PROF. DR. GERO FRIESECKE
DR. JOHANNES GIANNOULIS

Lösungsvorschläge

H 9.1 *Fourier-Reihen.*

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - + \cdots$.

Lösung:

a) Es gilt

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(-nx)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(-nx)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right).$$

Mittels partieller Integration erhalten wir für $n \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}x^2\sin(nx)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$
$$= 0 - \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n}x\,\cos(nx)\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{2}{n^2}\big(\pi\,\cos(n\pi) - (-\pi)\cos(-n\pi)\big) - \frac{2}{n^2}\,\frac{1}{n}\sin(nx)\,\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{4\pi}{n^2}\cos(n\pi) = (-1)^n\,\frac{4\pi}{n^2}$$

und es ist $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(0\cdot x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^3$.

Weiter gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit erhalten wir $f_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^2}{3}$ und $f_n = \frac{1}{2\pi}\cdot(-1)^n\,\frac{4\pi}{n^2} = (-1)^n\,\frac{2}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist also insbesondere $f_n = f_{-n}$; daraus folgt $f_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + f_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = f_n\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\big) = f_n\cdot 2\cos(nx)$ und schließlich

$$S_{N,f}(x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = f_0 + 2\sum_{n=1}^{N} f_n\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Die Fourier-Reihe von f lautet also

$$\lim_{N\to\infty} S_{N,f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

b) Da f Lipschitz-stetig ist, konvergiert die Fourier-Reihe von f punktweise gegen f, also

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_{N,f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2} \qquad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi]$$

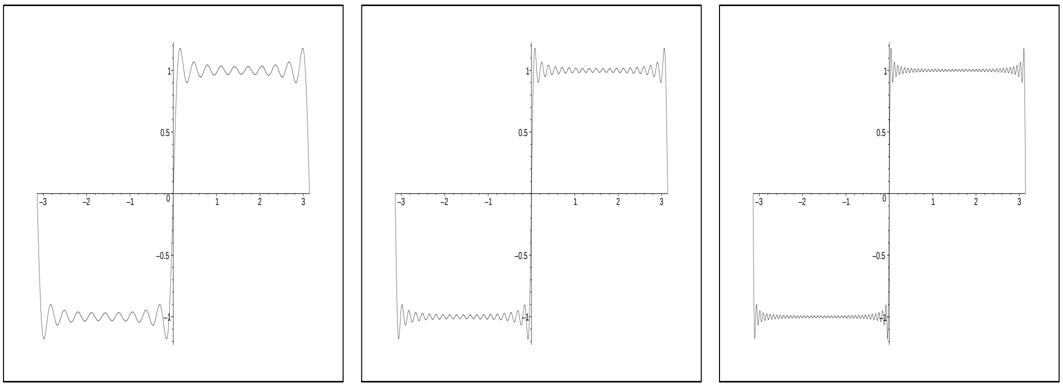
und für $x = 0$ erhalten wir $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Es folgt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{12}$.

H 9.2 *Das Gibbssche Phänomen.*

Gegeben ist die Funktion $\quad f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass für die N-te Fourier-Partialsumme $S_{N,f}$ gilt

$$S_{N,f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \{1,\ldots,N\} \text{ ungerade}} \frac{\sin(nx)}{n}\,.$$



$S_{N,f}(x)$ für $N = 20\,,\ 40\,,\ 80$

(b) Wir wollen herausfinden, ob die „Ausreißer“ in der Nähe von $x = 0$ für großes N verschwinden, d.h. ob das Maximum von $S_{N,f}(x)$ gegen 1 konvergiert für $N \to \infty$.
Zeigen Sie dazu für ungerades N, dass $\; S'_{N,f}(y) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin((N+1)y)}{\sin y} \;$ gilt und finden Sie alle Stellen $x \in (0, \pi)$, an welchen $S_{N,f}(x)$ ein
(i) lokales Minimum, (ii) lokales Maximum, (iii) globales Maximum
annimmt.
Hinweis: Es gilt $\quad S_{N,f}(x) = \int_0^x S'_{N,f}(y)\,\mathrm{d}y$;
der Nenner in obiger Formel für $S'_{N,f}(y)$ ist monoton wachsend mit $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Zeigen Sie $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_{N,f}\big(\tfrac{\pi}{N+1}\big) = G$ mit der *Gibbsschen Konstante*

$$G = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad (= 1{,}179...)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie $S_{N,f}\big(\frac{\pi}{N+1}\big)$ als Riemannsche Summe.

Lösung:

a) Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten von f. Es ist

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \bigg(\int_{-\pi}^{0} -1\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x \bigg) = 0$$

und für $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \bigg(\int_{-\pi}^{0} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \bigg) \\ &= \frac{1}{2\pi} \bigg(\frac{1}{\mathrm{i}n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\mathrm{i}n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \Big|_{0}^{\pi} \bigg) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}n} \big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} + 1 \big) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade}\,, \\ \frac{2}{\mathrm{i}n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$S_{N,f}(x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{\substack{n=-N \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{2}{\mathrm{i}n\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{2}{\mathrm{i}n\pi}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\big)$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{4}{n\pi}\,\sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}$$

wie behauptet.

b) Es gilt $\quad S'_{N,f}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \cos(nx)$. $\quad$ Wir zeigen nun

$$2\sin x \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \cos(nx) \;=\; \sin\big((N+1)x\big) \qquad \text{für alle ungeraden } N \in \mathbb{N}\,.$$

Aus den Additionstheoremen erhalten wir $\sin(2x) = 2\cos x\,\sin x$; dies ist die Behauptung für $N = 1$.

Nun nehmen wir an, dass die Behauptung für eine ungerade positive Zahl N gilt. Dann ist

$$2\sin x \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N+2} \cos(nx) \;=\; \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} 2\sin x\,\cos(nx) \;+\; 2\sin x\,\cos\big((N+2)x\big)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin\big((N+1)x\big) + 2\sin x\,\cos\big((N+2)x\big) \\
&= \sin\big((N+1)x\big)\big(\cos^2 x + \sin^2 x\big) + 2\sin x\,\Big(\cos\big((N+1)x\big)\,\cos x - \sin\big((N+1)x\big)\,\sin x\Big) \\
&= \sin\big((N+1)x\big)\,\big(\cos^2 x - \sin^2 x\big) + \cos\big((N+1)x\big)\cdot 2\sin x\,\cos x \\
&= \sin\big((N+1)x\big)\,\cos(2x) + \cos\big((N+1)x\big)\,\sin(2x) \\
&= \sin\big((N+3)x\big)\,,
\end{aligned}$$

die Behauptung gilt also auch für (die nächstgrößere ungerade Zahl) $N+2$.
Mittels vollständiger Induktion erhalten wir

$$S'_{N,f}(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\big((N+1)x\big)}{\sin x} \qquad \text{für alle ungeraden } N \in \mathbb{N}\,.$$

Um die Extremalstellen von $S_{N,f}$ auf $(0,\pi)$ zu bestimmen, suchen wir die Lösungen von $S'_{N,f}(x) = 0$ für $x \in (0,\pi)$. Dies sind genau die Punkte $\big\{\frac{1}{N+1}\pi, \frac{2}{N+1}\pi, \ldots, \frac{N}{N+1}\pi\big\}$.
An jeder dieser Stellen ändert $S'_{N,f}(x)$ sein Vorzeichen, zunächst von + nach −; es handelt sich also abwechselnd um (lokale) Maximums- und Minimumsstellen.

Wir suchen nun nach globalen Maxima von $S_{N,f}$ in $(0,\pi)$. Wegen $S_{N,f}(x) = S_{N,f}(\pi - x)$ genügt es, das Intervall $(0, \frac{\pi}{2}]$ zu untersuchen.

Für ungerades $k < \frac{N+1}{2}$ gilt $\quad S_{N,f}\big(\frac{k\pi}{N+1}\big) - S_{N,f}\big(\frac{(k+1)\pi}{N+1}\big) = -\int_{\frac{k\pi}{N+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{N+1}} \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin((N+1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \quad$ und

$$\Big|S_{N,f}\Big(\frac{(k+1)\pi}{N+1}\Big) - S_{N,f}\Big(\frac{(k+2)\pi}{N+1}\Big)\Big| = S_{N,f}\Big(\frac{(k+2)\pi}{N+1}\Big) - S_{N,f}\Big(\frac{(k+1)\pi}{N+1}\Big) = \int_{\frac{(k+1)\pi}{N+1}}^{\frac{(k+2)\pi}{N+1}} \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\big((N+1)x\big)}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Da sin auf dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend ist, gilt

$$\int_{\frac{k\pi}{N+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{N+1}} \frac{2}{\pi} \frac{|\sin((N+1)x)|}{\sin x}\,\mathrm{d}x > \int_{\frac{(k+1)\pi}{N+1}}^{\frac{(k+2)\pi}{N+1}} \frac{2}{\pi} \frac{|\sin((N+1)x)|}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

und es folgt $S_{N,f}\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) > S_{N,f}\left(\frac{(k+2)\pi}{N+1}\right)$. Die einzige globale Maximumsstelle von $S_{N,f}$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ liegt also bei $x = \frac{\pi}{N+1}$.

In $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ gibt es ebenfalls eine einzige globale Maximumsstelle bei $x = \frac{N\pi}{N+1}$.

c) Wegen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ existiert für

$$g : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

das Integral $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$.

Um dieses zu berechnen, betrachten wir die Riemannschen Summen zu den Zerlegungen

$$\{0\} \cup \left\{\frac{\pi}{N+1}, \frac{3\pi}{N+1}, \frac{5\pi}{N+1}, \ldots, \frac{N\pi}{N+1}\right\} \cup \{\pi\} \qquad \text{mit } N \in \mathbb{N} \text{ ungerade}$$

und erhalten

$$\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N \text{ ungerade}}} \left(-g\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \cdot \frac{\pi}{N+1} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} g\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \cdot \frac{2\pi}{N+1} + g(\pi) \cdot \frac{\pi}{N+1} \right)$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ N \text{ ungerade}}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} g\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \cdot \frac{2\pi}{N+1} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N \text{ ungerade}}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)}{\frac{n\pi}{N+1}} \cdot \frac{2\pi}{N+1}$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ N \text{ ungerade}}} 2 \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{N} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \lim_{N\to\infty} S_{N,f}\left(\frac{\pi}{N+1}\right).$$

Es gilt also $\lim\limits_{N\to\infty} S_{N,f}\left(\frac{\pi}{N+1}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Bemerkung: Wegen

$$G := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 1{,}179... > 1$$

konvergiert das Maximum von $S_{N,f}(x)$ also nicht wie erhofft gegen 1 für $N \to \infty$, obwohl $S_{N,f}(x)$ für alle $x \in (-\pi, \pi)$ gegen $f(x)$ konvergiert.[1] Dieser Sachverhalt wird als *Gibbsches Phänomen* bezeichnet.

[1] Wir haben in dieser Aufgabe die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe von f nicht bewiesen und auch nicht den genauen numerischen Wert von G berechnet.

H 9.3 *Schwingende Saite*

Die Auslenkung $u(x,t)$ einer schwingenden Saite am Punkt $x \in [0,\pi]$ zur Zeit $t \in [0,\infty)$ genügt (in geeigneten physikalischen Einheiten) der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad \text{(Wellengleichung)} \tag{W}$$

bezüglich der Randbedingung

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0,\infty) \qquad \text{(festgehaltene Enden)} \tag{R}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = w(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x) \qquad \text{(Anfangsauslenkung, -geschwindigkeit).} \tag{A}$$

Hierbei seien $v, w : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ gegebene Lipschitz-stetige Funktionen mit $w(0) = w(\pi) = 0$, $v(0) = v(\pi) = 0$.

Bestimmen Sie eine formale Lösung u von (W), (R), (A) mit Hilfe der Fourier-Reihen-Methode, analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung für die Wärmeleitungsgleichung. Bestimmen Sie u explizit im Falle $w(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$, $v = 0$ (gezupfte Saite), und skizzieren Sie u für verschiedene Zeiten t.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst eine formale Lösung. Mit **T 9.2 b)** gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx)\,, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(nx)\,, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n(t)\sin(nx)\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $\quad b_n''(t) = -n^2 b_n(t) \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt zunächst

$$b_n(t) = c_n\cos(nt) + d_n\sin(nt) \qquad \text{mit } c_n,\ d_n \in \mathbb{R}\,.$$

Wir setzen $t = 0$ ein und erhalten $\quad c_n = w_n \quad$ und $\quad d_n = \frac{1}{n}v_n, \quad$ also

$$b_n(t) = w_n\cos(nt) + \frac{1}{n}v_n\sin(nt) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,,$$

wobei $\quad w_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x \quad$ und $\quad v_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$.

Die formale Lösung lautet damit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(w_n\cos(nt) + \frac{1}{n}v_n\sin(nt)\Big)\sin(nx)\,.$$

Für $\quad w(x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \quad$ und $\quad v(x) = 0 \quad$ erhalten wir $\quad v_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \quad$ und

$$w_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sin\big(n(\pi - x)\big) &= \sin(n\pi)\cos(-nx) + \cos(n\pi)\sin(-nx) \\ &= -\cos(n\pi)\sin(nx) = \begin{cases} \sin(nx) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -\sin(nx) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

gilt
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\,\sin\big(n(\pi - x)\big)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x\,,$$

also $w_n = 0$ für n gerade und

$$\begin{aligned} w_n &= 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\,x\,\cos(nx)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{2}{n}\,\underbrace{\cos\big(\frac{\pi}{2}\,n\big)}_{=0 \text{ da } n \text{ ungerade}} + \frac{4}{n^2\pi}\,\sin(nx)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{n^2\pi}\,\sin\big(\frac{\pi}{2}\,n\big) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{4}{n^2\pi} \end{aligned}$$

für n ungerade.

Die formale Lösung lautet also in diesem Fall

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n\,\cos(nt)\,\sin(nx) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{4}{n^2\pi}\,\cos(nt)\,\sin(nx)\,.$$

T 9.1 *Fourier-Reihen reellwertiger Funktionen.*

Es sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ (d. h. f reellwertig), f Lipschitz-stetig, $f(\pi) = f(-\pi)$. Zeigen Sie: Mit

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) \qquad \text{für alle } x \in [-\pi,\pi]\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie Realteil und Imaginärteil der (komplexen) Fourier-Reihe für f.

Lösung:

Es ist $\quad f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,\mathrm{d}x\Bigg).$

Da f reellwertig ist, gilt insbesondere

$$\Re(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \Im(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit $\cos(nx) = \cos(-nx)$ und $\sin(nx) = -\sin(-nx)$ erhalten wir $f_{-n} = \overline{f_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $f_0 \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
S_{N,f}(x) &= \sum_{n=-N}^{N} f_n\mathrm{e}^{inx} = f_0 + \sum_{n=1}^{N}\Big(f_n\mathrm{e}^{inx} + f_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\Big)\\
&= f_0 + \sum_{n=1}^{N}\Big(f_n\cos(nx) + \mathrm{i}\,f_n\sin(nx) + f_{-n}\cos(-nx) + \mathrm{i}\,f_{-n}\sin(-nx)\Big)\\
&= f_0 + \sum_{n=1}^{N}\Big((f_n + f_{-n})\cos(nx) + \mathrm{i}(f_n - f_{-n})\sin(nx)\Big)\\
&= f_0 + \sum_{n=1}^{N}\Big((f_n + \overline{f_n})\cos(nx) + \mathrm{i}(f_n - \overline{f_n})\sin(nx)\Big)\\
&= f_0 + \sum_{n=1}^{N}\Big(2\,\Re(f_n)\cos(nx) - 2\,\Im(f_n)\sin(nx)\Big)\,,
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $a_n := 2\,\Re(f_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $b_n := -2\,\Im(f_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und erhalten

$$S_{N,f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)\,.$$

Daraus folgt (nach Satz 8.1)

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} S_{N,f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$$

wie behauptet.

T 9.2 *Fourier-Reihen gerader und ungerader Funktionen.*

(a) Eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt für alle x, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ gilt für alle x.
Sei f Lipschitz-stetig, $f(-\pi) = f(\pi)$. Betrachten Sie die Darstellung von f aus **T 9.1**.
Zeigen Sie:

$$f \text{ gerade} \iff b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,,$$

$$f \text{ ungerade} \iff a_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

(b) Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, $f(0) = f(\pi) = 0$. Zeigen Sie: Es gibt $b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ für alle $x \in [0, \pi]$.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion $\widetilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

Lösung:

a) $\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{“}}$ Es sei zunächst $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{0} h(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{also} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Es sei weiter $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion. Dann ist $g(-x)h(-x) = g(x)\big(-h(x)\big)$, also ist $g \cdot h$ eine ungerade Funktion und es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Da die Funktionen $\cos(n\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ gerade und die Funktionen $\sin(n\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ungerade sind, erhalten wir aus der Darstellung von f aus **T 9.1**

$$f \text{ gerade} \implies b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,,$$

$$f \text{ ungerade} \implies a_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

$\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{“}}$ Es sei $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Darstellung aus **T 9.1** lautet dann $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ und es folgt

$$f(-x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(-nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = f(x)\,;$$

f ist folglich eine gerade Funktion.

Falls $a_n = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, erhalten wir mit der Darstellung aus **T 9.1** $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, also

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(-nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = -f(x)\,;$$

f ist eine ungerade Funktion.

b) Wir betrachten die Funktion $\widetilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [0, \pi], \\ -f(-x) & \text{für } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

Es gilt $\widetilde{f}(-\pi) = -f(\pi) = 0 = f(\pi) = \widetilde{f}(\pi)$ und $\widetilde{f}$ ist Lipschitz-stetig auf $[-\pi, \pi]$: Mit $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|$ für $x, y \in [0, \pi]$ gilt

$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| = |f(x) - f(y)| \le C|x - y| \quad \text{für } x, y \in [0, \pi],$$

$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| = |f(-y) - f(-x)| \le C|y - x| \quad \text{für } x, y \in [-\pi, 0],$$

$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| = |f(-x) + f(y)| \le |f(-x)| + |f(y)| \le C(-x + y) = C|x - y| \quad \text{für } x \in [-\pi, 0] \text{ und } y \in [0, \pi],$$

wobei die letzte Abschätzung aus $|f(x)| \le Cx$ für alle $x \in [0, \pi]$ folgt (da $f(0) = 0$).
Damit hat $\widetilde{f}$ nach **T 9.1** und **T 9.2 a)** die angegebene Darstellung für $x \in [-\pi, \pi]$, und damit insbesondere f diese Darstellung für $x \in [0, \pi]$ mit $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x$.