Z 3.1

$$A(x,y) := \int_a^x \left(\int_c^y f(s,t)\,dt \right) ds$$

$$B(x,y) := \int_c^y \left(\int_a^x f(s,t)\,ds \right) dt$$

Z.z.: $A(x,y) - B(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in [a,b$

Bew.:

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow \forall y \in [c,d] : \int_c^y f(s,t)\,dt$ stetig für $s \in [a,b]$

$\underset{[S.V]}{\Rightarrow} \forall y \in [c,d] : \frac{\partial}{\partial x} A(x,y) = \int_c^y f(x,t)\,dt$

$\underset{HDI}{}$ für $x \in [a,b]$

$\underset{HDI}{\Rightarrow} \forall x \in [a,b] : \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} A(x,y) = f(x,y)$ für $y \in [c,d]$

Analog:

$\forall x \in [a,b] : \frac{\partial}{\partial y} B(x,y) = \int_a^x f(s,y)\,ds$ für $y \in [c,d]$

$\Rightarrow \forall y \in [c,d] : \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} B(x,y) = f(x,y)$ für $x \in [a,b]$

Insgesamt:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} A(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} B(x,y)$$

$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$

Da $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} B(x,y) = f(x,y)$ stetig für $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$

folgt aus "Bem." zu Satz von Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} B(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} B(x,y)$$

Damit folgt aus (1):

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} A(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} B(x,y)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(A-B)(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)\in[a,b]\times[c,$$

$\Rightarrow \forall x\in[a,b]: \frac{\partial}{\partial x}(A-B)(x,y) = \text{const. bzgl. } y\in[c,d]$ (

Ferner gilt $\forall x\in[a,b]$: $A(x,c) = \int_a^x \Big(\underbrace{\int_c^c f(s,t)\,dt}_{=0}\Big)\,ds =$

$$\underbrace{B(x,c) = \int_c^c \left(\int_a^x f(s,t)\,ds\right)dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow \forall x\in[a,b]: (A-B)(x,c) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x\in[a,b]: \frac{\partial}{\partial x}(A-B)(x,c) = 0 \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A-B)(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d]$$

$$\Rightarrow \forall y\in[c,d]: (A-B)(x,y) = \text{const. bzgl. } x\in[a,b] \qquad (4)$$

Ferner $A(a,y) = \int_a^a \ldots = 0$,

$B(a,y) = \int_c^y \int_a^a \ldots = 0$.

$$\Rightarrow \forall y\in[c,d]: (A-B)(a,y) = 0 \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt $(A-B)(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d]$

3.1

a) $\overline{x} = \frac{1}{F} \int_a^b \left(\int_0^{g(x)} x \, dy \right) dx = \frac{1}{F} \int_a^b x g(x) \, dx$

$\overline{y} = \frac{1}{F} \int_a^b \left(\int_0^{g(x)} y \, dy \right) dx = \frac{1}{F} \int_a^b \frac{(g(x))^2}{2} \, dx$

b) $F = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \;\overset{\equiv}{=}\; \int_\pi^0 (r \sin\varphi)(-r \sin\varphi) \, d\varphi$

$x = r\cos\varphi, \ \varphi \in [0, \pi]$

$\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi$

$r^2 - x^2 = r^2 \sin^2\varphi$

$\sqrt{r^2 - x^2} = r \underbrace{\sin\varphi}_{\geq 0} \quad [\varphi \in [0,\pi]]$

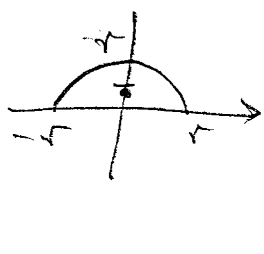
$= r^2 \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{r^2 \pi}{2}$.

$\boxed{\begin{array}{l} [\![\int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi \underset{p.I.}{=} \int_0^\pi \cos^2\varphi \, d\varphi \\ \int_0^\pi (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \, d\varphi = 1 \\ \Rightarrow \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^\pi \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}]\!] \end{array}}$

$\overline{x} = \frac{1}{F} \int_{-r}^{r} x \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 0$, da der Integrand ungerade ist.

$\overline{y} = \frac{1}{F} \int_{-r}^{r} \frac{r^2 - x^2}{2} \, dx = \frac{1}{F} \left(\frac{r^2}{\cancel{2}} \cancel{2} r - \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \cdot \frac{r^3}{3} \right)$

$= \frac{1}{F} \frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}$. $[\in (0, \frac{r}{2})]$.



H 3.2

Wähle $x_0 \in \Omega$ und dazu $\delta > 0$, sodass $\overline{B_\delta(x_0)} \subseteq$ … $:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq$

Wir zeigen: $\exists\, C_\delta > 0 : \forall\, x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C_\delta \cdot |x - x_0| .$$

[Daraus würde folgen: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \tilde{\delta} := \min\{\frac{\varepsilon}{C_\delta}, \delta\}$

$$|f(x) - f(x_0)| < C_\delta \cdot \frac{\varepsilon}{C_\delta} = \varepsilon \quad \forall\, x \in B_{\tilde{\delta}}(x_0).]$$

Zu jedem $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ betrachten wir $g(t) := f(x_0 + t e)$, $e := \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$, $t \in [0, |x - x_0|]$. Es gilt $g(|x - x_0|) = f(x)$, $g(0) = f(x_0)$ und $\frac{d}{dt} g(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + te + he) - f(x_0 + te)}{h} =$$

$$= \frac{d}{dt} f(x_0 + \overset{\text{the}}{te})\Big|_{h=0} = Df(x_0 + te) \cdot e ,$$

wobei die letzte Gleichung gilt, da f stetig diff.bar ist. Aus dem selben Grunde ist $\frac{d}{dt} g(t) = \underbrace{Df(x_0 + te) \cdot e}_{= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + te) \cdot e_j}$ stetig für $t \in [0, |x - x_0|]$.

Damit folgt aus dem Hauptsatz der Differentia[l-]
und Integralrechnung (HDI)
für eine unabhängige Veränderliche:

$$|f(x)-f(x_0)| = \Big|\int_{t=0}^{|x-x_0|} \underbrace{Df(x_0+te)\cdot e}_{\in\mathbb{R}}\,dt\Big|$$

$$\leq \int_{t=0}^{|x-x_0|} |Df(x_0+te)\cdot e|\,dt \qquad (2)$$

Da $f:\Omega\to\mathbb{R}$ stet. diff.bar gilt

$\frac{\partial f}{\partial x_j}:\Omega\to\mathbb{R}$ stetig $\forall j=1,\dots,n$

$\Longrightarrow$ $\exists M_\delta>0: \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|\leq M_\delta \quad \forall x\in\overline{B_\delta(x_0)}\subseteq\Omega$

[vgl. V]

Damit gilt $\forall t\in[0,|x-x_0|]$, $e:=\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$

für bel. $x\in B_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$:

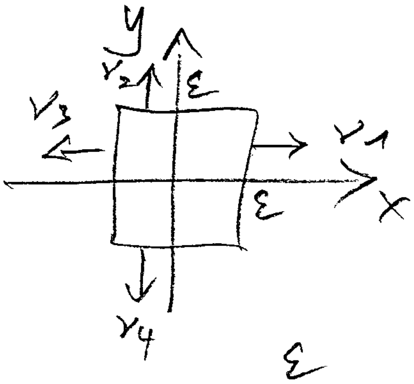
$$|Df(x_0+te)\cdot e| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|\underbrace{|e_j|}_{\leq 1}\leq nM_\delta$$

Damit folgt aus (2):

$$|f(x)-f(x_0)|\leq \underbrace{nM_\delta}_{=:C_\delta}\underbrace{\int_{t=0}^{|x-x_0|}dt}_{=|x-x_0|}, \quad \text{q.e.d.}$$

H 3.3

(a) (i)



$\nu_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $x = \varepsilon,\ y \in [-\varepsilon, \varepsilon$

$\nu_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ y = \varepsilon$

$\nu_3(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x = -\varepsilon,\ y \in [-\varepsilon, \varepsilon$

$\nu_4(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad x \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ y = -$

(ii)

$$\int_{\partial Q_\varepsilon} f \cdot \nu = \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{f(\varepsilon, y) \cdot \nu_1(\varepsilon, y)}_{= f_1(\varepsilon, y)} \, dy$$

$$+ \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{f(x, \varepsilon) \cdot \nu_2(x, \varepsilon)}_{= f_2(x, \varepsilon)} \, dx$$

$$+ \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{f(-\varepsilon, y) \cdot \nu_3(-\varepsilon, y)}_{= -f_1(-\varepsilon, y)} \, dy$$

$$+ \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{f(x, -\varepsilon) \cdot \nu_4(x, -\varepsilon)}_{= -f_2(x, -\varepsilon)} \, dx$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_1(\varepsilon, y) \, dy + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_2(x, \varepsilon) \, dx$$

$$- \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_1(-\varepsilon, y) \, dy - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_2(x, -\varepsilon) \, dx .$$

(iii) $$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \operatorname{div} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,dx}_{\underset{HDI}{=} f_1(\varepsilon,y)-f_1(-\varepsilon,y)}\,dy + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy}_{\underset{Fubini}{=}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,dy}_{\underset{HDI}{=} f_2(x,\varepsilon)-f_2(x,-\varepsilon)}\,dx}$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_1(\varepsilon,y)\,dy - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_1(-\varepsilon,y)\,dy$$

$$+ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_2(x,\varepsilon)\,dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_2(x,-\varepsilon)\,dx$$

$$\underset{(ii)}{=} \int_{\partial Q_\varepsilon} f\cdot\nu.$$

(iv) $$\int_{Q_\varepsilon} dx\,dy = (2\varepsilon)^2 \Rightarrow \operatorname{div} f(0,0) = \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{Q_\varepsilon}\operatorname{div} f(0,0)$$

$$\underset{(iii)}{\Rightarrow} \underline{\text{z.z.}}: \underbrace{\left|\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{Q_\varepsilon}\left(\operatorname{div} f(x,y)-\operatorname{div} f(0,0)\right)\right|}_{=:\,\xi(\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\xi(\varepsilon) \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{Q_\varepsilon}\max_{(x,y)\in Q_\varepsilon}\left|\operatorname{div} f(x,y)-\operatorname{div} f(0,0)\right|$$

$$= \max_{(x,y)\in Q_\varepsilon}\left|\operatorname{div} f(x,y)-\operatorname{div} f(0,0)\right| =: g(\varepsilon)$$

$\Big[$ (*): $\left|\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \int_a^b \left|\int_c^d f(x,y)\,dx\right| dy$

$\le \int_a^b \int_c^d |f(x,y)|\,dx\,dy$ [falls $|f(x,y)|$ über $[a,b]\times[c,d]$ int.bar, was für $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig gegeben ist] $\Big]$

$\le (b-a)(d-c) \max_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} |f(x,y)|$

Da $\operatorname{div} f: \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $(0,0)\in\Omega$, Ω offen $\Rightarrow$

$\forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall (x,y) \in \overline{B_{\sqrt{2}\varepsilon_0}(0,0)}\ [\subset \Omega]$:

$|\operatorname{div} f(x,y) - \operatorname{div} f(0,0)| < \gamma$

$\Rightarrow \forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0$: $\underbrace{\max_{(x,y)\in Q_{\varepsilon_0}} |\operatorname{div} f(x,y) - \operatorname{div} f(0,0)|}_{=:\, g(\varepsilon_0)} < \gamma$

$[Q_{\varepsilon_0} \subset \overline{B_{\sqrt{2}\varepsilon_0}(0,0)}]$

$\underset{g \text{ mon. wachs.}}{\Rightarrow} \forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$: $g(\varepsilon) < \gamma$

$\underset{\tilde g(\varepsilon)\le g(\varepsilon)}{\Longrightarrow} \forall \gamma > 0\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$: $\tilde g(\varepsilon) < \gamma$

$\Leftrightarrow \tilde g(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \downarrow 0$, q.e.d.

(b) Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\operatorname{div} f = 0$ auf Ω. D.h. nach (iv) $\forall x_0 \in \Omega$:

$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \underbrace{\frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\partial(Q_\varepsilon + x_0)} f\cdot\nu}_{\text{[Quellendichte]}} = \operatorname{div} f(x_0) = 0$. [modulo Translation um x_0]

$\left[\Leftrightarrow \int_{\partial(Q_\varepsilon+x_0)} f\cdot\nu = o(\varepsilon^2)\right]$. D.h. aus keinem noch so kleinen Quader (hier: Quadrat) fliesst insgesamt Masse heraus oder hinein. [d.h. so viel wie hineinfliesst fliesst auch heraus] Beispiele: $f(x) = \begin{pmatrix} g(x_2) \\ h(x_1) \end{pmatrix}$

[z.B. Rotation $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$]