Lösungsvorschläge (von F. Hofmaier, angepasst von J. Giannoulis)

H 10.2 a) Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Weiter gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \overline{\cos t + \mathrm{i}\sin t} = \cos t - \mathrm{i}\sin t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|S_{N,f}(x)\right|^2 = S_{N,f}(x)\,\overline{S_{N,f}(x)} &= \left(\sum_{n=-N}^{N} f_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)\left(\sum_{k=-N}^{N} \overline{f_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}\right)\\ &= \left(\sum_{n=-N}^{N} f_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)\left(\sum_{k=-N}^{N} \overline{f_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right)\\ &= \sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} f_n\overline{f_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\,.\end{aligned}$$

Für $n \neq k$ gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}(n-k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, also folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_{N,f}(x)\right|^2\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} f_n\overline{f_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} f_n\overline{f_n}\mathrm{e}^{0}\,\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{n=-N}^{N}\left|f_n\right|^2.$$

Da f Lipschitz-stetig ist und $f(-\pi) = f(\pi)$ gilt, folgt mit Satz 5.1 $f(x) = \lim_{N\to\infty} S_{N,f}(x)$ und damit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\lim_{N\to\infty}S_{N,f}(x)\right|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{N\to\infty}\left|S_{N,f}(x)\right|^2\mathrm{d}x\,,$$

da Betrag sowie Quadrieren stetige Operationen sind. Weiter konvergiert die Fourier-Reihe nach T 10.3 gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$, deshalb kann man Integration und Grenzwertbildung vertauschen (Satz 4.2) und es ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|S_{N,f}(x)\right|^2\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\sum_{n=-N}^{N}\left|f_n\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f_n\right|^2$$

wie behauptet.

b) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2 &= \int_{-\pi}^{0}((\pi/2)+x)^2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}((\pi/2)-x)^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2/4)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0}\pi x\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\pi}\pi x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x\\ &= (\pi^2/4)x\Big|_{-\pi}^{\pi} + (\pi/2)x^2\Big|_{-\pi}^{0} - (\pi/2)x^2\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{3}x^3\Big|_{-\pi}^{\pi}\\ &= \pi^3/6\end{aligned}$$

und erhalten mit der *Parsevalschen Gleichung*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \cdot (\pi^3/6) = \pi^2/12 \, .$$

c) Die Fourier-Koeffizienten von $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (\pi/2) - |x|$ haben wir bereits in der Vorlesung berechnet. Es ist

$$f_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}\right)^2 = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

und wir erhalten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2\right) = \frac{\pi^2}{8} \cdot \left(\frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{1}{96}\pi^4$.

Weiter ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

und es folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$. Schließlich ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{1}{96}\pi^4 = \frac{1}{90}\pi^4 \, .$$

T 10.1 a) Angenommen, es gibt eine Konstante $L \geq 0$ derart, dass $|\tan y - \tan 0| \leq L|y - 0|$ gilt für alle $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Wegen $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}} \tan y = \infty$ wäre dann $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}} L \cdot y = \infty$, was offensichtlich falsch ist.

Also ist auch die Annahme falsch und f ist nicht Lipschitz-stetig.

b) Die Funktion tan ist auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-t, t]$ mit $0 < t < \frac{\pi}{2}$ stetig differenzierbar. Nach Lemma 1 aus der Vorlesung ist $\tan\big|_{[-t,t]}$ Lipschitz-stetig. Insbesondere ist dann auch $\tan\big|_{(-t,t)}$ Lipschitz-stetig.

Mit $t = \frac{\pi}{4}$ folgt: f ist Lipschitz-stetig.

e) f ist in $[-1, 1] \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(y) = \sin\frac{1}{y} + y \cdot \cos\frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \sin\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\cos\frac{1}{y}$. Mit $y_n := \frac{1}{(2n-1)\pi}$ gilt

$$f'(y_n) = 0 - \frac{1}{y_n} \cdot (-1) = (2n-1)\pi \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \, .$$

Wir nehmen an, es gibt eine Konstante $L \geq 0$ derart, dass $|f(y_2) - f(y_1)| \leq L|y_2 - y_1|$ gilt für alle $y_1, y_2 \in [-1, 1]$.

Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $(2n-1)\pi > L$ gilt. $f'(y_n)$ können wir auch als Grenzwert des Differenzenquotienten schreiben. Es ist

$$(2n-1)\pi = f'(y_n) = \lim_{y \to y_n} \frac{f(y) - f(y_n)}{y - y_n};$$

insbesondere gibt es also ein y_0 derart, dass $\frac{f(y_0)-f(y_n)}{y_0-y_n} > L$ gilt. Daraus folgt

$$\left| \frac{f(y_0) - f(y_n)}{y_0 - y_n} \right| > L \;\Rightarrow\; \big|f(y_0) - f(y_n)\big| > L|y_0 - y_n|$$

im Widerspruch zur Annahme. Die Annahme war also falsch; folglich ist f nicht Lipschitz-stetig.

(für (c), (d) siehe gesondertes Blatt)

T 10.2 a) Mit den Additionstheoremen gilt $\cos\big((n+m)x\big) = \cos(nx)\cos(mx) - \sin(nx)\sin(mx)$ und $\cos\big((n-m)x\big) = \cos(nx)\cos(mx) + \sin(nx)\sin(mx)$.

Daraus folgt $\cos\big((n+m)x\big) + \cos\big((n-m)x\big) = 2\cos(nx)\cos(mx)$ und weiter

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n+m)x\big)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n-m)x\big)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

sowie $\cos\big((n+m)x\big) - \cos\big((n-m)x\big) = -2\sin(nx)\sin(mx)$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n+m)x\big)\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n-m)x\big)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Integrale auf der linken Seite können wir leicht ausrechnen. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$ ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n+m)x\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+m}\sin\big((n+m)x\big)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

und auch

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((n-m)x\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-m}\sin\big((n-m)x\big)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,.$$

Folglich gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x$ wie behauptet.

b) Hier bentuzen wir die Identitäten $\sin\big((n+m)x\big) = \cos(nx)\sin(mx) + \sin(nx)\cos(mx)$ und $\sin\big((n-m)x\big) = -\cos(nx)\sin(mx) + \sin(nx)\cos(mx)$.

Daraus folgt $\sin\big((n+m)x\big) + \sin\big((n-m)x\big) = -2\cos(nx)\sin(mx)$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n+m)x\big)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n-m)x\big)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq 0$ oder $n \neq 0$ gilt hier

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n+m)x\big)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{n+m}\cos\big((n+m)x\big)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n+m}\Big(\cos\big(-(n+m)\pi\big) - (\cos\big((n+m)\pi\big)\Big) \\ &= -\frac{1}{n+m}\Big(\cos\big((n+m)\pi\big) - (\cos\big((n+m)\pi\big)\Big) = 0;\end{aligned}$$

für $m = n = 0$ gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n+m)x\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Für $m \neq n$ gilt auch $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n-m)x\big)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-m}\cos\big((n-m)x\big)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ und für $m = n$ ist $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((n-m)x\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Insgesamt folgt also $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ wie behauptet.