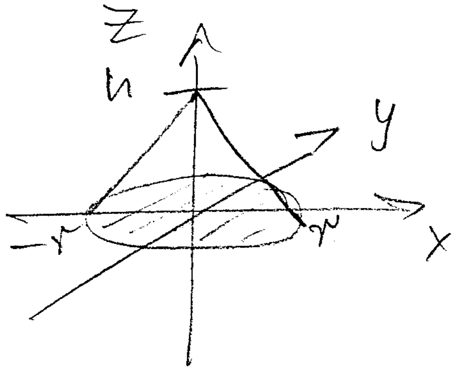
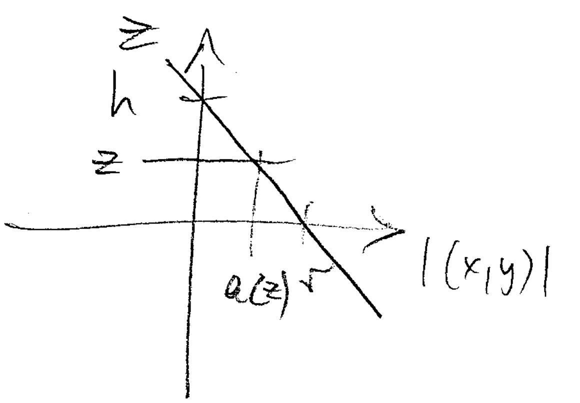
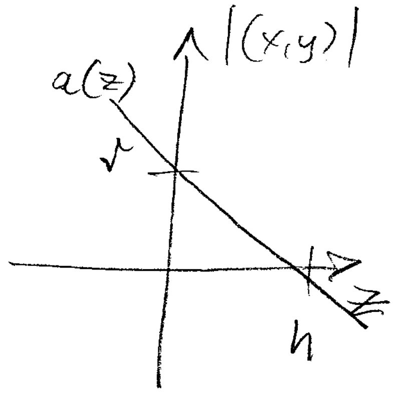
T 3.21

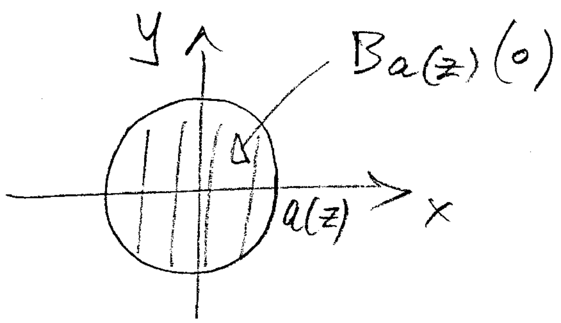
$$V = \int_0^h \left(\int_{B_{a(z)}(0)} d(x,y) \right) dz$$



$$\text{mit } a(z) = r - \frac{r}{h} z = \frac{r}{h}(h-z)$$

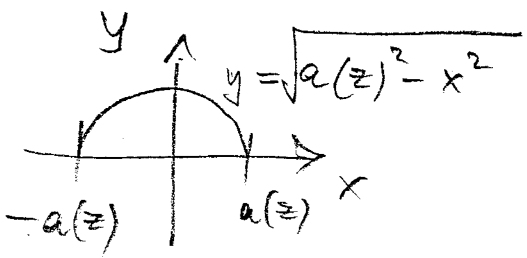






$$\int_{B_{a(z)}(0)} d(x,y) = 2 \int_{-a(z)}^{a(z)} \sqrt{a(z)^2 - x^2}\, dx$$

$$\underset{H\,3.1}{=} 2 \cdot a(z)^2 \frac{\pi}{2} = a(z)^2 \pi$$



$$\Rightarrow \quad V = \int_0^h a(z)^2 \pi \, dz$$

$$= \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 \underbrace{\int_0^h (h-z)^2 dz}_{= \frac{h^3}{3}} =$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

T 3.3

a) Wir klassifizieren die Geraden des $\mathbb{R}^2$

$v+te$, $v,e\in\mathbb{R}^2$, $|e|=1$, $e=\binom{c}{s}$

in zwei Kategorien:

1. Solche die nicht durch den Ursprung gehen: $v+te\neq 0 \ \forall t\in\mathbb{R}$
2. Solche die durch den Ursprung gehen: $\exists\, t_0\in\mathbb{R} : v+t_0e=0$.

Zu 1.: $$g(t)=f(v+te)=\frac{(v_1+tc)(v_2+ts)}{|v+te|^2}$$

mit $|v+te|^2=(v_1+tc)^2+(v_2+ts)^2$.

Der Zähler und der Nenner von g bestehen aus Produkten, Quadraten, Summen der zwei stetigen Funktionen $t\mapsto v_1+tc$, $t\mapsto v_2+ts$, wobei der Nenner $\forall t\in\mathbb{R}$, $\neq 0$ ist.
Nach dem Kalkül der Grenzwerte aus Ana 1 ist also $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig.

Zu 2.: $g(t)=f(te)=cs$, $t\neq 0$, $g(0)=a$

Als konstante Funktion ist $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ stetig.

Die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig für $a=cs$.

[Zu 1. ist die Wahl von a irrelevant, da die Gerade nicht durch 0 geht.]

T 3.3 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x_1 x_2}{|x|^2}$, $f(0) = 0$

b) f ist am Punkt $v \neq 0$ stetig als Quotient stetiger Funktionen [Polynome auf ...] mit Nenner $\neq 0$ an der Stelle $v \neq 0$.

In der Tat:

$$|f(x) - f(v)| = \frac{\left| x_1 x_2 |v|^2 - v_1 v_2 |x|^2 \right|}{|x|^2 |v|^2} \leq$$

$$\leq \frac{|(x_1 x_2 - v_1 v_2)|}{|x|^2} + \frac{|v_1 v_2| \, \left| |v|^2 - |x|^2 \right|}{|x|^2 |v|^2}$$

$$\leq \frac{|(x_1 - v_1) x_2| + |v_1 (x_2 - v_2)|}{|x|^2} + \frac{|v_1 v_2| \left(|v||v-x| + |x||v-x| \right)}{|x|^2 |v|^2}$$

$[\![|v|^2 - |x|^2 = v \cdot v - x \cdot x = v \cdot (v-x) + (v-x) \cdot x]\!]$

$$\leq \frac{|x-v||x| + |v||x-v|}{|x|^2} + \frac{1}{2} \frac{|v||v-x| + |x||v-x|}{|x|^2}$$

$[\![|x_1|, |x_2| \leq |x| \; ; \; |x_1 x_2| \leq \frac{|x|^2}{2}]\!]$

$$= \frac{3}{2} \underbrace{\frac{|x| + |v|}{|x|^2}}_{\left[\xrightarrow[x \to v]{} \frac{2}{|v|} \right]} |x - v| .$$

Da uns $x \to v$ interessiert, genügt $x \in \mathbb{R}^2$ mit (z.B.) $|x - v| \leq \frac{|v|}{2}$ zu betrachten. Für solche x gilt

$|x| \leq |x - v| + |v| \leq \frac{3|v|}{2}$ und $|x| \geq |v| - |x - v| \geq \frac{|v|}{2}$.

Damit $\frac{|x| + |v|}{|x|^2} \leq \frac{5|v|}{2} \cdot \frac{4}{|v|^2}$, und weiter $|f(x) - f(v)| \leq \frac{15}{|v|} |x - v|$.

Also: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \left(:= \min\left\{ \frac{|v|}{2}, \frac{|v|}{15}\varepsilon \right\} \right) > 0$: $|f(x) - f(v)| \leq \frac{15}{|v|} \delta \leq \varepsilon \quad \forall |x - v| < \delta$

---

c) f ist am Punkt $v = 0$ stetig, falls $\forall (x_n) \subset \mathbb{R}^2$ mit $|x_n| \to 0$ gilt: $|f(x_n) - a| \to 0$.

Betrachte $x_n = \frac{1}{n} e$ mit $e = \binom{c}{s}$, $|e| = 1$.

Dann gilt $f(x_n) = cs$.

Es gibt aber kein $a \in \mathbb{R}$, sodass $cs = a$
$\underline{\forall}$ $e \in \mathbb{R}^2$, $|e| = 1$ [d.h. $\forall c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$].

[Je nachdem auf welcher Ursprungsgeraden sich x dem Ursprung nähert, hat $f(x)$ einen anderen Grenzwert.]

<u>T3.1</u> $PV = cT \ (*)$

$$\left[\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial T}{\partial V}}_{= \frac{P}{c}} \underbrace{\frac{\partial P}{\partial T}}_{= \frac{c}{V}} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial P}}_{= -\frac{cT}{P^2} = -\frac{V}{P}} = -1. \right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial V}{\partial T}}_{= \frac{c}{P}} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial P}}_{= \frac{V}{c}} \underbrace{\frac{\partial P}{\partial V}}_{= -\frac{cT}{V^2} = -\frac{P}{V}} = -1$$