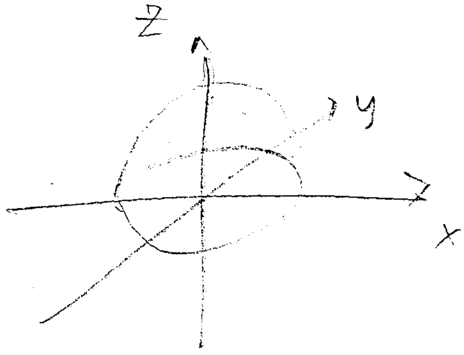
T 2.1 (a)

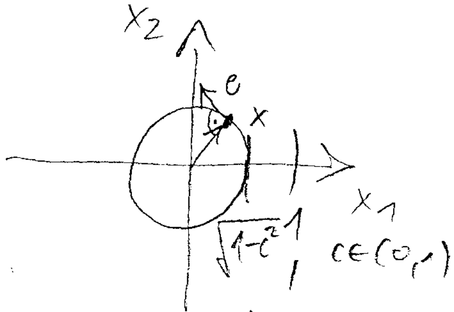


Oberfläche einer Halbkugel (-sphäre):

$$\left(f(x_1,x_2)\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\operatorname{graph} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 < 1\}$$

(b)



$$e = \frac{1}{|x|}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix} \Rightarrow |e| = 1$$

$$e \cdot x = \frac{1}{|x|}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0$$

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{-2x_1}{\sqrt{1-|x|^2}},\ \frac{1}{2}\frac{-2x_2}{\sqrt{1-|x|^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\,x^T \quad \Big[\Rightarrow \underbrace{\nabla f}_{\text{"nabla } f\text{"}}(x) := \operatorname{grad} f(x) := (Df(x))^T = -\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\,x\ \Big]$$

- Da f "stetig diff.bar" auf Ω,
- d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, als Quotient stet. Funktionen mit nichtverschwindendem Nenner ($|x|<1$), gilt (vgl. V. v Z.)

$$\frac{d}{dt} f(x+te)\Big|_{t=0} = Df(x)\cdot e = -\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\,x^T e = 0$$

[Via Def. der Richtungsabl.:]

$$\frac{d}{dt} f(x+te)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+te)-f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-|x+te|^2} - \sqrt{1-|x|^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1}-|x+te|^2-\cancel{1}+|x|^2}{t\underbrace{\left(\sqrt{1-|x+te|^2}+\sqrt{1-|x|^2}\right)}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 2\sqrt{1-|x|^2}}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\cancel{|x|^2} - t^2 - 2t x^T e + \cancel{|x|^2}}{t\left(\sqrt{1-|x+te|^2}+\sqrt{1-|x|^2}\right)}$$

$$= -x^T e \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} = 0.$$

Interpretation: e zeigt in Richtung der Tangente der Niveaulinie $f(x) = c \in (0,1)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1-|x|^2 = c^2 \Leftrightarrow |x|^2 = 1-c^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{1-c^2}$
am Punkt x $\Rightarrow$ In Richtung (der T.) der N. ist der Anstieg von $f = 0$.

(c) $\varphi \in \mathbb{R}$ [$\varphi \in [0, 2\pi)$ genügt] bel., fest.

$g: \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{\Omega}} \to \Omega$, $g(x) := Rx$ $\left[|g(x)|^2 = (Rx)^T Rx = x^T R^T R x = \right.$
$\left. = x^T I x = |x|^2\right]$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $h := f\circ g : \Omega \to \mathbb{R}$.

f stetig diffbar mit $Df(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} x^T$ (s. oben)

$Dg(x) = R$ $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = R_{ij}\right]$ $\Rightarrow$ g stetig diff.bar

Damit Kettenregel anwendbar:

$$\underbrace{Dh(x)}_{\in\mathbb{R}^{1\times 2}} = \underbrace{Df(g(x))}_{\in\mathbb{R}^{1\times 2}} \underbrace{Dg(x)}_{\in\mathbb{R}^{2\times 2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} (Rx)^T R =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} x^T \underbrace{R^T R}_{=I} = Df(x).$$

[Kann man auch direkt sehen:

$h \equiv f : \Omega \to \mathbb{R}$, denn

$$h(x) = f(g(x)) = f(Rx) = \sqrt{1 - |Rx|^2} = \sqrt{1-|x|^2}$$
$$= f(x) \quad]$$

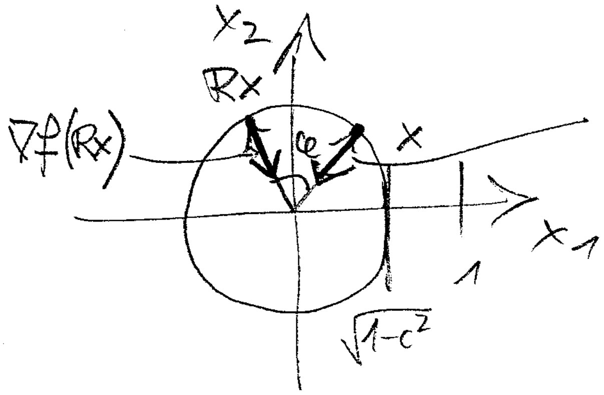
Transponieren der Kettenregel ergibt

$$\underbrace{\nabla h(x)}_{= \left(-\frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\right) x} = \underbrace{(Dg(x))^T}_{= R^T} \; \underbrace{\nabla f(g(x))}_{\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{|Rx|^2}_{=|x|^2}}}\right) Rx}$$

$\nabla f(Rx) = R\, \nabla f(x)$, ist also der Gradient von f an x rotiert um φ (gegen den Uhrz. sinn)

$$R^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}$$

rotiert $\nabla f(Rx)$ um φ zurück (d.h. um $-\varphi$)



$$\nabla f(x) = R^T \nabla f(Rx) = \nabla h(x)$$

T 2.2 | Widerspruchsbeweis:

Seien $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $A_1 \neq A_2$ sodass (*) gilt

$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0 : (A_1 - A_2)v \neq 0.$

[[ang. $\forall v \in \mathbb{R}^n : (A_1-A_2)v = 0 \Rightarrow (A_1-A_2)e_i = 0\ \forall$ Einheitsv. $e_i, i=1,\dots,n \Rightarrow$ alle Spalten von $A_1 - A_2$ wären $0 \Rightarrow A_1 = A_2$]]

Sei $\delta > 0$, sodass für $h : [0,\delta] \to \mathbb{R}^n$, $\underbrace{h(t)}_{=:h_t} := tv$, $x + h(t) \in \Omega\ \forall t \in [0,\delta]$ [[$x \in \Omega$, Ω offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, für $\delta := \frac{\varepsilon}{2|v|}$ gilt $|x - (x + h(t))| = |h(t)| = t|v| \leq \delta|v| = \frac{\varepsilon}{2} <$ [illegible] $\forall t \in [0,\delta] \Rightarrow x + h(t) \in B_\varepsilon(x) \subset \Omega\ \forall t \in [0,\delta]$]]

$$0 < \frac{|(A_1 - A_2)v|}{|v|} = \frac{|(A_1 - A_2)h_t|}{|h_t|} =$$

$$= \frac{|f(x+h_t) - (f(x) + A_1 h_t) - [f(x+h_t) - (f(x) + A_2 h_t)|}{|h_t|}$$

$$\leq \underbrace{\frac{|f(x+h_t) - (f(x) + A_1 h_t)|}{|h_t|}}_{\xrightarrow[(*)]{} 0 \text{ f. } t \to 0} + \underbrace{\frac{|f(x+h_t) - (f(x) + A_2 h_t)|}{|h_t|}}_{\xrightarrow[(*)]{} 0 \text{ f. } t \to 0}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|(A_1 - A_2)v|}{|v|} = \lim_{t\to 0} \frac{|(A_1 - A_2)v|}{|v|} \leq 0 \ \ ⚡.$$

T 2.3

$$f(x) = g(|x|)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'(|x|)\,\frac{\partial |x|}{\partial x_i} \quad \text{[Kettenregel]}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{[Kettenregel]}}}{=} \frac{1}{2}\,\frac{2x_i}{|x|} = \frac{x_i}{|x|}$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{grad} f\right)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \frac{g'(|x|)}{|x|}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{g'(|x|)}{|x|}\,x, \quad \text{q.e.d.}$$