H 2.1 | Für $c:(-\delta,\delta)\xrightarrow{\text{stetig}} \Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ stetig diff'bar, wobei Ω offen, gi[lt]

(a) $$\frac{d}{dt} f(c(t)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t)) \cdot \frac{dc_i}{dt}$$

$$= \underbrace{Df(c(t))}_{\in\mathbb{R}^n}{}^{T} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Skalarprodukt im } \mathbb{R}^n}}{\cdot} \underbrace{\frac{dc}{dt}}_{\in\mathbb{R}^n}(t) = \operatorname{grad} f(c(t)) \cdot \frac{d}{dt} c(t)$$

Da hier $(-\delta,\delta) \ni t \longmapsto \underbrace{f(c(t))}_{\in\mathbb{R}} = \text{const.}$ (in t)

folgt $\frac{d}{dt} f(c(t)) = 0$.

Also $\operatorname{grad} f(c(t)) \cdot \frac{d}{dt} c(t) = 0$.

Interpretation:

a) Der Gradient von f an der Stelle $c(t)$ einer Niveaulinie von f steht senkrecht zu dieser ~~Linie~~ (im Sinne, dass er senkrecht zur Tangente an dieser ~~[illegible]~~ Kurve steht).

b) [Für Funktionen f, für die Theorem 1.2(ii) an der Stelle $x_0 = c(t)$ erfüllt ist (d.h. für ~~[illegible]~~ in $c(t)$ total diff.bare* Funktionen)

[[* in der Vorlesung nicht verwendeter Begriff]], also insbesondere für (im Sinne der Vorlesung) stetig differenzierbare Funktionen, gilt für $e \in \mathbb{R}^n$, $|e| \neq 0$

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + te)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \operatorname{grad} f(x_0)\cdot e + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te)-(f(x_0)+\operatorname{grad} f(x_0)\cdot te)}{t}}_{=0}$$

$= 0$, denn

$$\underbrace{\frac{|f(x_0+te)-(f(x_0)+\operatorname{grad} f(x_0)\cdot te)|}{t|e|}}_{\to 0}$$

$\to 0$ [$h = te$ in Th. 1.2. (ii)]

D.h. insbesondere wenn $|e|=1$, dass die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung e, $\frac{d}{dt} f(x_0+te)\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(x_0)\cdot e$.]

Damit gilt für $\frac{d}{dt}c(t) \neq 0$:

$\operatorname{grad} f(c(t)) \cdot \frac{\frac{d}{dt}c(t)}{|\frac{d}{dt}c(t)|} = 0$, d.h. <u>die Richtungsableitung einer stetig diff.baren Funktion f an einem Punkt $c(t)$ einer Niveaulinie in Richtung der Tangente der N. ist gleich 0,</u>

(was der Idee der Niveaulinie ("Panoramaweg") entspricht).

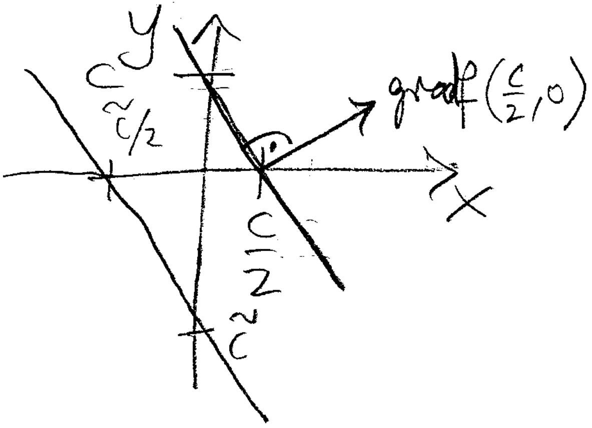
a') Da der Gradient in Richtung des stärksten Anstiegs zeigt (Th. 1.3), bedeutet a), dass der stärkste Anstieg am Punkt $c(t)$ einer Niveaulinie, senkrecht zur (Tangente der) N. passiert.
(Daher steigt man ja auch steile Berge "schräg" runter (bzw. vorher rauf).)

[Im Sinne des Übungsbetriebs genügt als Interpretation a). Die "Beobachtungen eines Bergsteigers" sind nicht nötig.]

H 2.1 (b)

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) := y + 2x$

$$y + 2x = c \iff y = c - 2x$$

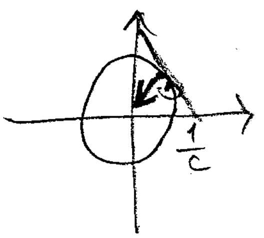


$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f\left(\tfrac{c}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c,\ c>0 \iff \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{c}$$

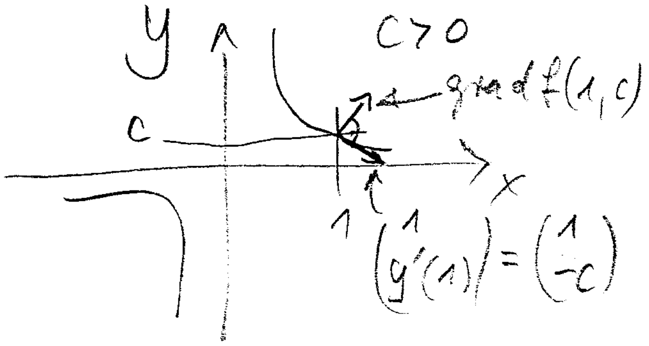


$$\operatorname{grad} f(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

($N_c = \emptyset$ für $c \le 0$) $\quad$ mit $|\operatorname{grad} f(x,y)| = \dfrac{1}{|x|^2}$

(iii) $f(x,y) = xy \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

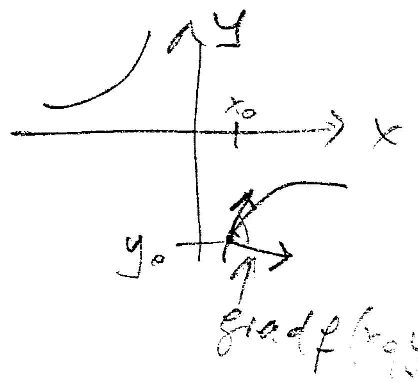


$xy = c \iff y = \dfrac{c}{x}$ für $c \neq 0$

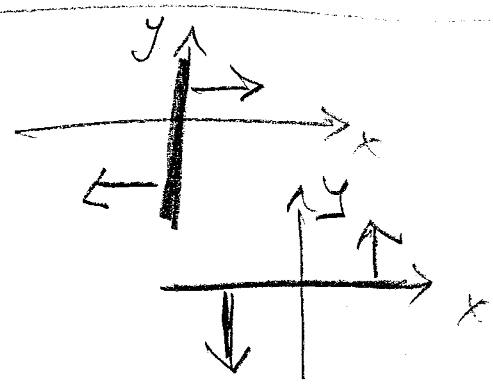
$$\operatorname{grad} f(1,c) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix}$ $\left[\sphericalangle \begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right]$

Analog für $c<0$



$\underline{c=0}$: $N_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0 \vee y=0\}$



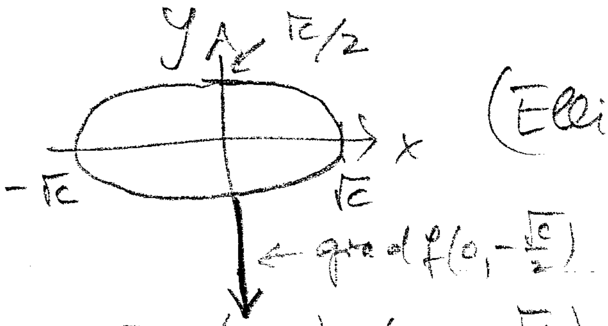
$x=0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(0,y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$

$y=0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

(iv) $f(x,y) = x^2+4y^2$

$c<0$: $N_c = \emptyset$, $c=0$: $N_c = \{(0,0)\}$ $[\operatorname{grad}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$

$c>0$: $N_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+4y^2=c}_{\Leftrightarrow\ x^2+(2y)^2=c}\}$



(Ellipse)

$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

z. B. $(x,y) = (0, -\frac{\sqrt{c}}{2}) \Rightarrow \operatorname{grad} f(0,-\sqrt{c}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\sqrt{c} \end{pmatrix}$

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{x_0^3}{x_0^2+y_0^2} \right| = \frac{\left| x^3(x_0^2+y_0^2) - x_0^3(x^2+y^2) \right|}{(x^2+y^2)(x_0^2+y_0^2)} =: a$$

$$x^3(x_0^2+y_0^2) - x_0^3(x^2+y^2) = x\,x^2(x_0^2+y_0^2) - x_0\,x_0^2(x^2+y^2)$$

$$= (x-x_0)\,x^2(x_0^2+y_0^2) + x_0 \underbrace{\left[x^2(x_0^2+y_0^2) - x_0^2(x^2+y^2)\right]}$$

$$= x^2y_0^2 - x_0^2y^2$$

$$= (x^2-x_0^2)y_0^2 + x_0^2(y_0^2-y^2)$$

$$= (x-x_0)(x+x_0)y_0^2 + (y_0-y)(y_0+y)x_0^2$$

$$= (x-x_0)\left[x^2(x_0^2+y_0^2) + (x+x_0)x_0y_0^2\right] + (y_0-y)\,x_0(y_0+y)x_0^2$$

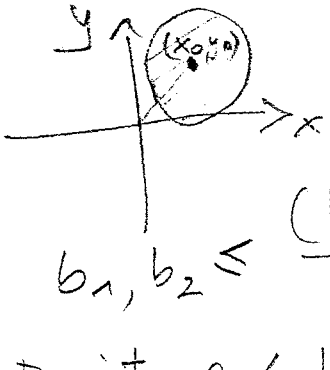
$$a \leq |x-x_0| \Bigg[1 + \underbrace{\frac{(|x|+|x_0|)|x_0|y_0^2}{(x^2+y^2)(x_0^2+y_0^2)}}_{=:b_1} \Bigg] + |y-y_0| \underbrace{\frac{|x_0|(|y_0|+|y|)\ldots}{(x^2+y^2)(x_0^2+y_0^2)}}_{=:b_2}$$

[Wir wollen zeigen: $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0) \Rightarrow f(x_n,y_n) \to f(x_0,y_0)$

Damit genügt es, wenn wir f auf $B_{\frac{|(x_0,y_0)|}{2}}(x_0,y_0)$ betrachten, d.h. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|(x-x_0,y-y_0)| \leq \frac{|(x_0,y_0)|}{2}$

Für diese gilt $|(x,y)| \leq |(x-x_0,y-y_0)| + |(x_0,y_0)| \leq \frac{3}{2}|(x_0,y_0)|$

und $|(x,y)| \geq |(x_0,y_0)| - |(x-x_0,y-y_0)| \geq \frac{|(x_0,y_0)|}{2} > 0$.



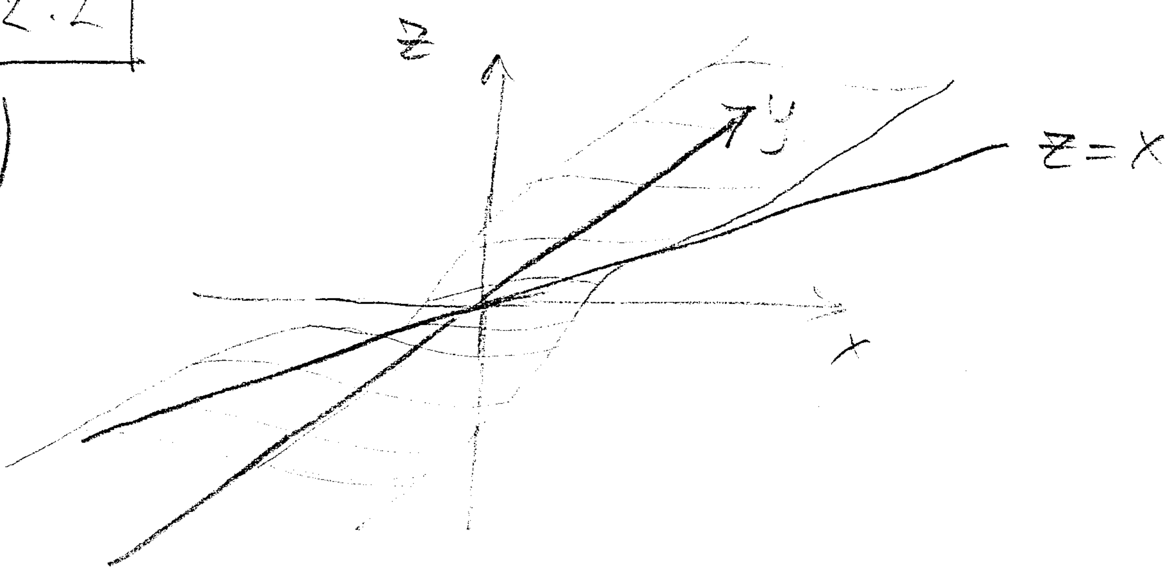
In diesem Gebiet können wir b_1 wie folgt abschätzen:

$$b_1, b_2 \leq \frac{\left(|(x,y)| + |(x_0,y_0)|\right)|(x_0,y_0)|^3}{|(x,y)|^2\,|(x_0,y_0)|^2} = \frac{|(x_0,y_0)|}{|(x,y)|} + \frac{|(x_0,y_0)|^2}{|(x,y)|^2} \leq 2+\ldots$$

Damit $a \leq |x-x_0|\cdot 7 + |y-y_0|\cdot 6 \leq 7\,|(x-x_0,y-y_0)| \Rightarrow$ q.e.d.

2.2

(a)



$f(x,0) = x, \quad f(0,y) = 0, \quad f(-x,y) = -f(x,y)$

$f(x,-y) = f(x,y)$

(b) $f\big|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist stetig als Quotient von Polynomen im $\mathbb{R}^2$, wobei der Nenner nicht Null wird.

[Man kann zeigen (s. Beiblatt): $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq 7\,|(x-x_0, y-y_0)|$ für $|(x-x_0, y-y_0)| \leq \frac{|(x_0,y_0)|}{2}$.]

f ist stetig am Punkt $(0,0)$, denn:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leq |x| \leq |(x,y)|.$$

(c) i.) $\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(ct, st) = \frac{c^3 t^3}{c^2t^2 + s^2t^2} = c^3 t \in \mathbb{R}$ ist diffbar (da linear (in t)) mit $\frac{d}{dt} f(ct,st) = c^3$.

ii.) Richtungsableitung von f im Nullpunkt in Richtung $e \in \mathbb{R}^2$ mit $|e| = 1$, d.h. $e = \binom{c}{s}$ mit $c^2 + s^2 = 1$:

$$\frac{d}{dt} f(te)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(te) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ct,st)}{t} = c^3.$$

[[Vgl. mit Skizze für $c = 1, -1, 0$]]

[Bem.: $\frac{d}{dt} f\left(t\binom{1}{0}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) := \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$, $\frac{d}{dt} f\left(t\binom{0}{1}\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) := \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$

$= 0.$]

iii.) Damit f_1 eine Bestaprox. $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ im Sinne von Th. 1.2 im Nullpunkt

besitzt, muss $\frac{|f(h) - A\cdot h|}{|h|} \to 0 \quad \forall\, h = t\binom{c}{s}$ mit $t \downarrow 0$,

d.h. $\frac{|c^3 t - a_1 ct - a_2 st|}{t} = |c^3 - a_1 c - a_2 s| = 0 \quad \forall\, \left|\binom{c}{s}\right| = 1$

Es gibt kein $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, sodass $c^3 - a_1 c - a_2 s = 0$
$\forall\, c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$ [[$c = 0 \Rightarrow s = \pm 1 \Rightarrow a_2 = 0$;
$c = 1 \Rightarrow a_1 = 1$; $c = \frac{1}{2} \Rightarrow c^3 - c = c(c^2 - 1) \neq 0$]] $\Rightarrow$ Antwort: Nein!

<u>Bem.</u>: Da f $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ "differenzierbar" ist,
d.h. die part. Abl. von f ex. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (s. oben), folgt aus der Nichtex. einer Bestaprox. lin. Abb. nach Th. 1.2, dass die (zumindest eine) part. Abl. von f in $(0,0)$ nicht stetig sind. In der Tat $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$, [$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$]

$\frac{\partial f}{\partial y}(ct, st) \underset{c^2+s^2=1}{=} -2sc^3$ [$\frac{\partial f}{\partial x}(ct,st) \underset{c^2+s^2=1}{=} c^4 + 3c^2s^2$].

H2.3 $f(x,t) = t^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} \quad (t>0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) = \underbrace{t^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}}_{=f(x,t)} \frac{(-2x_i)}{4t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t) = \left[\frac{(-2x_i)^2}{(4t)^2} + \left(\frac{-2}{4t}\right)\right] f(x,t)$$

$$\Rightarrow \Delta f(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x_i^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{4 \cdot t^2} - \frac{1}{2t}\right) f(x,t) = \underline{\left(\frac{|x|^2}{4 \cdot t^2} - \frac{n}{2t}\right) f(x,t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{n}{2} t^{-1} \cdot \underbrace{t^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/4t}}_{=f(x,t)}$$

$$+ \underbrace{t^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/4t}}_{=f(x,t)} \cdot \frac{|x|^2}{4t^2}$$

$$= \underline{\left(\frac{|x|^2}{4 \cdot t^2} - \frac{n}{2t}\right) f(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \Delta f(x,t) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$