow |x_1| = |x_2| = 0$
$\Rightarrow x = 0$

$|x|_\infty = 0 \Rightarrow |x_1| = |x_2| = 0 \Rightarrow x = 0$

sowie $x = 0 \Rightarrow |x|_p = 0 \quad \forall p \in [1,\infty]$

iii) $|\lambda x|_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda|\,|x_1| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$|\lambda x|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = |\lambda|\,|x|_2$

$|\lambda x|_\infty = \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|\}$
$= \max\{|\lambda||x_1|, |\lambda||x_2|\}$
$= |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|\} = |\lambda|\,|x|_\infty$.

iv) $|x+y|_1 = |x_1+y_1|_1 + |x_2+y_2|_2$
$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$

Δ-Ungl. für $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad = |x|_1 + |y|_1$

$|x+y|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\}$

mit $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq |x|_\infty + |y|_\infty$

$\Rightarrow |x+y|_\infty \leq |x|_\infty + |y|_\infty$

# 7.2 (a) iv) (Forts.)

$$|x+y|_2^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2$$

$$= \underbrace{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}_{=|x|_2^2 + |y|_2^2} + 2\big(\underbrace{x_1y_1 + x_2y_2}_{\le |x_1y_1| + |x_2y_2| \underset{(*)}{\le} |x|_2\,|y|_2}\big)$$

$$\le \left(|x|_2 + |y|_2\right)^2$$

$(*)$: $\underbrace{\left(|x_1y_1| + |x_2y_2|\right)^2}_{= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2|x_1y_1x_2y_2|} \overset{!}{\le} (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$

$$\Leftrightarrow \quad 2|x_1y_1x_2y_2| \overset{!}{\le} x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \left(|x_1y_2| - |x_2y_1|\right)^2, \text{ q.e.d.}$$

H 7.2

(b) $|x|_{1/2} := \left(|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2}\right)^2$

Sei $x = \binom{1}{0}$, $y = \binom{0}{1}$. Z.z.:

$|x+y|_{1/2} = \left|\binom{1}{1}\right|_{1/2} = (1+1)^2 = 4$

$|x|_{1/2} = 1^2 = 1, \quad |y|_{1/2} = 1^2 = 1$

$\Rightarrow \quad |x+y|_{1/2} = 4 > 2 = |x|_{1/2} + |y|_{1/2}$ !

d.h. $\Delta$-Ungl. gilt nicht $\Rightarrow$ $|x|_{1/2}$ keine Norm.

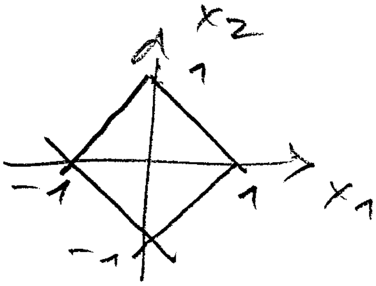
(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| = 1\}$

$x_1, x_2 \geq 0$ : $x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_1$

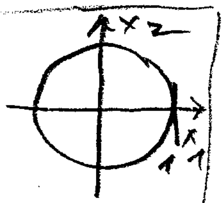
$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ : $x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 - 1$

$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$ : $-x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 + x_1$

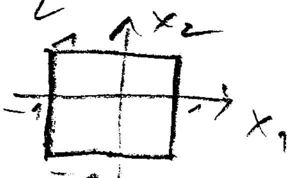
$x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ : $-x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = -1 - x_1$




$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$




$\{x \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1\}$




$\Leftrightarrow (|x_1| = 1 \wedge |x_2| \leq 1) \vee (|x_2| = 1 \wedge |x_1| \leq 1) \Leftrightarrow [(x_1 = 1 \vee x_1 = -1) \wedge x_2 \in [-1, 1]] \vee [(x_2 = 1 \vee x_2 = -1) \wedge x_1 \in [-1,1]]$

## H 7.2 | (d)

$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_{i_0}|$ mit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$

$$|x_{i_0}|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p = |x|_p^p$$

$$\Rightarrow \quad |x|_\infty \leq |x|_p .$$

$$|x|_p^p = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|^p}_{\leq |x|_\infty} \leq \sum_{i=1}^n |x|_\infty^p = n |x|_\infty^p$$

$$\Rightarrow \quad |x|_p \leq \sqrt[p]{n}\, |x|_\infty .$$

(e) Aus (d) folgt, dass zwischen zwei Normen $|\cdot|_p, |\cdot|_q$ mit $p, q \in [1, \infty]$ die Beziehungen:

$$|x|_p \leq \sqrt[p]{n}\, |x|_\infty \leq \sqrt[p]{n}\, |x|_q \leq \sqrt[p]{n} \sqrt[q]{n}\, |x|_\infty \leq \sqrt[p]{n} \sqrt[q]{n}\, |x|_p$$

d.h. (*) $|x|_p \leq \sqrt[p]{n}\, |x|_q \leq \sqrt[p]{n} \sqrt[q]{n}\, |x|_p$ gelten.

[ falls $p, q = \infty$ ersetze $\sqrt[p]{n}, \sqrt[q]{n}$ durch 1 ]

Zwei Normen für die eine solche Beziehung gilt heißen äquivalent.

Nach (*) folgt aus $|x_n - x|_p \to 0 \Rightarrow |x_n - x|_q \to 0$ für beliebige $p, q \in [1, \infty]$.

Analog folgt aus der Stet. vektorw. Fkt bzgl. $|\cdot|_p$, die Stet. bzgl. $|\cdot|_q$ für bel. $p, q \in [1, \infty]$

## H 7.3

(a) $f'(x) = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0$ für $x > 0$

$\Rightarrow f$ streng mon. fallend für $x > 0$

$\Rightarrow \forall\, x \in I: f(x) \geq f(2) = e^{1/2} = \sqrt{e}$

$\forall\, x \in I: f(x) \leq f(\sqrt{e}) = e^{1/\sqrt{e}}$

$\Rightarrow f(I) \subseteq I$, falls $e^{1/\sqrt{e}} \leq 2$. (*)

(b) $|f'(x)| = e^{1/x}\frac{1}{x^2} \leq e^{1/\sqrt{e}-1} < 1$ für $x \geq \sqrt{e}$

da $\frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{e} \Leftrightarrow 1 < e$

(c) Nach Mittelwertsatz: $|f(x) - f(y)| =$

$= |f'(\xi)||x-y|$ für ein $\xi$ zwischen $x$ und $y$.

$\Rightarrow \forall\, x, y \in I: |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$

(b) (mit $\lambda < 1$) für alle $x, y \in I$

$\Rightarrow \exists\, x_* \in I: x_* = f(x_*) =$

Ban. Fixp. satz

$= e^{1/x_*}$.

q.e.d.

(*): via Taschenrechner: $\frac{1}{\sqrt{e}} \leq \ln 2 \approx 0.69314718$

$\approx 0.60653066$