10.1 $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \cosh(\alpha x) := \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}, \quad \alpha \neq 0.$$

$\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unendlich oft (stetig) diffbar und gerade $\Rightarrow$ $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ Lipschitz und $f(-\pi) = f(\pi)$.
Ferner ist f reellwertig.

$\xRightarrow{T9.1/9.2}$ $$\cosh(\alpha x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

mit $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(\alpha x) \cos(nx)\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha x} \cos(nx)\,dx \underset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\frac{1}{n} e^{\alpha x} \sin(nx) \Big|_{x=0}^{\pi}}_{=0} - \frac{\alpha}{n} \int_0^{\pi} e^{\alpha x} \sin(nx)\,dx$$

$$\underset{\text{p.I.}}{=} -\frac{\alpha}{n} \left(-\frac{1}{n} e^{\alpha x} \cos(nx) \Big|_{x=0}^{\pi} + \frac{\alpha}{n} \int_0^{\pi} e^{\alpha x} \cos(nx)\,dx \right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \int_0^{\pi} e^{\alpha x} \cos(nx)\,dx = \frac{\alpha}{n^2} \left(e^{\alpha \pi} \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cosh(\alpha x) \cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)} \left(\frac{\alpha}{n^2} \left(e^{\alpha\pi} (-1)^n - 1 \right) - \frac{\alpha}{n^2} \left(e^{-\alpha\pi} (-1)^n - 1 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \frac{\alpha}{n^2} (-1)^n \left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi} \right) = \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2} (-1)^n \sinh(\alpha\pi)$$

H 10.1 (Forts.)

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{n^2+\alpha^2} (-1)^n \sinh(\alpha\pi) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \cosh(\alpha x) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{n^2+\alpha^2} \cos(nx) \right) \quad (*)$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad (**)$$

(b) $x = \pi$ in $(**)$ ergibt

$$\cosh(\alpha\pi) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2+\alpha^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+n^2} = \frac{1}{2\alpha} \left(\pi \underbrace{\coth(\alpha\pi)}_{= \frac{\cosh(\alpha\pi)}{\sinh(\alpha\pi)} = \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

H 10.3 (a)

In T 10.3 wird gezeigt

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{inx}$ $(h_n \in \mathbb{C})$ abs. konv. $(\forall x \in \mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{inx}$ glm. konv. (auf $\mathbb{R}$)

Für $h_n = f_n$ bzw. $h_n = inf_n$ folgt also, dass $S_{N,f}(x) := \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{inx}$

und $S_{N,f}'(x) = \sum_{n=-N}^{N} inf_n e^{inx}$

glm. (gegen f bzw. g) auf $\mathbb{R}$ konv.
[und damit auch auf $[a,b]$ für bel. $-\infty < a < b < \infty$]

$\underset{Z\,7.1(b)}{\Longrightarrow}$ $\Big(\underbrace{\lim_{N\to\infty} S_{N,f}}_{=:f}\Big)' = \underbrace{\lim_{N\to\infty} S_{N,f}'}_{=:g}$

[auf $[a,b]$ und damit, da $a<b$ bel., auf $\mathbb{R}$], q.e.d.

H 10.3 (b) i.

$k=0$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, Lipschitz

$|f_n| \leq \frac{C}{|n|^{1+\varepsilon}}$, $C, \varepsilon > 0$, $\forall n \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n e^{inx}| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{C}{|n|^{1+\varepsilon}} < \infty$ (Ana 1)

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ ist absolut konv. ($\forall x\in\mathbb{R}$)

$\underset{T\,10.3}{\Rightarrow} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ konv. glm. (auf $\mathbb{R}$ und damit auch auf $[-\pi,\pi]$) gegen f.

Da $S_{N,f}$ $\forall N\in\mathbb{N}$ stetig ist folgt aus Satz 4.1: f stetig (d.h. Aussage stimmt für $k=0$)

$k=1$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-per., Lipschitz

$|f_n| \leq \frac{C}{|n|^{2+\varepsilon}}$, $C, \varepsilon > 0$, $\forall n \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n e^{inx}$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} in f_n e^{inx}$ absolut konv. ($\forall x\in\mathbb{R}$)

$\left.\underset{(a)}{\Rightarrow} \underbrace{(S_{N,f})'}_{\text{stetig}} \to f' \text{ glm.}\right\} \underset{S.\,4.1}{\Rightarrow} f'$ stetig

$\Rightarrow f$ 1-mal stetig diff.bar (d.h. Aussage stimmt für $k=1$)

Sukzessive Anwendung (Induktion) liefert die Aussage für bel. k

H 10.3 (b)

ii. $$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

$$\underset{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-in} f(x)e^{-inx}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,e^{-inx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx$$

[da $f(x)$, e^{-inx} und damit $f(x)e^{-inx}$ 2π-periodisch]

Da f' periodisch, wenn f periodisch folgt aus k-maliger Anwendung der obigen Rechnung:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(in)^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{-inx}\,dx$$

$$\Rightarrow |f_n| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{|n|^k}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f^{(k)}(x)|}_{\leq \max_{x\in[-\pi,\pi]}|f^{(k)}(x)|}\,dx$$

$$= \frac{1}{|n|^k}\underbrace{\max_{x\in[-\pi,\pi]}|f^{(k)}(x)|}_{=:\,C}.$$

T 10.1 (c), (d)

$$f(x) := |x|^\alpha, \quad \alpha \in [0,\infty), \quad x \in [-1,1]$$

f Lipschitz?

$\alpha = 0$: $\quad f(x) = 1$: $\quad |f(x)-f(y)| = 0 \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \; \forall L \geq 0$

$\alpha = 1$: $\quad f(x) = |x| \Rightarrow |f(x)-f(y)|$

$$= \big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$\alpha > 1$:

$x,y \in [0,1]$: $\quad |f(x)-f(y)| = |x^\alpha - y^\alpha| \underset{\text{MWS}}{=} \underbrace{|\alpha \xi^{\alpha-1}|}_{\leq |\alpha| =: L} |x-y|$

(ξ zwischen x und y)

$x,y \in [-1,0]$: $\quad |f(x)-f(y)| = |(-x)^\alpha - (-y)^\alpha|$

$$\underset{\text{MWS}}{=} \underbrace{|-\alpha \xi^{\alpha-1}|}_{\leq |\alpha| =: L} |x-y|$$

$x \in [-1,0], y \in [0,1]$: $\quad |f(x)-f(y)| = |(-x)^\alpha - y^\alpha|$

$$= |(-1)^\alpha x^\alpha - y^\alpha| \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha \underset{(*)}{\leq} \underset{\overset{\parallel}{|\alpha|}}{L}(|x|+|y|)$$

$$= L(-x+y) \leq L|x-y|$$

[(*): $\big||x|^\alpha - |0|^\alpha\big| \leq L\big||x|-|0|\big|$]

$\alpha \in (0,1)$: $\quad f(x) = |x|^\alpha$ nicht Lipschitz auf $[0,a]$

denn $\nexists L > 0$: $|x|^\alpha \leq L|x| \Leftrightarrow |x|^{\alpha-1} \leq L \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^{1-\alpha}} \leq L$

$\forall x \in [0,a]$, da $\lim_{x\to 0} |x|^{1-\alpha} = 0$ für $\alpha < 1$

T 10.3 | (1)

Nach Satz 5.1: $S_{N,f} \underset{N\to\infty}{\to} f$ pktweise.

Wir zeigen: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ absolut konv.

$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ glm. konv. (auf $\mathbb{R}$)

[$\Leftrightarrow$ $S_{N,f}$ glm. konv. auf $\mathbb{R}$ (gegen f)]

Beweis:

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{inx}$ abs. konv. $(\forall x\in\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|$ konv. $\Leftrightarrow \Big(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} |h_n|}_{=:S_N}\Big)$ konv.

$\Leftrightarrow (S_N)$ CF

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall N\geq M\geq N_0: \\ |S_N - S_M| < \varepsilon.\end{array}\right\} (*)$$

Aber: $|S_N - S_M| = \sum_{n=M+1}^{N} (|f_n| + |f_{-n}|)$

$\geq \left|\sum_{n=M+1}^{N} (f_n e^{inx} + f_{-n} e^{-inx})\right| = |S_{N,f}(x) - S_{M,f}(x)|$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Damit folgt aus $(*)$

$$\left.\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0\ \exists N_0\in\mathbb{N}\ \forall N\geq M\geq N_0\ \forall x\in\mathbb{R}: \\ |S_{N,f}(x) - S_{M,f}(x)| < \varepsilon.\end{array}\right\}$$

$S_{N,f}$ CF

$\Leftrightarrow$ bzgl. $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$

$\Leftrightarrow$ $S_{N,f}$ glm. konv.